This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3008.46.4

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
21 Oct. 1893.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Einleitung

in die

Differential- und Integralrechnung.

Erster Theil.

Einleitung

in die

Differential=

und

Integralrechnung

von

Karl Snell,
ordentlichem öffentlichem Professor der Mathematik und Physik
an der Universität Jena.

Erster Theil.

Vom ersten Differentialquotienten.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Leipzig:
F. A. Brockhaus.

1846.

philoſophiſche Bildung Anſpruch machen, gekannt zu ſein verdiente. So wie die niedere Mathematik immer als eine Vorſchule der gemeinen formalen Logik betrachtet worden iſt, welcher ſie auch oft genug die Beiſpiele liefern mußte zu ihren Lehren über Schlüſſe, Definitionen, Beweiſe u. ſ. w., ſo kann die höhere Mathematik, und insbeſondere der unter dem Namen der Differential- und Integralrechnung oder der Analyſis des Unendlichen bekannte Zweig derſelben als eine vortreffliche Vorſchule der höheren Logik und Dialektik, und nicht weniger der allgemeinen Wiſſenſchaftslehre angeſehen werden, indem er ein glänzendes Beiſpiel eines in dieſer höheren Region des demonſtrativen Denkens ausgeführten Wiſſenſchaftsbaues iſt. Zugleich wird man aber ebenſo unbedenklich zugeben, daß die höhere Mathematik ſich einer allgemeineren Verbreitung und einer wahrhaften Anerkennung dieſes ihres philoſophiſchen Werthes bisher nicht zu erfreuen gehabt hat, und daß außer den Mathematikern von Fach kaum irgend Jemand Notiz von derſelben genommen hat. Es fragt ſich, ob nicht auch bei uns die Mathematik wieder einen ähnlichen Bund mit der Philoſophie ſchließen könnte, wie es in der glorreichen wiſſenſchaftlichen Blüthezeit der Griechen der Fall war. Bei den Griechen wurden die Gegenſtände der Mathematik, von Seiten ihrer logiſchen Bedeutung wenigſtens, in den Schulen der Philoſophen immer lebhaft verhandelt. Und wenn dem Plato ſchon die Erkenntniß der Incommenſurabilität ſo bedeutſam erſchien, daß er Unwiſſenheit in derſelben als der Würde des Menſchen widerſtreitend anſah, ſo kann man leicht denken, mit welchem Intereſſe er unſere heutige Mathematik aufgefaßt haben würde. Und gewiß

kann unſere moderne Mathematik ſich gegen unſere moderne Philoſophie ebenſo gut ſehen laſſen, als die Mathematik der Griechen gegen die Philoſophie derſelben es konnte.

Woran liegt die Schuld dieſer geringen Verbreitung der Kenntniß der höheren Mathematik? Wir glauben, ſie iſt weniger in dem Mangel an Intereſſe für dieſe Erkenntniſſe als in der gangbaren Weiſe der Behandlung und Darſtellung der Mathematik zu ſuchen. Die Mathematik zeigt ſich faſt überall nur als Magd der Anwendung und eines äußerlichen Gebrauchs, und das wiſſenſchaftlich Bedeutſame derſelben ſondert ſich nirgends von dem blos Nützlichen. Die Mathematik iſt keineswegs in allen ihren Theilen und auf allen ihren Standpunkten geeignet, ein höheres wiſſenſchaftliches Intereſſe zu erregen. Je weiter man heraufſteigt in derſelben, deſto umfaſſender und allgemeiner werden die Methoden, deſto mehr fallen die willkürlichen Einfälle und Kunſtgriffe weg, deſto mehr ſieht man ſich in den Stand geſetzt, durch einfache Grundgedanken ein ganzes Gebiet zu beherrſchen, und deſto mehr erkennt man die hohe Kraft der Allgemeinheit, welche ſich unmittelbar in das Innere der Sache zu verſetzen vermag. In der niederen Mathematik kriecht man mühſam an den einzelnen Gegenſtänden herum, ohne einen Blick ins Große und Ganze, und das Particuläre der Gegenſtände und Probleme in Verbindung mit den ebenſo particulären für jedes Problem beſonders ausgeſonnenen Behandlungsweiſen, und den äußerlich gegebenen Anweiſungen mit anbefohlenen Operationen und Conſtructionen hat für jeden gereifteren Geiſt ſicherlich gar nichts Anziehendes oder Befriedigendes. Daß die niedere Mathematik mit ihrer ausgedehnten und

angehäuften Masse sich jemals einer allgemeineren Theilnahme zu erfreuen haben werde, dazu ist gar keine Aussicht vorhanden. Und wenn die höhere Mathematik durchaus nicht anders zugänglich gemacht werden kann, als dadurch, daß man die Gebiete der Arithmetik, der Algebra, der niederen Analysis, der Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und analytischen Geometrie in ihrer ganzen Breite und mit ihren unzähligen Nutzanwendungen durchlaufen hat, so ist auch für die höhere Mathematik alle Hoffnung einer größeren Theilnahme an derselben für immer aufzugeben. Aber so verhält es sich glücklicherweise nicht. Man kann zugeben, daß für denjenigen, welcher bei Auflösung der Probleme der angewandten Mathematik, der Mechanik und Naturwissenschaft einen uneingeschränkten und gewandten Gebrauch von der Mathematik machen will, der größte Theil des Inhalts der eben genannten mathematischen Disciplinen von Wichtigkeit werden kann. Aber zur Auffassung der Grundbegriffe und des Geistes der höheren Mathematik, und zu einer Uebersicht des Systems der Mathematik wird derselbe keineswegs nothwendig erfordert. Die Analysis des Unendlichen ist schon deswegen unabhängig von der Kenntniß des größten Theiles der Particularitäten der niederen Mathematik, weil sie selbst allumfassend ist in ihrer Sphäre, und jene Particularitäten in sich schließt, und auf ihrem Wege oder auf ihre Weise aus sich produciren kann. So z. B. kann jeder Lehrsatz der Elementargeometrie, der nicht blos die Ausdehnung des Zusammenhangs der Bestandtheile, sondern die Art dieses Zusammenhangs angibt, durch die Analysis des Unendlichen unbedingt abgeleitet werden.

Es ist daher hier der Versuch gemacht worden, die Analysis des Unendlichen so viel als möglich als eine in sich geschlossene unabhängige Wissenschaft hinzustellen. Was von mathematischen Kenntnissen dabei vorausgesetzt wird, ist nicht viel mehr als ein kleiner Theil der aus jedem Schulunterricht bekannten Elementarmathematik. Außer den Regeln der Buchstabenrechnung und der gewöhnlichen Transpositionen beim Auflösen der Gleichungen, und außer der allgemeinen Bedeutung des Exponenten, als positiven, negativen, ganzen und gebrochenen, und den leichtesten Sätzen der Planimetrie und den bloßen Worterklärungen der trigonometrischen Functionen, werden nur die ersten Grundvorstellungen der analytischen Geometrie, nämlich die räumlichen Darstellungen von Functionen Einer Veränderlichen als bekannt vorausgesetzt. Das Letztere, welches fast das Einzige ist, was außer dem Allerbekanntesten der Elementarmathematik unentbehrlich scheint, möchte am wenigsten leicht überall anzutreffen sein, weil man sehr häufig in dem Schulunterricht die analytische Geometrie gar nicht berührt, und statt dessen die Zeit lieber mit Dingen hinbringt, die außer dem, daß sie ohne Vergleich schwerer sind, auch zugleich sehr langweilig und uninteressant sind. Wenn wir denjenigen, welche sich für die höhere Analysis interessiren, und noch gar keine Vorstellung von der analytischen Geometrie haben, einen Rath ertheilen dürfen, so rathen wir ihnen, in dem „Lehrbuch der analytischen Geometrie zum Selbstunterricht von H. B. Lübsen, Hamburg bei Bödecker", einer recht gut verfaßten kleinen Schrift, die Einleitung, welche die ersten 40 Seiten umfaßt, vorläufig durchzulesen. Dadurch werden sie in der Kürze und

klar über das Nöthige belehrt werden. Wenn wir von einem Satz der niederen Analysis Gebrauch machen, was übrigens fast nur beim binomischen Lehrsatz vorkommt, so haben wir den Satz vollständig hingestellt, und zum Verständniß der daran geknüpften Folgerungen ist natürlich nur Kenntniß des Satzes und nicht seines Beweises nöthig. Ueberhaupt ist des aus allen andern Theilen der Mathematik Vorausgesetzten so wenig, daß wir jetzt, nachdem das Buch fertig gedruckt vor uns liegt, fast bedauern, dies Wenige nicht auf einigen Bogen zusammengestellt zu haben.

Was denjenigen, welche sich nicht vorzugsweise oder nicht viel mit der Mathematik beschäftigt haben, gewöhnlich am meisten abgeht, das ist die Fähigkeit, in der analytischen Zeichensprache der Mathematik mit Leichtigkeit und und Geläufigkeit zu lesen. Ich habe es oft und von Vielen gehört, daß sie alle mathematischen Lehren recht gut verstünden, wenn man sie ihnen mit Worten sagte, und nicht durch Formeln allein gäbe. Allerdings ist die dazu nöthige Abstraction wesentlich eine Sache der Uebung. Ich mußte es mir daher angelegen sein lassen, besonders Anfangs das ganze Räsonnement in der Wortsprache durchzuführen, und krause Formeln zu vermeiden. Aus diesem Bestreben hat man es sich zu erklären, daß manche Resultate auf Wegen gefunden sind, von denen der Mathematiker leicht sagen könnte, das hätte man kürzer haben können. Da indessen ein sehr großer und wesentlicher Theil der Erfolge der Mathematik gerade an diese analytische Zeichensprache geknüpft ist, und es Keinem, der in die Mathematik eindringen will, erlassen werden kann, die Ausdrücke dieser Sprache überall mit bestimmten Gedanken

zu begleiten, so habe ich gesucht, ganz allmälig und Schritt vor Schritt zu der dazu nöthigen Abstraction hinaufzuführen, und jedes zuerst gebrauchte allgemeine Symbol leicht faßlich und deutlich zu machen.

Da man überhaupt oft schon jede mathematische Darstellung, welche auf einen größeren Ueberblick und auf allgemeinere Begriffe dringt, als Philosophie der Mathematik zu bezeichnen pflegt, unter welcher Benennung bei den Mathematikern nicht gerade etwas besonders Ehrenwerthes verstanden wird, und man unsere Auffassung der Differential- und Integralrechnung vielleicht um so eher als eine solche anzusehen geneigt sein möchte, weil wir auch auf die Theilnahme der philosophisch Gebildeten rechnen, so haben wir uns gegen eine solche Meinung noch ausdrücklich zu verwahren. Wir haben unsere Darstellung der Analysis mit gar keinen philosophischen Excursen verziert oder verunziert; vielmehr glauben wir viel strenger, als bisher geschehen, die logische und mathematische Seite des Problems der Differential- und Integralrechnung geschieden, und rein in dem Gebiete der Mathematik und des eigentlich Mathematischen in diesem Problem uns haltend, der Logik und Dialektik ihr Eigenthum ganz und unversehrt in die Hände gegeben zu haben, während ein großer Theil der in der Differentialrechnung so oft vorgebrachten Grübeleien ein halb verdauter philosophischer Brei ist, und gar nicht eigentlich zur Mathematik gehört. Nur durch diese Vermischung der logischen und der mathematischen Schwierigkeit in dem Problem der Differential- und Integralrechnung konnte die Meinung entstehen, daß diese Wissenschaft nicht auf ganz scharfen Begriffen und evidenten

Gründen erbaut sei, und daß sich die Lehren derselben weniger streng beweisen ließen, und in dieser Hinsicht denen der andern Theile der Mathematik und der Exhaustionsmethode der Alten nachgesetzt werden müßten.

Mit diesem ersten Zweck einer größeren Verbreitung des Studiums der höheren Analysis verbinden wir einen zweiten, nämlich den eigentlich didaktischen, welcher alle Anfänger in dieser Wissenschaft im Auge hat. Daß in Betreff der Lehrmethode hier noch Vieles zu thun und zu verbessern übrig ist, wird Niemand in Abrede stellen. Es ist gewiß, daß es Vielen, vielleicht den Meisten, welche zuerst in die Differential- und Integralrechnung eintreten, eine Zeit lang zu Muthe ist, als ginge ihnen ein Rad im Kopfe herum, und daß sie erst sehr allmälig, wenn es zu einzelnen Anwendungen kommt, den vorausgegangenen abstracteren Operationen und Formeln einen bestimmten Sinn und deutliche Begriffe unterzulegen anfangen. Ist denn ein solcher Zustand des allmäligen und mühsamen Hinterdensinnkommens durch die Natur der Wissenschaft nothwendig gemacht, und sind überhaupt die Grundbegriffe derselben so besonders schwierig und unfaßlich? Wir glauben dies gar nicht, und sind vielmehr der Meinung, daß mit der Differential- und Integralrechnung die höhere Mathematik sich auf den einfachen, natürlichen und durchaus einleuchtenden Standpunkt der Betrachtung geschwungen hat, gegen welchen alles Frühere, was zur Bewältigung der hier einschlagenden Probleme versucht worden ist, und von welchem noch ein großer Theil in der niederen Analysis fortgeführt wird, sich außerordentlich künstlich geschroben und schwierig ausnimmt. Es ist nur nöthig, daß man

das Problem, deſſen Auflöſung den Gegenſtand der Differential- und Integralrechnung bildet, und welches auf die Grundvorſtellungen und auf die Nothwendigkeit der eigenthümlichen Operationen natürlich hinleitet, genau vorführe, und ihm trotz ſeiner höchſten Allgemeinheit einen beſtimmten anſchaulichen Sinn unterlegt. Wir haben auf dieſe Weiſe, indem wir uns ſo viel wie möglich den ganzen Standpunkt und alle Bedürfniſſe eines Lernenden, welcher dies Gebiet zuerſt betritt, vergegenwärtigten, allerdings faſt zweihundert Seiten gebraucht zur Auseinanderſetzung von Dingen, welche häufig auf einem halben Dutzend Seiten abgemacht werden. Vielleicht werden Viele, an äußerſte Dürre und Magerkeit in Betreff aller allgemeinen Begriffserörterungen gewöhnt, uns den Vorwurf überflüſſiger Breite machen. Wenn man aber, wie Kant richtig bemerkt, die Weitſchichtigkeit eines Buches nicht beurtheilen muß nach der Seitenzahl, ſondern nach der Zeit, die man braucht, um es zu verſtehen, und wenn, wie wir hoffen, Jeder unſere Darſtellung in einigen Wochen bequem mit dem vollkommenſten Verſtändniß durchleſen kann, und ſich dadurch die für alles gedeihliche Studium unerläßliche Einſicht in das allgemeine Weſen und die Eigenthümlichkeiten der Differential- und Integralrechnung verſchafft, zu welcher Einſicht es in der Regel die Meiſten erſt nach langer Zeit eines ungeregelten Hin- und Hergrübelns, und Manche niemals bringen, ſo halten wir unſere Schrift für die kürzeſte und gedrängteſte, welche jemals über Differential- und Integralrechnung erſchienen iſt.

Da die Differential- und Integralrechnung in ihren Grundbegriffen, ihren Operationen und Methoden eine ſie

von allen andern mathematischen Disciplinen streng scheidende Eigenthümlichkeit hat, so muß auch die Darlegung dieser Eigenthümlichkeit der Hauptgesichtspunkt einer jeden Einleitung oder eines ersten Unterrichts in dieser Wissenschaft sein. Größere und ausführlichere Werke, wenn sie gleich durch die in ihnen enthaltene vielfältige Anwendung die Begriffe anschaulich und lebenvoll machen können, sind doch zum ersten Studium nicht geeignet, weil sie durch die Ausführlichkeit der Behandlung des Einzelnen den Blick ins Ganze und die Vorstellung von dem allgemeinen Wesen der Wissenschaft zu weit hinaus schieben, und den Wald vor lauter Bäumen nicht sehen lassen. Aber die meisten der sogenannt ersten Leitfäden sind zu diesem Zwecke noch viel unbrauchbarer; denn anstatt in der Darlegung der ersten Grundbegriffe ausführlicher zu sein als die größeren systematischen Lehrbücher, unbekümmert um die Vollständigkeit der einzelnen Materien, berühren sie alle Hauptgegenstände im Fluge, und geben eine kurze Zusammenstellung des Unentbehrlichsten aus allen Theilen der Differential- und Integralrechnung, eine Art mathematisches Noth- und Hülfsbüchlein, und werden durch Kürze und den Mangel ausführlicher Anwendungen und Beispiele völlig ungenießbar für den Anfänger. Wir haben uns deswegen Ausführlichkeit in den Grundbegriffen und vielfältige Erläuterung durch Beispiele, aber keine Vollständigkeit, die hier gar nicht am Platze wäre, zur Pflicht gemacht. Es sind nicht blos die Functionen von mehreren Veränderlichen und die imaginären Functionen ganz bei Seite gelassen, sondern auch Alles dasjenige, was mit der Einsicht in die wesentliche Eigenthümlichkeit der Differential- und Inte-

gralrechnung nichts zu ſchaffen hat. So z. B. haben wir uns der Reihen bedient, ohne uns mit der Beſtimmung ihrer Convergenz oder Divergenz weiter aufzuhalten. Ebenſo iſt beim Integriren überall nur von der einfachen Umkehrung der in der Differentialrechnung gefundenen analytiſchen Differentialgleichungen die Rede. Die vielfachen Umformungen, welche nöthig werden, um eine als Differentialquotient gegebene Function dem Differentialquotienten irgend einer bekannten Function anzupaſſen, und welche den größten Raum der Integralrechnung füllen, ſind als auf Sätzen der algebraiſchen Analyſis beruhend für das Weſen der Integralrechnung ohne Bedeutung. Auf dieſe Weiſe iſt Alles entfernt gehalten worden, was von den Hauptgegenſtand abführen oder denſelben in den Hintergrund drängen könnte. Man wird vielleicht denken, daß für den Zweck einer ſolchen Einführung in die Differential- und Integralrechnung des mitgetheilten Stoffes ſchon zu viel ſein möchte. Hiergegen haben wir zu bemerken, daß aus didaktiſchem Geſichtspunkt betrachtet eine allzugroße Armuth des Stoffes ebenſo ſchädlich ſein kann als Ueberladung. Insbeſondere ſchien die vollſtändige Durchführung der Differentiationsregeln beliebiger Functionen Einer Veränderlichen unerläßlich, um eine deutliche Vorſtellung von dem Weſen und der Allgemeinheit der Methode dieſer Wiſſenſchaft zu geben, abgeſehen von dem Zweck, den wir damit verbanden, durch dieſe Ausführung den Anfänger und weniger Geübten allmälig zu der Höhe der Abſtraction heraufzuleiten, welche ihn zu einem erfolgreichen Studium von andern Werken aus dem Gebiet der höheren Analyſis befähigt. Die Behandlung der Kreisfunctionen iſt, da die-

ſelben hier als gänzlich unbekannt vorausgeſetzt werden, und ihr Differentialquotient nicht durch Differentiation, ſondern direct aus der Betrachtung des Kreiſes abgeleitet iſt, nicht als zur allgemeinen Differentialrechnung gehörig, ſondern nur als ein größeres angewandtes Beiſpiel zur Erläuterung des Verfahrens der Differential- und Integralrechnung zu betrachten.

Als eine gänzliche Neuerung in der üblichen Weiſe der Aufeinanderfolge der Gegenſtände muß es erſcheinen, daß nach der allgemeinen Erklärung des Differentiirens im zweiten Capitel eine eben ſolche des Integrirens im dritten Capitel folgt, und daß Differentiiren und Integriren überall nebeneinander herlaufen. Wir hoffen, daß bei genauerer Erwägung dies Verfahren keine Mißbilligung erleiden werde. Sobald man Leſer vorausſetzt, welche ſchon wiſſen, was Differential- und Integralrechnung iſt, ſo iſt die für ſich beſtehende vollſtändige Durchführung der Differentialrechnung, durch welche erſt eine nicht abgeriſſene und nicht durchbrochene Darſtellung der Integralrechnung möglich wird, durchaus zu billigen. Aber für den erſten Anfänger iſt es ganz anders; wenn dieſem bei dem langen und mühſamen Gang durch die ganze Differentialrechnung der Hauptzweck und der wichtigſte Gebrauch dieſer Rechnung, nämlich ihre Verwendung zur Integration, unbekannt bleibt, ſo fehlt mit der Vorſtellung von ihrem Werth und Gebrauch auch faſt alles Intereſſe an derſelben. Wie lehrreich und intereſſant erſcheint dagegen jeder Schritt der operativen Differentialrechnung, wenn man den Gebrauch derſelben zum Integriren überall durch Beiſpiele erläutern, und den erſtaunenswerthen Effect dieſer Differentialgleichungen vor-

führen kann. Warum ſollte man ſich eines ſolchen außerordentlichen Vortheils der Lehrmethode ich möchte ſagen muthwillig begeben, da man das Weſen des Integrirens, als eines Rückſchluſſes von einer abgeleiteten Function auf die zugehörige urſprüngliche, gleich gut erläutern kann, mag die Differentiationsregel nur von Einer oder von vielen Functionen als bekannt vorausgeſetzt werden.

Die höheren Differentiale und Differentialquotienten bezeichnen in der Analyſe des Begriffs eines gemeinſchaftlichen ungleichmäßigen ſtetigen Wachſens zweier von einander abhängigen Größen einen ſo weſentlich neuen Schritt, und erfordern zur Erkenntniß ihrer wahren Bedeutung eine ſo ausführliche Grundlage, daß wir dieſelben von dieſer erſten Abtheilung ganz ausgeſchloſſen, und die Behandlung derſelben nebſt ihren nächſten Anwendungen einem beſonderen zweiten Band überwieſen haben, welcher noch vor dem Ende dieſes Jahres zum Drucke befördert werden wird. Daß man von einem Differentialquotienten, in ſo fern er Function einer Veränderlichen iſt, von Neuem den Differentialquotienten nehmen kann, bedarf freilich keiner ausführlichen Nachweiſung. Dies verſteht ſich vielmehr, wenn man überhaupt erſt weiß, was ein Differentialquotient iſt, ſo durchaus von ſelbſt, daß, wenn man unter einem höheren Differentialquotienten weiter nichts denken will, man gar keine Worte darüber zu verlieren braucht. Wir haben uns deswegen auch gar nicht genirt, ſelbſt in dieſer erſten Abtheilung unſerer Schrift von den Reſultaten einer wiederholten Differentiation, und den aufeinander folgenden (nicht eigentlich höheren) Differentialquotienten zu ſprechen, und von denſelben Gebrauch zu machen, ſo oft wir

ihrer bedurften. Man braucht nur die Leibnitzische Bezeichnungsweise $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ wegzulassen, weil dieselbe allerdings eine Hindeutung auf den eigentlichen Sinn der höheren Differentialquotienten enthält, und aus einer bloßen Wiederholung der Operation des Differentiirens noch nicht verständlich ist, es müßte denn sein, daß man bei einer folgenden Differentiation das dx als constanten Factor ansähe, womit denn die Sache auch sogleich abgethan ist. Oder noch besser, man vermeide auch in der Bezeichnung jede Hindeutung auf einen andern Sinn der höheren Differentialquotienten als den einer bloßen Wiederholung der Operation, und bezeichne die aufeinander folgenden Differentialquotienten einer Function $f(x)$ durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, so ist man durch diese bewunderungswürdige List aller der vielberufenen Schwierigkeiten der höheren Differentiale, aber freilich auch noch einer andern Kleinigkeit, nämlich alles Sinnes und aller Bedeutung derselben, mit Einem Schlage baar und ledig. Von einer solchen Bedeutung der höheren Differentialquotienten, wo z. B. $f'''(x)$ nur die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Veränderlichen $f''(x)$ und x darstellt, man aber durch $f'''(x)$ gar nichts erfährt über die Eigenthümlichkeit des Wachsens der ursprünglichen Veränderlichen $f(x)$ und x, ausdrücklich zu handeln, haben wir nicht der Mühe werth erachtet, da sie sich ganz von selbst versteht.

Wenn nun gleich dies Buch in Bezug auf einzelne mathematische Lehrsätze nur das Allerbekannteste und Trivialste umfaßt, wie es unser Hauptzweck, für die Anfänger der Analysis des Unendlichen zu schreiben, mit sich

brachte, so haben wir doch keineswegs für diese allein geschrieben, sondern glauben annehmen zu dürfen, daß auch gelehrte Mathematiker Manches ihrer Beachtung Würdige darin finden werden. Wie Vieles wir an den verschiedenen Versuchen zur Feststellung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung auszusetzen gefunden und deswegen in eine andere Fassung gebracht haben, und was wir in Betreff allgemeiner Gesichtspunkte zu ordnen und aufzuräumen gesucht haben, wollen wir nicht im Einzelnen aufzählen. Der kundige Leser wird es von selbst bemerken, um so mehr, als in dem Buche selbst an den wichtigsten Punkten auf abweichende Darstellungsweisen Beziehung genommen ist. Ob wir in der Begründung der Differentialrechnung zur Vermehrung der Evidenz, der innern Einheit der Auffassung, und der Entfernung übel empfundener Mißstände etwas beigetragen, darüber zu entscheiden, müssen wir dem Urtheil der Einsichtsvollen gänzlich überlassen. Insbesondere aber möchten wir unsere Schrift noch der Beachtung Derjenigen empfehlen, welche die Differential- und Integralrechnung, die gegenwärtig fast auf allen höheren Realschulen vorgetragen wird, zu lehren haben. Wenn dieselben bei ihrem Unterricht einen Gang nehmen wollen, der je nach den verschiedenen Vorkenntnissen oder der allgemeinen Bildung der Lernenden dem von uns eingeschlagenen Wege mehr oder weniger ähnlich ist, und wenn sie das Allgemeine nicht in üblicher Weise zu sehr übereilen oder zu knapp und dürftig behandeln, sondern sich zu einer ausführlichen Entwickelung desselben Zeit gönnen, so werden sie sicherlich nur die erfreulichsten Früchte davon sehen. Ich berufe mich in dieser Hinsicht auf meine eigene nicht allzugeringe Erfah-

rung, welche ich an Leuten von sehr verschiedenem Alter und sehr verschiedenen Vorkenntnissen gemacht habe, und ich darf sagen, daß diese Darstellung der Differential- und Integralrechnung bei Allen Klarheit, völlige Einsicht und Interesse an der Wissenschaft, bei Vielen aber denjenigen Enthusiasmus hervorgebracht hat, welcher nach Plato die Seele ergreift, wenn sie sich der schöpferischen Kraft des reinen Denkens bewußt wird, und einen im Geiste schlummernden angebornen Ideenreichthum hervorsprossen und sich entfalten sieht.

So wende ich mich denn mit meiner Schrift an ein Publicum, welches Gelehrte und Laien der Mathematik gleicherweise umfaßt. Und wenn es mir gelingen sollte, durch dieselbe etwas beizutragen zur Erleichterung und zur Verbreitung einer Wissenschaft, die für ein Meisterstück des menschlichen Geistes gehalten werden muß, so bin ich hinlänglich belohnt.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Erſtes Capitel.

Vorbegriffe der Differential- und Integralrechnung.

		Seite
§. 1.	Schwierigkeit der Methode der Darſtellung der Differential- und Integralrechnung	1
§. 2.	Ausdehnung und Art des Zuſammenhangs der Größen.	4
§. 3.	Functionen der beſtimmenden Größen	8
§. 4.	Unvollendbare Functionen	10
§. 5.	Functionen Einer Veränderlichen	12
§. 6.	Unterſcheidungskennzeichen der Veränderlichen und Conſtanten	16
§. 7.	Functionen als Zuſammenſetzungen von Functionen	17
§. 8.	Allgemeine Functionsbezeichnungen	19
§. 9.	Berichtigung gangbarer Erklärungen der Function	20
§. 10.	Willkürlich und abhängig Veränderliche	26
§. 11.	Gegenſtand der Differential- und Integralrechnung im Allgemeinen	27
§. 12.	Continuirliche und discrete Größen	30
§. 13.	Das Abnehmen und Zunehmen zuſammen unter dem Begriff des Wachſens	32

Seite

§. 14. Gleichmäßig und ungleichmäßig wachsende Größen 33
§. 15. Constanter Differenzquotient der gleichmäßig Wachsenden 36
§. 16. Negative Differenzquotienten 39
§. 17. Verhältnißmäßige Stärke des Wachsens 42
§. 18. Allgemeine Function der gleichmäßig Wachsenden 44
§. 19. Bestimmung der Constanten 46
§. 20. Schlußbetrachtung über die gleichmäßig Wachsenden 51

Zweites Capitel.

Vom Differentiiren im Allgemeinen.

Seite

§. 21. Allgemeingültigkeit der Definition der ungleichmäßig Wachsenden 55
§. 22. Stetige Veränderung der Stärke des Wachsens 56
§. 23. Logische Natur des Begriffs der stetigen Veränderung. 58
§. 24. Zufälligkeit des Werthes des Differenzquotienten 61
§. 25. Die Stärke des Wachsens durch den Differenzquotienten nicht bestimmbar 65
§. 26. Erläuterung durch den Begriff der Geschwindigkeit ... 68
§. 27. Trennung der logischen und mathematischen Schwierigkeit 71
§. 28. Stärke des Wachsens durch den Grenzwerth des Differenzquotienten bestimmbar 75
§. 29. Beispiel von bestimmten Werthen des Grenzwerthes des Differenzquotienten 77
§. 30. Beispiel vom allgemeinen Ausdruck des Grenzwerthes des Differenzquotienten 81
§. 31. Sinn des Grenzwerthes des Differenzquotienten einer abstracten Function 84
§. 32. Allgemeine Betrachtungen über den Grenzwerth des Differenzquotienten 89
§. 33. Grenzwerth des Differenzquotienten der allgemeinen Potenzfunction 92
§. 34. Algebraische Bezeichnung des Grenzwerthes des Differenzquotienten 95

Seite

§. 35. Das Differentiiren und die Differentialgleichungen 98
§. 36. Allgemeiner Sinn des Differentialquotienten 101
§. 37. Isolirte Differentiale und die Rechnung mit denselben. 106
§. 38. Andere Bezeichnungsweisen des Differentialquotienten ... 110
§. 39. Bedingungen der Denkbarkeit eines stetig veränderlichen Zustandes 116
§. 40. Die überflüssigen Grübeleien der Differential- und Integralrechnung 120
§. 41. Schlußbetrachtung über das Differentiiren 126

Drittes Capitel.

Vom Integriren im Allgemeinen.

Seite

§. 42. Die Abhängigkeit der Größen als Folge der Stärke ihres Wachsens 134
§. 43. Eine Function als aus ihrem Differentialquotienten resultirend 136
§. 44. Erläuterung an dem Beispiel der Potenzfunction. ... 138
§. 45. Das Integriren als Rückschluß von einem Differentialquotienten auf eine Function 141
§. 46. Nachtrag zur Integration der Potenzfunction 143
§. 47. Vorläufige Bemerkungen über Constantenbestimmung .. 144
§. 48. Nothwendigkeit einer directen Auffindung des Differentialquotienten 146
§. 49. Der Differentialquotient der Fläche und Abscisse bei Parallelcoordinaten 149
§. 50. Beispiele von Flächenberechnungen 151
§. 51. Der Differentialquotient der Fläche und Abscisse bei Polarcoordinaten 155
§. 52. Der Differentialquotient des Cubikinhalts und der Abscisse 158
§. 53. Der Differentialquotient der Curvenlänge und der Abscisse 163
§. 54. Allgemeine Bemerkungen über directe Auffindung des Differentialquotienten 165

Seite

§. 55. Der Differentialquotient als willkürliche Voraussetzung 167
§. 56. Uebergang zu Leibnitzens Ansicht vom Integriren 168
§. 57. Das Integral als Summenformel einer unendlichen Reihe 171
§. 58. Beispiel von der Flächenberechnung des Dreiecks 175
§. 59. Entstehung und ursprüngliche Bedeutung des Integralzeichens 178
§. 60. Erläuterung gangbarer Vorstellungen vom Differential 183
§. 61. Schlußbetrachtung über das Differentiiren und Integriren im Allgemeinen 186

Viertes Capitel.

Von der Zurückführung der Differentiation zusammengesetzter Functionen auf die Differentiation einfacher Functionen.

Seite

§. 62. Möglichkeit allgemein umfassender Differentiationsregeln 190
§. 63. Eine Function als Summe zweier Functionen..... 194
§. 64. Eine Function als Unterschied zweier Functionen 196
§. 65. Eine Function als Product zweier Functionen..... 198
§. 66. Eine Function als Quotient zweier Functionen..... 200
§. 67. Eine Function als Function einer Function..... 203
§. 68. Combination bestimmter Functionen mit unbestimmten. 205
§. 69. Differentiation der Potenzfunction mit gebrochenen und negativen Exponenten..... 207
§. 70. Differentiation aller algebraischen Functionen..... 209
§. 71. Integrationsregeln, die aus dem Vorhergehenden folgen 213
§. 72. Integration der Potenz eines bestimmten Binoms..... 217
§. 73. Beispiele, in welchen geschlossene Potenzfunctionen zu integriren sind 219
§. 74. Nachtrag über Constantenbestimmung..... 225
§. 75. Beispiele, in welchen unendliche Potenzenreihen zu integriren sind 234
§. 76. Beispiel der Integration eines unentwickelten Differentialquotienten 242

Fünftes Capitel.

Von den Functionen mit veränderlichen Exponenten und der Differentiation derſelben.

		Seite
§. 77.	Potenzfunctionen und Exponentialfunctionen im Allgemeinen	247
§. 78.	Differentiation der Exponentialfunction a^x	257
§. 79.	Differentiation der logarithmiſchen Function	262
§. 80.	Entwickelung der logarithmiſchen Function	264
§. 81.	Allgemeingeltender Ausdruck des Logarithmus einer Zahl	268
§. 82.	Die natürlichen Logarithmen und ihre Baſis	272
§. 83.	Die Operationen mit natürlichen Logarithmen	277
§. 84.	Berechnung der Zahlen aus ihren Logarithmen	279
§. 85.	Die Veränderlichen der logarithmiſchen und Exponentialfunction als Functionen	281
§. 86.	Functionen mit veränderlicher Grundzahl und veränderlichem Exponent	287
§. 87.	Integrationsregeln, die aus den Lehren dieſes Capitels folgen	292

Sechstes Capitel.

Von der Differentiation und der Entwickelung der Kreisfunctionen.

		Seite
§. 88.	Von den Kreisfunctionen im Allgemeinen	296
§. 89.	Differentiation der Kreisfunctionen bei willkürlich veränderlichem Bogen	301
§. 90.	Differentiation der Kreisfunctionen bei abhängig veränderlichem Bogen	307
§. 91.	Entwickelung der Kreisfunctionen	314
§. 92.	Abgekürzte Integrationsregeln, die aus dem Vorhergehenden folgen	323

Siebentes Capitel.

Uebungsbeispiele zur Anwendung der Differentialrechnung.

		Seite
§. 93.	Lehre vom Größten und Kleinsten	325
§. 94.	Beispiele zur Lehre vom Größten und Kleinsten	330
§. 95.	Das Ziehen der Tangenten bei Parallelcoordinaten	340
§. 96.	Beispiele von Tangenten an vorgeschriebene Punkte	345
§. 97.	Tangenten in vorgeschriebener Richtung	348
§. 98.	Tangenten von einem Punkt außerhalb der Curve	350
§. 99.	Tangenten bei Polarcoordinaten	352
§. 100.	Beispiele von Tangenten bei Polarcoordinaten	356

Erstes Capitel.

Vorbegriffe der Differential- und Integralrechnung.

§. 1.

Die Wissenschaft, welche die größte, schnellste und glücklichste Umwälzung in unsern mathematischen Kenntnissen hervorgebracht hat, die Differential- und Integralrechnung, hat in ihren Grundbegriffen, in ihren Operationen und in ihrer Methode so viel Eigenthümliches und von allen andern mathematischen Wissenschaften Verschiedenes, daß sie sich nicht direct und einfach an andere, sonst etwa schon bekannte Theile der Mathematik anschließen und auf denselben auferbauen läßt, sondern eine ganz neue und besondere ausführliche Grundlegung verlangt. Da die Einsicht in die allgemeinen Eigenthümlichkeiten dieser Wissenschaft bei Weitem der bedeutendste und wichtigste Schritt ist, der zum Eindringen in das Innere derselben erfordert wird, so werden wir uns zuerst in mehreren Capiteln über das Wesen und die Methode der Differential- und Integralrechnung im Allgemeinen ausführlich verbreiten. Wenn nun zwar dies Unternehmen, eine allgemeine Angabe des Begriffs und der Methode der Differential- und Integralrechnung der speciellen Ausführung derselben voranzuschicken, insofern nicht auffallen kann, als man überall bei dem Eintritt in eine Wissenschaft eine Angabe des Gegenstandes und eine Bezeichnung des Inhaltes derselben erwartet, so

muß ein ſolches Unternehmen doch in dieſem Falle ein Bedenken erregen, da man findet, daß die bedeutendſten Lehrer dieſer Wiſſenſchaft eine ſolche vorläufige allgemeine Bezeichnung des Inhaltes und der Methode derſelben, die der ſpeciellen Ausführung vorausgeht, für unmöglich halten. Denn die Männer, welche nächſt den beiden Erfindern der Differential- und Integralrechnung dieſelbe mit dem bedeutendſten Erfolge bearbeitet, oder in der größten Ausführlichkeit behandelt haben, namentlich Euler, Lagrange und Lacroix *), haben ſich dahin geäußert, daß man demjenigen, der nicht ſchon an einzelnen Aufgaben und Unterſuchungen die eigenthümlichen Verfahrungsweiſen dieſer Wiſſenſchaft kennen gelernt habe, auch keine Vorſtellung von dem Weſen derſelben geben könne. Indem man eine ſolche vorläufige Orientirung über die Aufgabe und das Weſen dieſer Wiſſenſchaft für etwas Unthunliches ausgibt, iſt es noch unbeſtimmt gelaſſen, ob man nur den Gegenſtand derſelben bezeichnet wiſſen will, oder ob man auch beſtimmen will, welche Seiten an dieſem Object der Unterſuchung unterworfen werden ſollen, und alſo den eigentlichen Inhalt angeben will, oder ob man endlich auch die Art und Weiſe der Verarbeitung und Behandlung dieſes Inhaltes, alſo die Methode darlegen will. Nun kann freilich wohl

*) Quid sit calculus differentialis atque in genere analysis infinitorum iis, qui nulla adhuc ejus cognitione imbuti sunt, vix explicari potest; neque hic, uti in aliis disciplinis fieri solet, exordium tractationis a definitione commode sumere licet.

Euler, Calc. differ. in prooemio.

Il serait fort difficile d'expliquer clairement la nature du calcul differentiel à ceux, qui n'en ont pas les premières notions. Ce n'est pas, qu'on ne puisse définir rigoureusement ce calcul; mais on ne saurait le faire sans emprunter des idées, qui ne se rencontrent point dans les circonstances ordinaires de la vie, ni dans les parties des Mathématiques, qui sont l'objet des études précédentes.

Lacroix, Traité du calc. diff. et du calc. integr.

eine kurze und völlig zutreffende Bezeichnung der Aufgabe einer Wissenschaft in jeder dieser drei Hinsichten unter gewissen Umständen, wenn auch nicht etwas Unmögliches, so doch etwas für den Anfang wenigstens durchaus Unfaßliches, und folglich Unnützes sein. Es wird dies nämlich dann der Fall sein, wenn erstens der Gegenstand einer Wissenschaft entweder sich in der gemeinen Vorstellung nicht als ein von andern Gegenständen abgesonderter antreffen läßt, oder ein so umfassender und allgemeiner ist, daß er das Eigenthümliche der Wissenschaft zu bezeichnen gar nicht im Stande ist, oder wenn zweitens der Inhalt von der Art ist, daß zu seiner Angabe gewisse Begriffe erfordert werden, welche erst im Innern der Wissenschaft selbst ihre Entwickelung finden, und welche vor dieser Entwickelung weder völlig deutlich, noch hinlänglich berechtigt erscheinen, welcher letztere Umstand in Betreff der Methode einer Wissenschaft begreiflicherweise ebenfalls und in noch erhöhtem Maße eintreten kann.

Nun läßt sich allerdings nicht läugnen, daß einer genauen und bestimmten Angabe des Gegenstandes, des Inhaltes und der Methode der Differential- und Integralrechnung, welche der Ausführung dieser Wissenschaft vorausginge, sich ungefähr die Hindernisse wirklich entgegenstellen, welche so eben als mögliche bezeichnet worden sind. Wenn man nun hieraus folgern zu müssen glaubt, daß man, ohne vorher eine allgemeine Vorstellung von der Aufgabe und dem Wesen der Differential- und Integralrechnung bei dem Leser oder Schüler erweckt zu haben, sich unmittelbar in die Aufstellung der Fundamentalregeln hineinbegeben, und dieselben so weit durchführen müsse, wie es der Zweck ihrer späteren Anwendung erheischt, und es dann weiterhin dem Leser oder Schüler selbst überlassen müsse, aus der im Fortgang der Sache sich immer weiter ausbreitenden Erfahrung von den Eigenthümlichkeiten der Wissenschaft, sich allmälig immer deutlichere Begriffe von dem Wesen und dem Inhalt derselben zu bilden, so ist zu

dieser Folgerung noch gar keine hinlängliche Nöthigung vorhanden. Vielmehr folgt nur, daß, wenn eine fertige und abgeschlossene Definition des Wesens der Differential- und Integralrechnung nicht deutlich sein kann, und sich nicht an die Spitze stellen läßt, man den Begriff dieser Wissenschaft aus dem Unbestimmten zum Bestimmten sich entwickeln, und vor den Augen des Lesers allmälig entstehen lassen muß. Und da ein Hineingehen in einzelne Untersuchungen, oder was noch gewöhnlicher ist, eine Aneignung von operativen Regeln ohne Bewußtsein über Zweck und Bedeutung derselben, und über ihren Zusammenhang mit der Gesammtaufgabe der Wissenschaft jedenfalls zu verwerfen ist, indem dergleichen Untersuchungen und Regeln unter diesen Umständen weder mit dem wahren Interesse, noch mit dem rechten Sinne aufgefaßt werden können, und sicherlich ebenso unverständlich sind, als die vermiedene Definition selbst, so ist eine vorläufige allgemeine Orientirung über Aufgabe und Ziel der Wissenschaft unerläßlich. Eine solche zu geben, ist der Zweck unserer ersten Capitel.

§. 2.

Ausdehnung und Art des Zusammenhangs der Größen.

Die Mathematik hat, insofern sie sich die Aufgabe stellt, den Zusammenhang der Größen und ihre gegenseitige Abhängigkeit von einander zu bestimmen, hierbei im Allgemeinen ein doppeltes Geschäft; erstens nämlich hat sie festzusetzen, wie weit dieser Zusammenhang sich erstreckt, oder ob von gewissen vorausgesetzten Größen andere wirklich abhängig sind, und zweitens hat sie anzugeben, von welcher Art dieser Zusammenhang und diese Abhängigkeit ist, oder auf welche Weise aus den jedesmaligen zufälligen und willkürlich anzunehmenden Werthen der bestimmenden Größen der Werth einer von denselben abhängigen Größe hergeleitet werden kann. Man könnte das Erste die Ausdehnung und das Zweite die Art oder die Natur des

Zusammenhangs nennen. Wenn z. B. in der Planimetrie durch die Sätze von der Congruenz der Dreiecke über den Zusammenhang der sechs Bestandtheile des Dreiecks, drei Seiten und drei Winkel, ausgesagt wird, daß durch drei von diesen sechs Bestandtheilen, welche unabhängig von einander sind und willkürlich angenommen werden können, die Größe eines Jeden der drei andern Bestandtheile völlig bestimmt ist, so geben diese Sätze nur an, wie weit sich der Zusammenhang unter diesen sechs Bestandtheilen des Dreiecks erstreckt, oder bestimmen die Ausdehnung des Zusammenhangs unter denselben. Ebenso wenn der Satz aufgestellt wird, daß von den Winkeln eines Dreiecks die Seitenverhältnisse desselben abhängen, oder daß durch Eine Seite eines Parallelogramms und den senkrechten Abstand derselben von der ihr gegenüberliegenden Seite der Flächeninhalt des Parallelogramms bestimmt ist, oder daß eine unbekannte Zahl durch gegebene Beziehungen zu bekannten Zahlen völlig bestimmt ist, wenn gemäß diesen Beziehungen eine Gleichung mit Einer Unbekannten aufgestellt werden kann, und dergl. mehr.

Diese Ausdehnung des Zusammenhangs unter den Größen ist nun meistens etwas so Einfaches und auf der Hand Liegendes, daß in dem Lehrgebäude der höheren Mathematik wenigstens selten von derselben weitläufig die Rede ist, und daß sie fast durchgängig als etwas sich von selbst Verstehendes betrachtet wird. Das zweite weit umfangreichere und wichtigere Geschäft der Mathematik besteht darin, die Art und Natur des Zusammenhangs unter den Größen festzusetzen, und anzugeben, auf welche Weise aus den jedesmaligen zufälligen oder willkürlichen Zahlenwerthen der bestimmenden Größen der Zahlenwerth einer von denselben abhängigen Größe abgeleitet, d. h. berechnet werden kann. Während das Erstere uns nur belehrt, daß aus gewissen Größen andere folgen, so lehrt uns das Zweite, dieselben auch zu folgern, oder die Folge, die als der Sache nach vorhanden seiend schon erkannt worden ist,

auch denkend zu vollziehen, und die innere Weise dieser Abhängigkeit uns vorzustellen. Da man aber im Besitz dieser Vorstellung der innern Weise der Abhängigkeit oder des Gesetzes derselben erst sein wird, wenn man im Stande ist, aus den den bestimmenden Größen beigelegten Zahlenwerthen den Zahlenwerth einer von denselben abhängigen Größe zu berechnen, so kann die Einsicht in die innere Natur des Zusammenhangs der Größen allgemein nichts Anderes sein, als die Kenntniß der Rechnungsoperationen, welchen die bestimmenden Zahlen in Verbindung vielleicht noch mit andern absoluten Zahlen unterworfen werden müssen, um dadurch die davon abhängige Zahl zu erhalten. Daß hierbei die bestimmenden Größen, wenn sie nicht schon ursprünglich Zahlen sind, immer durch Zahlen ausgedrückt gedacht werden müssen, welche ihnen, durch eine beliebige als Einheit betrachtete Größe ihrer Art gemessen, zukommen, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Man kann sich das Gesagte schon hinlänglich erläutern durch Beispiele aus der Elementargeometrie, indem in derselben auch häufig Regeln zur Berechnung einer abhängigen Größe aus den bestimmenden Größen aufgestellt werden, obgleich der größte Theil dieser Regeln dem Gebiete der höheren Mathematik angehört. Daß durch die Länge der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge der Hypotenuse völlig bestimmt ist, folgt schon aus der Lehre von der Congruenz der Dreiecke; dies kann man wissen, ohne von der Art dieser Abhängigkeit irgend eine Vorstellung zu haben, oder ohne zu wissen, durch welche mit den Zahlenwerthen der Katheten vorzunehmende Rechnungsoperationen man den Zahlenwerth der Hypotenuse erhalten wird. Diese Rechnungsoperationen, die bei allen möglichen Veränderungen der relativen oder absoluten Länge der Katheten immer dieselben bleiben, und deren Angabe den Inhalt des Pythagorischen Lehrsatzes bildet, sind bekanntlich von der Art, daß, wenn a und b die Zahlenwerthe der beiden Katheten bezüglich auf irgend eine ge-

meinschaftliche Längeneinheit ausdrücken, alsdann $\sqrt{a^2+b^2}$ der Zahlenwerth der Hypotenuse bezüglich auf dieselbe Längeneinheit ist. Durch diese Formel erst ist das Gesetz der Abhängigkeit oder die Art und Weise des Zusammenhangs der drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks bestimmt. Oder es sei, um ein zweites Beispiel zu geben, eine Linie, welche die Sehne eines beliebigen Kreisbogens ist, ihrer Länge nach gegeben, desgleichen der Radius dieses Kreises, so ist natürlich unter andern auch die Sehne des halb so großen Bogens dadurch ihrer Länge nach bestimmt. Die bestimmte Form der arithmetischen Verknüpfung, in welche hier die bestimmenden Zahlen mit sich selbst und etwa noch mit andern absoluten oder bestimmten Zahlen gesetzt werden müssen, um den Zahlenwerth der Sehne des halb so großen Bogens auszudrücken, wird das Gesetz dieser Abhängigkeit enthalten. Hat die Sehne den Zahlenwerth s, der Radius den Zahlenwerth r, so ist, wie aus den Elementen der Kreislehre bekannt, $\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{s^2}{4}}}$ der Zahlenwerth der Sehne des halb so großen Bogens. So ist z. B. ferner der Flächeninhalt eines Paralleltrapezes durch die zwei parallelen Seiten und den senkrechten Abstand derselben völlig bestimmt. Aber diejenige arithmetische Verknüpfung dieser bestimmenden Zahlen, welche den Flächeninhalt angibt, muß man wissen, um das Gesetz der Abhängigkeit zu haben. Haben die parallelen Seiten die Zahlenwerthe a und b, und der senkrechte Abstand derselben den Zahlenwerth h, so ist bekanntlich $\frac{a+b}{2}.h$ der Zahlenwerth der Fläche, insofern dieselbe nämlich durch Quadrate, deren Seite der angenommenen Längeneinheit gleich ist, ausgedrückt werden soll. Ganz ebenso verhält es sich, wenn eine Zahl durch vorgeschriebene Beziehungen zu andern bekannten Zahlen bestimmt ist. Es muß die arithmetische Verbindungsform der bekannten Zahlen, welche der unbekannten Zahl gleich ist, angegeben werden, um

das Gesetz der Abhängigkeit zu haben. Ist z. B. die Summe zweier Zahlen und das Verhältniß derselben bekannt, so sind diese Zahlen natürlich dadurch völlig bestimmt. Ihre Summe sei $= s$ und ihr Verhältniß wie $a : b$. Da nun diejenige Zahl, welche der Verhältnißzahl a entspricht, auszudrücken ist durch $\frac{a \cdot s}{a+b}$ und die andere durch $\frac{b \cdot s}{a+b}$, so ist durch diese Formeln erst das Gesetz der Abhängigkeit dieser Zahlen von den bestimmenden Zahlen s, a und b gegeben. Man wird aus dem Gesagten hinlänglich ersehen haben, daß bei Bestimmung des Zusammenhangs oder der Abhängigkeit der Größen überall zwei Stufen dieser Bestimmung zu unterscheiden sind, von denen die Erstere Bestimmung der Ausdehnung, und die Andere Bestimmung der Art des Zusammenhangs ist, und daß unter diesen beiden Stufen Alles begriffen werden kann, was die Mathematik überhaupt über die gegenseitige Abhängigkeit der Größen lehrt.

§. 3.

Functionen der bestimmenden Größen.

Die Art der Abhängigkeit einer Größe von einer oder mehreren bestimmenden Größen wird also dem Vorhergehenden zu Folge auf eine allgemeine, und für alle möglichen Zahlenwerthe der bestimmenden Größen geltende Weise festgestellt sein, wenn man weiß, durch welche unveränderliche arithmetische Operationen die allgemein ausgedrückten Zahlenwerthe der bestimmenden Größen mit sich und etwa auch noch mit andern bestimmten Zahlen verbunden werden müssen, um durch diese Verbindungsform oder durch diese Formel den Werth der abhängigen Größe auszudrücken. Es ist bequem, und zur Vermeidung von Weitschweifigkeit im Ausdruck unerläßlich, für diesen allgemeinen Begriff einer durch beliebige arithmetische Operationen zusammengesetzten Verbindung von allgemein aus-

gedrückten Zahlen und bestimmten Zahlen ein besonderes Wort zu haben. Man hat dafür das Wort Function eingeführt, und zwar nennt man eine solche beliebig zusammengesetzte Formel eine Function der allgemein und unbestimmt ausgedrückten Zahlenwerthe, welche in der Formel enthalten sind. Die Bestimmtheit und besondere Natur der Function liegt einzig und allein in der bestimmten Weise der arithmetischen Verknüpfung der allgemeinen und der bestimmten Zahlen. Die Formel $\sqrt{a^2+b^2}$, durch welche die Hypotenuse eines Dreiecks ausgedrückt wird, dessen Katheten die Zahlenwerthe a und b haben, heißt eine Function der Zahlen a und b. Ebenso wird, wenn in einem Kreise der Radius den Zahlenwerth r, die Sehne eines Bogens den Zahlenwerth s hat, die Formel $\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{s^2}{4}}}$, welche, wie oben bemerkt, die Sehne des halb so großen Bogens gibt, eine Function der Zahlen r und s heißen. Würde aber der Radius eines Kreises = 1 und die Sehne eines Bogens = s gesetzt, so würde die Formel, welche unter dieser besonderen Voraussetzung die Sehne des halb so großen Bogens angibt, nämlich die Formel $\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{s^2}{4}}}$ nun eine Function von s allein heißen, da der Radius in die Kategorie der bestimmten Zahlen getreten ist. In einer geordneten algebraischen Gleichung ist der Werth der Unbekannten x von den Coefficienten der einzelnen Potenzen von x und von dem Gliede der Gleichung, welches kein x enthält, abhängig, und wird also durch irgend eine Function dieser bestimmenden Größen ausgedrückt erscheinen müssen, wenn die Gleichung allgemein aufgelöst ist. So ist z. B. in der quadratischen Gleichung $ax^2+bx=c$ der Werth der Unbekannten x durch folgende Function $\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b}{2a}$ der drei bestimmenden Größen a, b und c gegeben. Man

sieht leicht, daß das Hauptgeschäft der Mathematik, durch welches die Art und Weise, und nicht blos die Ausdehnung des Zusammenhangs der Größen, also die eigentlichen Gesetze der Abhängigkeit derselben festgestellt werden sollen, bezeichnet werden kann als die Aufsuchung von Functionen der bestimmenden Größen.

Ob nun wohl gleich die Aufsuchung von bestimmten Functionen in der Regel eine Feststellung des Gesetzes der Abhängigkeit einer Größe von andern zum Zwecke hat, und die Function also in diesem Falle allgemeiner Ausdruck einer abhängigen Größe ist, so hat man doch bei dem Begriffe der Function als solcher jeden Gedanken an irgend eine Größe, deren Werth etwa durch die Function ausgedrückt ist, fern zu halten, und bei diesem Begriffe an weiter nichts zu denken, als an einen aus unbestimmten und vielleicht auch noch bestimmten Zahlen auf unveränderliche Weise arithmetisch zusammengesetzten Ausdruck, und nur die besondere Weise dieser Zusammensetzung als die eigenthümliche Natur der Function zu betrachten. Es ist überhaupt, wenn man eine Formel eine Function der in ihr enthaltenen unbestimmten Zahlenwerthe nennt, gar nicht nöthig, daß eine solche Formel als die Lösung irgend einer Aufgabe enthaltend angesehen werde, sondern jede ganz willkürliche arithmetische Verknüpfung von unbestimmten Zahlenwerthen, entweder mit sich allein, oder außerdem auch noch mit bestimmten Zahlen, wie z. B. $\frac{a \cdot b}{3(a+b)}$ heißt eine Function der unbestimmten Zahlen a und b.

§. 4.

Unvollendbare Functionen.

Durch eine Function der bestimmenden Größen wird die Art der Abhängigkeit einer Größe von andern sie bestimmenden erst zu einer gedachten oder vorstellbaren, weil wir nur durch die Function in den Stand gesetzt werden, den Werth einer Größe, die aus andern folgt, auch wirk-

lich zu folgern. Hierbei kann noch die Frage erhoben werden, ob denn überhaupt die Abhängigkeit der Größen von einander überall von der Art ist, daß sie in einen gewissen arithmetisch zusammengesetzten Ausdruck gefaßt, und durch beliebige, mit den bestimmenden Zahlen und andern absoluten Zahlen vorzunehmende Rechnungsoperationen erschöpft werden könne, und daß dieselbe folglich eine eigentlich vorstellbare sei. Wenn man wohl schon im Voraus, auch ohne nähere Kenntniß der Mathematik, Bedenken tragen würde, diese Frage mit Ja zu beantworten, so überzeugen uns auch die ersten Schritte in das Gebiet der Mathematik, daß sie mit Nein zu beantworten ist. Wir finden die Abhängigkeit der Größen häufig von der Art, daß durch keine mit den bestimmenden Zahlen und andern absoluten Zahlen irgend vorzunehmende beliebige Rechnungsoperationen, und auch durch keine beliebig weit fortgesetzte Wiederholung solcher Operationen der Zahlenwerth der abhängigen Größe völlig adäquat ausgedrückt werden könne. Dabei ist zugleich leicht zu bemerken, daß diese Unmöglichkeit, den Zahlenwerth einer abhängigen Größe in einen geschlossenen arithmetischen Ausdruck zu fassen, nicht Folge der Mangelhaftigkeit unserer Erkenntniß der Sache ist, sondern daß die bestimmte Natur der Abhängigkeit und die Rechnungsoperationen selbst, durch welche diese Art der Abhängigkeit als eine vorstellbare gegeben sein soll, durchaus unvereinbar sind. Wenn man z. B. fragt, auf welche Potenz muß eine Zahl a erhoben werden, damit eine Zahl b herauskomme, oder was dasselbe ist, welche Zahl ist der Logarithmus von b für die Grundzahl a des logarithmischen Systems, so ist der gesuchte Exponent von a sicherlich von den Zahlen a und b abhängig, und durch dieselben völlig bestimmt. Sucht man aber in der Gleichung $a^x = b$ die Zahl x durch eine arithmetische Zusammensetzung der sie bestimmenden Zahlen a und b auszudrücken, so findet man, wie wir hier als bekannt voraussetzen wollen, daß dieselbe durch keinerlei mit den Zah-

len a und b und andern absoluten Zahlen vorzunehmende Rechnungsoperationen, und auch durch keine beliebig weit fortgesetzte Wiederholung solcher Operationen völlig genau dargestellt werden kann, sondern daß erst eine ins Unendliche fortgesetzte und folglich unausführbare Wiederholung von Operationen das Verlangte leisten würde, und daß mithin die Rechnungsoperationen an sich der hier stattfindenden Natur der Abhängigkeit widerstreiten. Dasselbe würde eintreten, wenn man z. B. die Sehne eines Kreisbogens durch den Zahlenwerth dieses Bogens, von welchem sie doch bei angenommenem bestimmten Zahlenwerth des Radius allein abhängig ist, allgemein ausdrücken wollte, und so in unzähligen Fällen. Ist aber in solchem Falle eine Regel über den unendlichen Fortgang und die Wiederholung der mit den bestimmenden Zahlen vorzunehmenden Rechnungsoperationen festgestellt, oder die Art der Abhängigkeit in eine gesetzmäßige unendliche Reihe entwickelt, und diese Reihe zugleich von der Art, daß sie den Zahlenwerth der abhängigen Größe um so genauer liefert, je mehr Glieder der Reihe man zusammenrechnet, und daß mithin die unvermeidliche Abweichung vom wahren Werth jede vorgeschriebene Grenze der Kleinheit übersteigen kann, so betrachtet man die Aufgabe, das Gesetz der Abhängigkeit zu bestimmen, als völlig gelöst. Man nennt nun auch einen solchen unvollendbaren Ausdruck, oder eine gesetzmäßige unendliche Reihe, eine Function der in ihr enthaltenen allgemeinen Zahlen, obgleich dabei nur eine unveränderliche und allgemein angebbare Weise des Fortgangs der Operationen, oder der beim Uebergang von einem Glied zum nächstfolgenden eintretenden Veränderungen der Operationen stattfindet, und nicht eine unveränderliche, ein für alle Mal gegebene Anzahl der Operationen.

§. 5.

Functionen Einer Veränderlichen.

Man kann sagen, daß in allen Fällen, in welchen das Gesetz der Abhängigkeit einer Größe von andern schon ge-

funden ist, dieses Gesetz sich immer in einer Function der bestimmenden Größen darstellen wird; sollen aber gewisse Eigenschaften der Größen erst gefunden oder aus gegebenen Functionen andere abgeleitet werden, dann ist, wie sich aus dem Folgenden bald ergeben wird, von höchster Wichtigkeit die Betrachtung der Veränderungen, welche der Werth einer Function dadurch erleidet, daß man Eine der in der Function enthaltenen allgemein ausgedrückten Zahlen sich verändern läßt, und ihr successive verschiedene Zahlenwerthe gibt. Wenn man nun entweder blos die durch eine bestimmte Veränderung einer in der Function enthaltenen allgemeinen Zahl hervorgehende Veränderung des Werthes der Function betrachtet, oder, was der häufigste Fall ist, die ganze Folge von Werthen im Auge hat, welche die Function durch successive Veränderung Einer ihrer allgemeinen Zahlen annimmt, so benennt man die Function nach der in ihr enthaltenen veränderlichen Zahl, und sie heißt dann im Allgemeinen Function Einer Veränderlichen. Wenn man z. B. in der Function $\sqrt{a(d-a)}$ der allgemeinen Zahlen a und d, die Zahl a der Reihe nach verschiedene Zahlenwerthe annehmen läßt, für d aber immer denselben Zahlenwerth beibehält, so wird der veränderliche Werth der Function eine gewisse Reihe von Werthen durchlaufen, die aber nun, bei einmal bestimmtem d, von dem jedesmaligen für a angenommenen Zahlenwerth allein abhängen, und deswegen schlechthin als eine Function der Veränderlichen a bezeichnet werden können. Setzte man etwa statt d die Zahl 6, statt a aber der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5: (größer als 6 darf in diesem Falle a nicht genommen werden, weil sonst die Wurzel und mithin auch der Werth der Function unmöglich wird), so wird die Function fünf Werthe annehmen. Wir wollen das Gesetz dieser Veränderungen der gegebenen Function räumlich veranschaulichen. Man stelle die Zahlenwerthe, welche a successive annimmt, als Fortschritte auf der Linie bl vom Punkte b aus dar, (Fig. 1) und zwar sei bc = 1

$bd = 2$ $be = 3$ ꝛc. Werden die Zahlenwerthe, welche die Function $\sqrt{a(6-a)}$ für $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$ ꝛc. gibt, als Linien von entsprechender Länge bezüglich auf die Längeneinheit bc verzeichnet, und in den Punkten c, d, e, ꝛc. als Senkrechte auf bi abgetragen, so fallen, wie aus den Elementen der Kreislehre bekannt, die Endpunkte dieser Senkrechten sämmtlich in die Peripherie eines Kreises, der um ah, oder eine Linie $= 6$, als seinen Durchmesser beschrieben ist. Denkt man sich die Zahl a stetig wachsend durch alle möglichen Zahlenwerthe von o bis 6, so werden die Werthe der Function eine stetige Folge von Linien, hier die Ordinaten des Kreises, darstellen, und durch ihre Endpunkte den gesetzmäßigen Verlauf einer Kreislinie vorschreiben.

Wenn bei Voraussetzung eines Kreises der Werth einer auf den Durchmesser gefällten Senkrechten durch die Größen, von denen er abhängt, nämlich durch den auf dem Durchmesser von einem Endpunkt desselben gebildeten Abschnitt a und den Durchmesser d ausgedrückt werden soll, so erscheint die dafür zu bildende Function, nämlich $\sqrt{a(d-a)}$ nur als eine Function der bestimmenden Größen a und d; wenn aber in dieser Function a als stetig Veränderliche gesetzt wird, so ist durch diese Function einer Veränderlichen der Kreis selbst, und zwar vermittelst seiner Ordinaten, gegeben, indem er nun durch das stetige Wachsen der Veränderlichen selbst erst erzeugt wird.

Hätte man in der Function $\sqrt{a(d-a)}$ die Zahl d als die Veränderliche und a als unveränderlich genommen, so würden die Veränderungen des Werthes der Function ein ganz anderes Gesetz befolgen. Für den Fall, daß d kleiner als a ist, ist dann zwar die Wurzel, und folglich der Werth der Function unmöglich; wenn aber die Zahl d von dem Zahlenwerth a an stetig wächst, so werden die Werthe der Function so wachsen, wie in Fig. 2 die Senkrechten auf die Linie bc, oder wie die Ordinaten der Pa-

rabel, und folglich durch diese Function mit der Veränderlichen d der Lauf der Parabel vorgezeichnet sein.

Auf diese Weise stellt jede Function, in welcher Einer ihrer allgemeinen Zahlenwerthe stetig veränderlich angenommen wird, durch ihre successiven Werthe selbst eine stetig veränderliche Größe vor, welche mit der in der Function enthaltenen veränderlichen Zahl ein gemeinschaftlich fortschreitendes Wachsen hat. Hierdurch tritt nun der Unterschied von constanten und veränderlichen Zahlen in der Function hervor, welcher in einer Function der bestimmenden Größen, die immer das abgeschlossene Gesetz der Abhängigkeit einer Größe von andern sie bestimmenden Größen ausdrückt, nicht bemerkt wird. Die Veränderliche ist als solche natürlich nur allgemein auszudrücken; wie viele und welche von den Constanten aber in absoluten Zahlen, und wie viele derselben in allgemein ausgedrückten Zahlen anzunehmen sind, das ist im Allgemeinen willkürlich, und hängt von der minderen oder größeren Allgemeinheit ab, welche man den Resultaten der Untersuchung zu geben beabsichtigt. Statt der allgemein ausgedrückten Constanten können so gut wie statt der Veränderlichen in einem bestimmten Einzelfall alle möglichen Zahlenwerthe in die Function gesetzt werden, nur daß die einmal angenommenen Zahlenwerthe der Constanten während des Wachsens der Veränderlichen als unverändert bleibend angesehen werden müssen. Die oben gegebene allgemeine Definition einer Function ist auch auf die Function einer Veränderlichen anwendbar, und wir nennen Function einer Veränderlichen einen jeden aus der veränderlichen Zahl und aus constanten Zahlen durch beliebige und beliebig viele Rechnungsoperationen zusammengesetzten Ausdruck. Man kann in einer Function auch mehr als eine der in ihr enthaltenen allgemeinen Zahlen veränderlich annehmen, und erhält dann Functionen von mehreren Veränderlichen. Da wir aber in dieser Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, welche nur eine Entwicklung der Grundbe-

griffe dieser Wissenschaft zum Zwecke hat, von solchen Functionen keinen Gebrauch machen werden, so können wir eine nähere Betrachtung derselben hier bei Seite lassen.

§. 6.

Unterscheidungskennzeichen der Veränderlichen und Constanten.

Es wird der Bequemlichkeit und Kürze der Darstellung sehr förderlich sein, und ausdrückliche Angaben überflüssig machen, wenn man bei jeder Function die unveränderlich gedachten Größen durch ein äußerliches Kennzeichen von der als veränderlich angenommenen zu unterscheiden weiß. Man ist in dieser Hinsicht übereingekommen, die veränderlichen Zahlen durch die letzten Buchstaben des Alphabets darzustellen, und die unbestimmt gelassenen Constanten durch die ersten oder mittleren. Demgemäß würde man die obige Function $\sqrt{a(d-a)}$, wenn man durch dieselbe die Ordinaten des Kreises ausdrücken, und also a als die Veränderliche ansehen wollte, schreiben $\sqrt{x(d-x)}$. Wollte man aber durch diese Function die Ordinaten der Parabel ausdrücken, und folglich die Zahl d als die Veränderliche betrachten, so würde man sie schreiben $\sqrt{a(x-a)}$. Ebenso würde x^m eine gleich hoch bleibende Potenz einer stetig wachsenden Zahl, und a^x eine stetig steigende Potenz einer unveränderlichen Zahl bedeuten.

Diese Vorschrift, die veränderlich zu denkenden Größen der Functionen durch die letzten Buchstaben des Alphabets auszudrücken, wird indessen doch nur in soweit allgemein befolgt, als man bei den Veränderlichen der Functionen nur Zahlen in abstracto, und nicht die Zahlenwerthe bestimmter Größen im Sinne hat, und die Function nur in Bezug auf ihre allgemeine arithmetische Zusammensetzung untersucht. Wenn aber unter den Veränderlichen der Functionen die fließenden Zahlenwerthe bestimmter Größen, wie Raum, Zeit, Geschwindigkeit und dergl. mehr gedacht werden, so zieht man es meistens vor, die in den

Functionen vorkommenden Veränderlichen zur leichteren Erinnerung an die hier gemeinte concrete Bedeutung derselben auszudrücken durch die Anfangsbuchstaben ihrer deutschen oder lateinischen Benennung. So stellt man den Zahlenwerth einer Geschwindigkeit durch c, den der Zeit durch t, den einer Raumlänge durch s vor, obgleich alle diese Zahlen als veränderliche in den Functionen erscheinen.

§. 7.

Functionen als Zusammensetzungen von Functionen.

Da nun eine Function einer veränderlichen Zahl x nichts weiter ist, als ein aus der Zahl x und andern constant gedachten Zahlen durch beliebige Rechnungsoperationen gebildeter Ausdruck, so versteht es sich von selbst, daß man verschiedene solche Ausdrücke, also verschiedene Functionen der Zahl x, unter sich wieder durch beliebige Rechnungsoperationen verbunden denken kann. Nun ist aber eine solche Verbindung vermöge des Begriffs der Function, welcher in Bezug auf die Weise der arithmetischen Zusammensetzung ein Begriff von unendlichem Umfang ist, selbst wieder eine Function der Zahl x; und es muß demnach gestattet sein, eine Function von x aus andern Functionen von x als ihren Bestandtheilen zusammengesetzt zu betrachten, und sie auch in andere Functionen als in ihre Bestandtheile zu zerlegen. In diesem Sinne wird es nichts Auffallendes oder Unverständliches haben, wenn man von einer Function von x spricht, welche die Summe oder das Product ꝛc. zweier oder mehrerer Functionen von x ist. So z. B. kann der Ausdruck $a x^3 + \frac{\sqrt{x}}{b}$, als ein Ganzes genommen, eine Function der veränderlichen Zahl x heißen, weil er nichts als gewisse mit der Zahl x und andern constanten Zahlen vorzunehmende Rechnungsoperationen enthält; da aber auch die einzelnen Ausdrücke $a x^3$ und $\frac{\sqrt{x}}{b}$ für sich wieder Functionen der Zahl x sind, so

kann man den ganzen Ausdruck eine solche Function von x nennen, welche die Summe zweier Functionen von x ist. Ebenso würde der Ausdruck $(a - x)\,(x^m - bx)$ eine solche Function der Zahl x heißen können, welche das Product zweier Functionen von x ist, und $\frac{\sqrt{1+x^2}}{ax+bx^3}$ eine Function von x, welche der Quotient zweier Functionen von x ist, und dergl. mehr.

Eine beliebige Function der Zahl x kann wieder gewissen Rechnungsoperationen unterworfen werden. Wären diese Operationen mit der Zahl x selbst vorgenommen worden, so hätten sie eine Function von x hervorgebracht; da sie aber jetzt mit einer Function von x vorgenommen werden, so kann man den erhaltenen Ausdruck als Function einer Function von x betrachten. Indem aber der ganze Ausdruck auch ebenso gut eine Function von x heißen kann, so wird man keine Schwierigkeit darin finden, wenn man sich eine solche Function von x denken soll, welche Function einer Function von x ist. Der Ausdruck $(ax - x^2)^m$ z. B. ist eine Function von x. Wäre die Erhebung zur m^{ten} Potenz für x selbst vorgeschrieben, so wäre x^m schon eine Function von x; da aber diese Potenzirung hier für den in Klammern stehenden Ausdruck, also für eine Function von x, vorgeschrieben ist, so kann der ganze Ausdruck als eine Function von x angesehen werden, welche Function einer Function von x ist. Wenn man ferner den Ausdruck $\log x$ nur als ein abgekürztes Zeichen für eine bestimmte unveränderliche Folge von Rechnungsoperationen ansieht, welche mit x und andern constanten Zahlen vorgenommen werden müssen, um aus der Zahl x den Logarithmus derselben zu berechnen, und der Ausdruck $\log x$, als Zeichen für diese Formel genommen, wohl eine Function von x heißen kann, so wird der Ausdruck $\log(ax - x^2)$ ebenfalls als eine Function von x betrachtet werden können, welche Function einer Function von x ist.

§. 8.

Allgemeine Functionsbezeichnungen.

Es ist nöthig, den höchst allgemeinen Begriff der Function einer Veränderlichen in derselben Allgemeinheit in die eigenthümliche Zeichensprache der Analysis, durch welche bekanntlich ein so großer Theil der Erfolge dieser Wissenschaft ermöglicht wird, aufzunehmen, und eine noch völlig unbestimmt gelassene ganz beliebige Function einer veränderlichen Zahl x durch ein kurzes Zeichen darzustellen. Man deutet dies dadurch an, daß man die Veränderliche x in Klammern einschließt, und einen der Buchstaben f, F, φ, ψ oder auch noch andere, wenn man deren benöthigt sein sollte, davor setzt, also durch die Zeichen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Durch verschiedene dem x vorgesetzte Buchstaben werden Functionen von x bezeichnet, welche zwar unter sich verschieden, übrigens aber absolut unbestimmt und willkürlich sind.

Dieselben Bezeichnungen sind dann auch brauchbar, um die verschiedenen Arten der Zusammensetzung einer Function aus andern Functionen allgemein darzustellen. So wird z. B. das Zeichen $f(x) + \varphi(x)$ eine Function von x bedeuten, welche die Summe zweier ganz beliebigen, aber unter sich verschiedenen Functionen von x ist, und das Zeichen $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ eine Function von x, welche der Quotient zweier verschiedenen, übrigens aber beliebigen Functionen von x ist, u. s. w. Um eine Function von x zu bezeichnen, welche Function einer Function von x ist, schließt man irgend ein allgemeines Functionszeichen in Klammern, und setzt noch einen zur Functionsbezeichnung dienenden Buchstaben davor, und schreibt etwa $\varphi[f(x)]$. Die vielfachen ähnlichen Zusammensetzungen dieser allgemeinen Functionszeichen bedürfen keiner weiteren Erklärung. Da der Begriff der Function nicht an den Begriff der Veränderlichkeit einer Größe gekettet ist, sondern allgemeinere Geltung hat, so kann, wie sich wohl von selbst versteht, durch

die so eben für Functionen einer Veränderlichen angegebene allgemeine Bezeichnung auch jede noch ganz unbestimmt gelassene Function einer allgemein ausgedrückten, aber unveränderlichen Zahl a dargestellt werden, die man durch f(a), F(a) und dergleichen bezeichnen würde.

§. 9.

Berichtigung gangbarer Erklärungen der Function.

Dieser zwar höchst allgemeine und abstracte, aber doch ganz einfache Begriff einer Function überhaupt, und einer Function einer Veränderlichen zeigt sich bei den Anfängern der Analysis nicht selten mit mancherlei Dunkelheiten und schiefen Nebenvorstellungen behaftet, und zwar, wie es uns scheint, nicht ganz ohne Schuld der üblichen und gangbaren Erklärungen dieses Begriffs. Wir wollen die Quellen dieser Dunkelheiten etwas näher angeben, indem sich dabei Gelegenheit bietet, diesen Begriff theils durch ausdrückliche Zurückweisung gangbarer falscher Erklärungen zu befestigen, theils gegen einige sich leicht anhängende Verunreinigungen noch mehr zu schützen. Eine erste Quelle von Ungenauigkeiten ist diese, daß man fast nirgends die Functionen der allgemein ausgedrückten, aber unveränderlich gedachten Größen, welche wir Functionen der bestimmenden Größen genannt haben, unterschieden findet von den Functionen der veränderlichen Größen, und daß man die Definition des Begriffs der Function gibt mit bloßer Bezugnahme auf die Functionen von Veränderlichen, und das Wort doch hernach auch in anderm Sinne gebraucht. Allerdings hat man bei der ersten Einführung des Wortes Function in die Analysis nur die Functionen von Veränderlichen im Sinne gehabt, und demgemäß die Erklärung gegeben; aber im Fortgange der Wissenschaft hat man den Begriff erweitert, ohne es gleichmäßig mit der Erklärung desselben zu thun. Man nennt ja doch allgemein die Formel, durch welche die Unbekannte in einer algebraischen Gleichung gegeben ist, eine Function der Coefficienten der

einzelnen Potenzen von x, und meint mit dem Worte Function also hier nur eine Function von allgemein ausgedrückten, aber keineswegs veränderlich gedachten Größen. Ebenso wenn man von einer beliebigen Function einer Constanten a spricht, und sie durch f(a) bezeichnet, so denkt man darunter das, was aus unserer obigen Definition einer Function folgt, nämlich irgend eine auf unveränderliche Weise arithmetisch zusammengesetzte Verbindung der unbestimmten Zahl a und anderer bestimmten Zahlen. Hierbei kann von keinem Unterschied der Constanten und Veränderlichen die Rede sein; und da die ganze Vorstellung von veränderlichen Größen zu diesem nun angenommenen erweiterten Begriffe der Function nicht nöthig ist, so darf sie auch nicht in die Erklärung desselben verwoben werden. In den Functionen der bestimmenden Größen hat man nur zu unterscheiden die unbestimmt gelassenen constanten Zahlen und die bestimmten oder absoluten Zahlen; in den Functionen einer Veränderlichen aber hat man zu unterscheiden die Veränderliche und die Constanten, welche Letzteren je nach der beabsichtigten größeren oder minderen Allgemeinheit der Resultate der Untersuchung bald mehr durch unbestimmte bald mehr durch bestimmte Zahlen auszudrücken sind.

Eine andere noch ergiebigere Quelle von Dunkelheiten und schiefen Nebenbedeutungen in dem Begriff der Function entspringt daraus, daß man sich bei dem Gebrauch dieses Wortes häufig einer sehr abgekürzten Sprechweise bedient, ohne den Sinn derselben vorher ausdrücklich anzugeben, oder auch wohl gar, was das Schlimmste ist, im Hinblick auf solche abgekürzte Ausdrucksweisen und den etwas ungenauen geläufigen Gebrauch dieses Wortes, die ganze Definition des Begriffes gleich daraus entnimmt. Eine solche abgekürzte Ausdrucksweise ist es offenbar, wenn man eine Größe, die von einer andern veränderlichen Größe abhängig ist, und deren jedesmaliger Zahlenwerth mithin durch irgend eine Function des veränderlichen Zah-

lenwerthes der bestimmenden Größe ausgedrückt werden kann, kurzweg selbst eine Function dieser letzteren Größe nennt. So sagt man z. B., die Ordinate einer krummen Linie ist eine Function der Abscisse. Es könnte dann fast scheinen, daß man bei dem Worte Function nicht gerade an gewisse unveränderliche arithmetische Operationen, die mit einem Zahlenwerth vorgenommen werden sollen, zu denken habe, sondern daß auch eine bestimmte Größe irgend einer Art, wie hier eine Linie, eine Function einer andern Größe heißen könne. Dies ist es nun freilich nicht, was man sagen will, indem man die Ordinate eine Function der Abscisse nennt, sondern man meint damit, daß es einen aus dem einem beliebigen Abscissenstück beizulegenden Zahlenwerth und aus andern constanten Zahlen arithmetisch zusammengesetzten Ausdruck gebe, welcher den Zahlenwerth der dieser Abscisse zugehörigen Ordinate darstellt. Statt also zu sagen, die Formel, durch welche allgemein der Zahlenwerth der Ordinate berechnet werden kann, ist eine Function derjenigen Zahl, welche die Länge der dieser Ordinate zugehörigen Abscisse angibt, sagt man kurzweg, die Ordinate ist eine Function der Abscisse. Diese abgekürzte Ausdrucksweise ist, sobald man sie nur in dem angegebenen Sinne nimmt, ganz unschädlich, und zur Vermeidung schwerfälliger Breite und verwirrender Weitschweifigkeit auch durchaus nöthig, und sie soll daher auch von unserer Darstellung nicht ausgeschlossen sein. Es sei daher ein für allemal bemerkt, daß so oft in dem Folgenden eine bestimmte Größe irgend einer Art kurzweg eine Function einer andern Größe genannt wird, dies in der angegebenen Weise zu deuten ist.

Nun haben aber viele Mathematiker, und unter diesen auch sehr namhafte, theils im Hinblick auf solche abgekürzte Ausdrucksweisen, theils aber auch noch hinschielend nach der Anwendung, welche von den Functionen gemacht wird, und die immer darin besteht, das Gesetz der Abhängigkeit einer Größe von anderen auszudrücken, sich ver-

leiten lassen, eine völlig unbrauchbare und allerwärts sinnstörende Definition der Function zu geben. So sagt z. B. Lacroix: „Jede Größe, deren Werth von einer oder mehrern Größen abhängt, heißt eine Function der Letzteren." Diese Definition könnte man höchstens als eine Erläuterung des Sinnes der üblichen abgekürzten und ungenauen Ausdrucksweise gelten lassen, und man muß schon wissen, was Function ist, und daß sie überhaupt etwas Anderes ist, wenn diese Erläuterung an ihrer Stelle sein soll. Als ursprüngliche Definition der Function genommen führt sie aber nur in die Irre. Denn nähme man diese Definition beim Worte, so würde man, da z. B. die Ordinate, die Fläche, die Krümmungsstärke ꝛc. einer Curve sämmtlich Größen sind, die von der Abscisse abhängen, ganz natürlich darauf verfallen, unter verschiedenen Functionen der veränderlichen Abscisse x diese Größen selbst vorzustellen, und von dem Wesentlichsten dabei, daß die Function eine Formel ist, ganz abzusehen. Die einfachsten Vorstellungen bei den Functionen, wie etwa eine Function von x, welche die Summe zweier verschiedenen Functionen von x ist, werden sogleich etwas völlig Sinnloses, wenn man, ohne alle sonstige Kenntniß von dem Wesen der Function, diese Definition streng nehmen wollte, und so wie dieselbe vorschreibt unter verschiedenen Functionen der Veränderlichen x sich bestimmte ihrem Werthe nach von x abhängige Größen, wie Linien, Flächen und dergl. mehr denken wollte.

Endlich wird auch noch dadurch nicht wenig Ungehöriges in den Begriff der Function gebracht, daß man in manchen Theilen der Elementarmathematik das Wort Function in Gebrauch nimmt auf einem Standpunkt der Untersuchung, bei welchem die wahre Bedeutung dieses Wortes entweder gar nicht bemerklich gemacht werden kann, oder sehr in den Hintergrund tritt, und man sich doch später bei der Einführung in die Analysis auf diese Fälle als schon bekannte Beispiele von Functionen bezieht. So nennt man in der Trigonometrie den Sinus oder Cosinus

eines Bogens Functionen dieses Bogens. Wenn man dabei aber als den Sinus oder Cosinus eines Bogens die diesem Bogen auf bekannte Weise zugehörige gerade Linie bezeichnet, oder näher die Zahl, welche die Länge dieser geraden Linie angibt für den Fall, daß der Radius des Kreises den Zahlenwerth 1 hat, so ist in beiden Fällen keine Spur mehr von der wahren Bedeutung des Wortes Function bemerklich. Diese Bedeutung tritt erst hervor, wenn man die Formel für die Berechnung des Sinus darstellt. Wenn die Zahl, welche die Länge eines Bogens angibt, (den Radius $= 1$ gesetzt) durch a vorgestellt wird, so ist der Sinus dieses Bogens bekanntlich durch folgende Formel berechenbar:

$$\sin a = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

Die Formel rechts vom Gleichheitszeichen, welche nach einem aus diesen wenigen Gliedern schon übersichtlichen Gesetze ins Unendliche fortschreitet, ist allerdings eine Function der die Bogenlänge angebenden Zahl a, nicht aber der Sinus, insofern man darunter den Zahlenwerth einer diesem Bogen zugehörigen geraden Linie versteht. Es ist freilich gestattet, sich unter dem Sinus eines Bogens kurzweg eine Zahl zu denken, aber der Ausdruck sin a als Function betrachtet, ist durchaus nur anzusehen als ein abgekürztes Zeichen für eine bestimmte Folge von Rechnungsoperationen, welche mit der Zahl a vorgenommen werden sollen. Es ist hieraus ersichtlich, daß man von dem Sinus jeder beliebigen bekannten und unbekannten Zahl sprechen kann, und in Untersuchungen, die mit dem Kreis direct gar nichts zu thun haben, weil alsdann unter dem Sinus nur eine bestimmte Folge mit dieser Zahl vorzunehmender Operationen verstanden wird. Ganz ebenso verhält es sich, wenn man den Logarithmus einer Zahl eine Function derselben nennt. Während man gewöhnt ist, sich unter dem Logarithmus einer Zahl überhaupt auch nur wieder eine Zahl zu denken, so hat man sich unter dem Logarithmus als

Function nur die ebenfalls als unendliche Reihe sich darstellende bekannte Formel, durch welche der Logarithmus einer Zahl berechnet wird, zu denken, und den Ausdruck log a durchaus nur als ein für diese Reihe geltendes abgekürztes Zeichen anzusehen.

Wenn man demnach bei der Erklärung des Wortes Function in der Analysis auf Sinus, Cosinus und Logarithmus als schon aus den Elementen bekannte Functionen hinweist, so ist dies schon deswegen nicht rathsam, weil gerade in diesen Beispielen der Begriff der Function sehr der Gefahr der Mißdeutung ausgesetzt ist, und sie als Functionen aus den Elementen nicht allzu bekannt sind. Wenn aber, wie oft geschieht, nur diese wenigen Functionen als solche angeführt werden, die schon bekannt sind, so geschieht dies nicht zufällig, und man sieht bald, daß es veranlaßt wird durch eine schielende Nebenbedeutung, welche die Verfasser selbst mit dem Begriffe der Function verbinden, nämlich daß eine Function nicht blos überhaupt eine beliebige Formel sei, sondern daß es wesentlich dazu gehöre, durch die Function das Gesetz der Abhängigkeit von Größen auszusprechen, die man schon auf anderem Wege als von einander abhängig erkannt hat, und daß also die Aufstellung einer Function zugleich die Lösung irgend einer Aufgabe enthalte; denn wie könnte man sonst einige Functionen als solche bezeichnen, die aus den Elementen schon bekannt wären, als wenn überhaupt nur eine bestimmte Anzahl von Functionen aus den Elementen bekannt sein könnte, und nicht schon unzählige Ausdrücke, wie ax, x^2, $\frac{1}{x}$ ꝛc. Beispiele genug von bekannten Functionen einer Veränderlichen bildeten.

Die hier gegebenen Erläuterungen und Berichtigungen des Begriffs der Function werden hinreichen, um sich Alles bei dem Gebrauch dieses Wortes Vorkommende gehörig zu rechte zu legen. Die Ausführlichkeit dieser Erläuterungen wird gerechtfertigt erscheinen, wenn man zugibt, daß

in vielen Schriften der Instinct der Anwendung dieses Begriffs besser ist als die Definition desselben, und daß Anfänger in der Analysis dadurch sehr leicht in die Irre geführt werden, weil sie es mit dem Wortsinn der Definitionen meist strenger und ängstlicher nehmen als die Verfasser selbst.

§. 10.

Willkürlich und abhängig Veränderliche.

In jeder Function einer Veränderlichen betrachtet man dem Obigen zu Folge entweder die Veränderungen, welche der Werth der Function durch Veränderung der in der Function veränderlich gesetzten Zahl erleidet, oder auch die ganze stetige Folge von veränderlichen Werthen der Function bei stetig gesetzter Veränderung dieser Zahl. Der Werth der in der Function enthaltenen Veränderlichen, und der Werth der ganzen Function selbst sind also zwei von einander abhängige veränderliche Größen. Man nennt die Erstere die willkürliche Veränderliche und die Zweite die abhängig Veränderliche. Obgleich durch den willkürlichen Zahlenwerth der Einen von diesen Größen der Zahlenwerth der Anderen völlig bestimmt ist bei vorausgesetzter Bestimmtheit der Constanten der Function, so nennt man doch blos die in der Function veränderlich gesetzte Zahl die willkürlich Veränderliche, weil aus dem Werth derselben, vermöge der gegebenen arithmetischen Zusammensetzung der Function, der Werth der ganzen Function unmittelbar berechnet werden kann, nicht aber umgekehrt. Drückt man den Werth der Function einer Veränderlichen, z. B. der Function $a x^2 + b x$ durch einen Buchstaben aus, der als Symbol einer veränderlichen Zahl gelten soll, und bildet die unbestimmte Gleichung $y = a x^2 + b x$, so nennt man natürlich auch y die abhängig Veränderliche und x die willkürlich Veränderliche. Liegen bestimmte continuirliche Größen vor, deren Abhängigkeit durch eine Function einer Veränderlichen dargestellt ist, oder auch erst dargestellt werden soll, so wendet man dieselben Benennungen

auch ohne Weiteres auf diese Größen an. Hat z. B. in einem rechtwinkligen Dreieck die eine Kathete den unveränderlichen Zahlenwerth 1, die andere den veränderlichen x, so hat die Hypotenuse den veränderlichen Zahlenwerth $\sqrt{1+x^2}$, und die Hypotenuse selbst heißt nun auch, da ihre Länge durch den Werth der Function repräsentirt ist, die abhängig Veränderliche, und die Kathete die willkürlich Veränderliche. Drückte man den Zahlenwerth der Hypotenuse durch y aus, und formte die Gleichung $y = \sqrt{1+x^2}$ um in die Gleichung $\sqrt{y^2-1} = x$, so würde jetzt die Hypotenuse die willkürlich Veränderliche heißen, weil nun die Kathete als Function der Hypotenuse gegeben ist. Ist aber auch die Function, welche das Gesetz der Abhängigkeit zweier bestimmten Größen ausdrückt, noch gar nicht bekannt, und ist nur gesagt, daß man sich die Eine durch eine Function der Andern ausgedrückt denken soll, so heißt die Letztere die willkürlich Veränderliche, und die Erstere die abhängig Veränderliche. So oft also in dem Folgenden das Gesetz der Abhängigkeit zweier veränderlichen Größen durch eine Function der Einen von ihnen gegeben ist, oder auch nur gesagt ist, welche von beiden als durch eine Function der Andern gegeben betrachtet werden soll, wird es einer ausdrücklichen Angabe dessen, was unter der Benennung der willkürlich Veränderlichen zu verstehen ist, nicht mehr bedürfen.

§. 11.

Gegenstand der Differential- und Integralrechnung im Allgemeinen.

Wir wenden uns nach diesen vorläufigen Worterklärungen näher unserm eigentlichen Gegenstand zu. Dieser ist kein anderer als die Aufstellung einer ganz allgemeinen Methode zur Auffindung der Gesetze der Abhängigkeit stetiger Größen. Die Vorstellung von Functionen einer Veränderlichen, durch welche das gemeinschaftlich fortschreitende stetige Wachsen zweier von einander abhängigen Größen repräsentirt und für Rechnungsoperationen zugänglich und

faßbar gemacht wird, ist fast unmittelbar geeignet, auf die Grundgedanken einer solchen allgemeinen Methode hinzuleiten. Denn man faßt in einer solchen Function die Größen eigentlich nicht blos als daseiend in einem bestimmten einzelnen fertigen Zustand auf, sondern als werdend durch gemeinschaftlich fortschreitendes stetiges Wachsen vom Nullzustand oder von einem andern bestimmten Größenzustand aus. Man begreift aber überall das Gewordene nur aus dem Proceß seines Werdens. Es wäre daher, um eine allgemein anwendbare Methode zur Auffindung der Gesetze der Abhängigkeit stetiger Größen zu erhalten, nur nöthig, daß man sich durch tiefere Auffassung der Natur des gemeinschaftlichen stetigen Wachsens in den innern Proceß des Werdens zu versetzen, und das Entstehen durch alle seine Momente des Werdens zu begleiten und zu verfolgen wüßte, und dann das durch Wachsen Gewordene, d. h. die wirklich erreichten Werthe der Größen, als Zusammenfassung der einzelnen Momente des Werdens begreifen lernte. Es wird also eine genauere Analyse des Begriffs eines gemeinschaftlichen und gesetzmäßig von einander abhängigen stetigen Wachsens der Größen unternommen werden müssen. Diese wird herauszustellen haben erstens, wie man bei wachsenden Größen sich bestimmte Begriffe bildet von der in einzelnen Momenten stattfindenden verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, welche doch offenbar, jenachdem mit einer gewissen Zunahme der einen Größe eine größere oder kleinere Zunahme der andern verbunden ist, selbst eine größere oder kleinere sein kann, zweitens, wie man diese verhältnißmäßige Stärke des Wachsens durch ihre einzelnen Momente verfolgen, und in einem allgemeinen Gesetz aussprechen kann, und dann drittens, wie man die im fortschreitenden Wachsen erreichten Werthe der veränderlichen Größen als Resultate dieses Wachsens der Größen und der in ihrem ganzen Verlauf sich kundgebenden verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens hervorgehen lassen kann. Diejenigen Untersuchungen nun, welche es

sich zur Aufgabe machen, theils die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der von einander abhängigen veränderlichen Größen festzustellen, theils aus dieser Stärke des Wachsens auf die Gesetze der Abhängigkeit der Größen selbst zu schließen, und mithin aus dem Fluß des Werdens und Entstehens das Gewordene zu begreifen, bilden den Gegenstand der Differential- und Integralrechnung. Wie viele und welche besonderen Eigenschaften der Größen auch in der Differential- und Integralrechnung sonst noch entwickelt werden mögen, so kommen sie in derselben doch nur insofern zur Sprache, als sie aus den Untersuchungen über die Natur des zusammen fortschreitenden stetigen Wachsens abgeleitet werden können, und mittelbar wenigstens Ausdruck irgend einer Bestimmung dieses allgemeinen Begriffs sind.

Wir erwarten nicht, daß das in diesem Paragraphen Gesagte schon in soweit verständlich sei, daß man daraus entnehmen könne, wie dieser Grundgedanke zur Ausführung und Anwendung komme, und sich von dem Wesen der Differential- und Integralrechnung darnach eine klare Anschauung machen könne; vielmehr bildet die vollständige Verdeutlichung und Durchführung dieses Grundgedankens, und die Nachweisung seiner Fruchtbarkeit den alleinigen weiteren Inhalt dieses Buches. Diese vorläufigen allgemeinen Andeutungen sind nur gegeben worden, um die nun folgenden Untersuchungen einzuleiten, und sie nicht als willkürlich und zufällig unternommen oder isolirt stehend, sondern als durch den Zweck und Zusammenhang des Ganzen bestimmt erscheinen zu lassen. Zugleich mögen sie dienen, einen ersten flüchtigen Blick auf die Naturgemäßheit und Schönheit des Ideenganges dieser Wissenschaft zu eröffnen, einer Wissenschaft, die es unternimmt, aus der scheinbaren Leerheit eines höchst allgemeinen und abstracten Begriffs eine unendliche Fülle des Reichthums von Erkenntnissen zu entwickeln, die in allen ihren Zweigen nur die von Innen herausgehende Entfaltung und

Ausbreitung eines einzigen Grundgedankens als ihres Keimes ist, und dadurch den hohen Adel ihrer Natur, den Adel der freien geistigen Productivität beurkundet.

§. 12.

Continuirliche und discrete Größen.

Die Differential- und Integralrechnung setzt bei ihren Untersuchungen über die Natur des von einander abhängigen Wachsens der veränderlichen Größen überall ein stetiges Wachsen derselben, und folglich überhaupt stetige veränderliche Größen voraus. Ohne die Voraussetzung des Stetigen im Wachsen der Größen, vermöge welcher nach jeder noch so kleinen angebbaren Größenveränderung unendlich viele Zwischenstufen des Größenzustandes durchlaufen sind, würde der Begriff des von einander abhängigen Wachsens ein bald abzufertigender und sehr unfruchtbarer sein. Der Unterschied der stetigen und discreten Größen beruht einzig auf der verschiedenen Art ihres Wachsens. Wenn eine stetige Größe, z. B. eine Linie, um irgend ein wenn auch noch so kleines Stück gewachsen ist, so sind nach dem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern unendlich viele Zwischenstufen des Größenzustandes der Linie factisch durchlaufen worden; wenn aber eine Zahl wachsend gedacht wird, und sie auch um noch so kleine Theile der Einheit successive wächst, so sind doch bei dem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern alle möglichen Zwischenstufen dieser Größenzustände nothwendig übersprungen worden. Das Wachsen der Zahlen ist immer ein successives Zusetzen von Einheiten irgend einer Art, die in dieser Hinsicht als letzte Theile, gewissermaßen als Atome erscheinen, und der Act des Zählens kann als ein Denkact die Unendlichkeit von möglichen Größenzuständen nicht erschöpfen und factisch durchlaufen, sondern nur postuliren oder supponiren. Das Wachsen der stetigen Größen ist ein Anschauungsact, das Wachsen der discreten ein Denkact. Das Erstere enthält eine reale und factische Unendlichkeit,

das Zweite immer nur eine supponirte. Wenn man demnach sagt, daß man sich eine in einer Function enthaltene Zahl stetig wachsend denken soll, so ist damit gemeint, daß man sich vielmehr ein wachsendes Continuum denken soll, dessen successiven Größenzustände alle möglichen Zahlenwerthe durchlaufen, und bei dessen Wachsen nicht blos alle zwischen gewissen Grenzen liegende aussprechlichen oder rationalen Zahlenwerthe, sondern auch alle unaussprechlichen oder irrationalen Zahlenwerthe wirklich durchlaufen werden. So wie man für die veränderliche Zahl als solche ein Wachsen eintreten läßt, hat man natürlich gerade das Gegentheil des stetigen Wachsens.

Dieser Unterschied einer realen Unendlichkeit in dem Stetigen, und einer unerreichbaren blos supponirten Unendlichkeit in dem Discreten ist für Inhalt und Methode unserer Wissenschaft von großer Wichtigkeit. Es ist schon aus den Elementen der Geometrie bekannt, daß Verhältnisse, welche durch Zahlen absolut unerreichbar und unaussprechlich sind, in dem Stetigen objectiv realisirt sind. Das Verhältniß $1 : \sqrt{2}$ ist, insofern es in Zahlen ausgesprochen, d. h. überhaupt gedacht und vorgestellt werden soll, sich selbst widersprechend, und durch keine noch so weit getriebene Annäherung erreichbar. Nichtsdestoweniger ist dieses für das Denken unerreichbare und widersprechende Größenverhältniß für die Anschauung, also auf dem Gebiet des Stetigen, in völliger Abgeschlossenheit und Vollendung objectiv vorhanden, indem z. B. in einem Quadrate die Seite desselben zur Diagonale sich verhält wie 1 zu $\sqrt{2}$. Ohne Beziehung auf das Stetige hätten die irrationalen Zahlen gar keine objective Wahrheit und Bedeutung. Wenn man also sieht, daß die im Denken unfaßbaren Verhältnisse in der Anschauung wirklich sein können, und wenn man überhaupt das, was undenkbar ist, das Unmögliche nennen will, so muß man sagen, daß in dem Stetigen das Unmögliche wirklich ist.

Aehnliches wie bei diesen Verhältnissen des Stetigen

zeigt sich auch bei dem Begriff des stetigen Wachsens. Wir werden bald sehen, daß der wichtige Begriff der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, insofern dieselbe eine veränderliche sein soll, in den wachsenden stetigen Größen seine einzige objective Wahrheit und Realität hat; und ohne diese Unterlage der Anschauung des Stetigen für wachsende discrete Größen bedeutungslos wäre. Die Differential- und Integralrechnung hat es mit diesen specifischen Gesetzen des Stetigen zu thun, und zwar indem sie lehrt, wie die innere fließende Unendlichkeit des Stetigen dem Calcül zu unterwerfen und durch Formeln zu bannen ist, welche in Betracht der sonst ganz ungänglichen Natur des Stetigen als wahre Zauberformeln erscheinen. Man wird hiernach schon an dieser Stelle einsehen können, warum die Differential- und Integralrechnung, welche diese reale Unendlichkeit des Stetigen in analytische Formeln zu fassen unternimmt, auch Analysis des Unendlichen heißt.

Diese Bemerkungen glaubten wir voraus schicken zu müssen zur Rechtfertigung des Ganges, den man in der Entwickelung der Grundbegriffe dieser Wissenschaft hier eingeschlagen sieht, an welchem es sonst wohl auffallen dürfte, daß wir nicht von Functionen und von einem Wachsen der darin veränderlich gesetzten Zahl ausgehen, denn in diesem Fall entzieht man den Grundvorstellungen der Differential- und Integralrechnung ihren eigentlichen Nerv, sondern überall von der Anschauung und von dem Wachsen bestimmter continuirlicher Größen, von welchem dann zu den Functionen zurückgegangen wird.

§. 13.

Das Abnehmen und Zunehmen zusammen unter dem Begriff des Wachsens.

Bei zweien von einander abhängigen veränderlichen Größen wird in allen Fällen mit einer Veränderung der Einen eine Veränderung der Andern verbunden sein. Diese zusammengehörigen Veränderungen zweier Größen können nun im Allgemeinen nur darin bestehen, daß entweder mit

dem Wachsen der Einen auch ein Wachsen der Andern, oder mit dem Wachsen der Einen ein Abnehmen der Andern, oder endlich mit dem Wachsen der Einen abwechselnd bald ein Wachsen bald ein Abnehmen der Andern verbunden ist. Wird z. B. in der Parabel (Fig. 2) die Axe bc zur Abscissenlinie genommen, so ist mit dem Wachsen der Abscisse ein ohne Ende fortgehendes Wachsen der Ordinate verbunden; wird aber in dem Kreise (Fig. 1) der Radius eh als Abscisse genommen und deren Anfangspunkt in den Mittelpunkt e des Kreises verlegt, so ist mit dem Wachsen der Abscisse ein fortwährendes Abnehmen der Ordinate verbunden; und wird endlich der Durchmesser bh des Kreises zur Abscisse genommen, und ihr Anfangspunkt in den Punkt b der Peripherie verlegt, so ist anfangs mit dem Wachsen der Abscisse bis zur Mitte des Kreises ein Wachsen der Ordinate, und dann mit dem weiteren Wachsen der Abscisse ein Abnehmen der Ordinate verbunden. Wenn nun gleich bei zwei veränderlichen Größen mit einer Zunahme der Einen im Allgemeinen eben sowohl eine Zunahme als eine Abnahme der Andern verbunden sein kann, so ist es doch gestattet, zwei zusammengehörige Veränderungen derselben immer als zwei Zunahmen zu bezeichnen, indem die Abnahme als negative Zunahme gedacht, und unter den allgemeinen Begriff der Zunahme subsumirt werden kann. In diesem Sinne ist es also zu nehmen, wenn in dem Folgenden auch bei ganz allgemeinen Betrachtungen über die Natur und die Gesetze des gemeinschaftlichen Wachsens der Kürze wegen immer nur von zusammengehörigen Zunahmen der veränderlichen Größen die Rede ist.

§. 14.

In Betreff der Art und Weise des gemeinschaftlichen Wachsens der von einander abhängigen Größen finden wir nun einen zwar sehr einfachen aber für das Folgende höchst wichtigen Unterschied, der zuerst hervorgehoben werden muß.

Gleichmäßig und ungleichmäßig wachsende Größen.

Das Wachſen der von einander abhängigen Größen kann im Allgemeinen nur von doppelter Art ſein, nämlich entweder ſo, daß mit gleichen Zunahmen der einen Größe immer auch gleiche Zunahmen der andern verbunden ſind, oder ſo, daß mit gleichen Zunahmen der einen Größe immer und durchaus ungleiche Zunahmen der andern verbunden ſind. Im erſten Fall wollen wir die Größen gleichmäßig wachſende, und im zweiten ungleichmäßig wachſende nennen. Wenn die Linie ae (Fig. 3) die Abſciſſe, und die Senkrechten auf derſelben die Ordinaten einer geraden Linie ak ſind, ſo ſind bekanntlich mit den gleichen Zunahmen bc, cd, de der Abſciſſe gleiche Zunahmen gm, hn, ko der Ordinate verbunden, und Abſciſſe und Ordinate der geraden Linie zwei gleichmäßig wachſende Größen. Ebenſo werden die Abſciſſe ae und die durch ihre Parallelordinaten vorgezeichnete gerade Linie ak zwei gleichmäßig wachſende Größen ſein. Denkt man ſich in einem Parallelogramm (Fig. 4) die eine Seite ab wachſend durch lauter gleiche Zunahmen bc, cd, de, die Nachbarſeite des Parallelogramms af aber unveränderlich, ſo ſind mit gleichen Zunahmen der veränderlichen Seite des Parallelogramms auch gleiche Zunahmen der Fläche deſſelben verbunden, alſo Seite und Fläche hier gleichmäßig wachſende Größen. Oder wenn man auf der Peripherie eines Kreiſes (Fig. 5) gleiche Fortſchritte ab, bc, cd nimmt, ſo ſind auch die Richtungsunterſchiede der durch die Punkte a, b, c, d gehenden Tangenten gleich, und mithin ſind auch mit gleichen Zunahmen der Länge der Kreislinie gleiche Zunahmen der Drehung ihrer Tangenten aus einer gewiſſen Anfangsrichtung ae verbunden, und alſo ſind hier Länge und Drehung aus einer Anfangsrichtung gleichmäßig wachſende Größen. Ebenſo bieten Zeit und Raum bei gleichbleibender Geſchwindigkeit ein Beiſpiel von gleichmäßig wachſenden Größen dar, da mit gleichen Zunahmen der Zeitdauer der Bewegung auch gleiche Zunahmen des durchlaufenen Raumes verbunden ſind.

Ein sehr einfaches und recht anschauliches Beispiel von ungleichmäßig wachsenden Größen bieten die Coordinaten einer krummen Linie ak (Fig. 6) dar, indem hier mit gleichen Zunahmen bc, cd, de der Abscisse immer ungleiche Zunahmen gm, hn, ko der Ordinate verbunden sind. Da die Coordinaten einer geraden Linie nicht blos gleichmäßig wachsende Größen sind, sondern auch umgekehrt, sobald die Coordinaten gleichmäßig wachsend sind, der durch dieselben vorgeschriebene Zug in der Ebene immer eine gerade Linie ist, so folgt, daß die Coordinaten jeder denkbaren krummen Linie ungleichmäßig wachsende Größen sind. Es ist nöthig, den Begriff des ungleichmäßigen Wachsens in aller Strenge zu nehmen, nämlich so, daß mit allen auch beliebig kleinen gleichen Zunahmen der einen Größe immer und durchaus ungleiche Zunahmen der andern Größe verbunden sind, so daß die Größen auch nicht innerhalb der kleinsten denkbaren Strecke gleichmäßig wachsend sind. Daß es sich mit den Coordinaten einer krummen Linie so verhält, ist leicht einzusehen. Man denke sich das Stück bc (Fig. 6) der Abscisse in eine beliebig große Anzahl gleicher Theile getheilt, die man als die gleichen Zunahmen der Abscisse betrachtet. Daß mit diesen gleichen Zunahmen der Abscisse lauter ungleiche Zunahmen der Ordinate verbunden sind, folgt nothwendig, weil sonst die innerhalb einer beliebig kleinen Strecke stattfindende Gleichheit der Zunahmen der Ordinaten darauf führen würde, daß der innerhalb dieser kleinen Strecke durch die Coordinaten vorgezeichnete Zug eine kleine gerade Linie, und mithin die ganze Linie aus kleinen Graden zusammengesetzt wäre, welches der Voraussetzung, daß sie überhaupt eine krumme ist, widerstreitet. Auf diese Weise sind die ungleichmäßig wachsenden Größen überall von dem gleichmäßig wachsenden absolut geschieden, und können nicht als eine äußerliche Zusammensetzung von gleichmäßig wachsenden angesehen werden. Daß auch die Abscisse der krummen Linie und die krumme Linie selbst ein Beispiel von

ungleichmäßig wachsenden Größen darbieten, ist leicht daraus zu entnehmen, daß, wie oben bemerkt, jede durch Parallelcoordinaten vorgeschriebene mit ihrer Abscisse gleichmäßig wachsende Linie nothwendig eine Gerade ist.

§. 15.

Constanter Differenzquotient der gleichmäßig Wachsenden.

Wenn nun gleich die ungleichmäßig wachsenden Größen nicht als eine äußerliche Zusammensetzung der gleichmäßig wachsenden begriffen werden; und die Letzteren niemals als Bestandtheile der Ersteren erscheinen können, so sind doch die Gesetze des Wachsens der gleichmäßig wachsenden Größen als Erkenntnißgründe in denen der ungleichmäßig wachsenden enthalten, und jede Einsicht in die Art des Wachsens der Letzteren ist basirt auf die Bestimmungen des Wachsens der Ersteren. Die gleichmäßig wachsenden sind daher zuerst einer Betrachtung zu unterwerfen, indem nachzuweisen ist, wie man sich einen Begriff von der bestimmten Stärke ihres Wachsens zu bilden hat, und wie man dieselbe in einen für die Zwecke des Rechnens bequemen Ausdruck fassen kann.

Aus der für gleichmäßig wachsende Größen gegebenen Definition folgt unmittelbar, daß die Zahlenwerthe zweier zusammengehöriger Zunahmen solcher Größen immer dasselbe Verhältniß unter einander haben, wie groß und wie klein auch die Zunahme der willkürlich veränderlichen Größe angenommen wird; denn man kann jede zwei zusammengehörige beliebige Zunahmen betrachten als Gleichvielfache oder als gleichvielte Theile zweier anfangs gesetzten zusammengehörigen Zunahmen, und sie werden daher auch sich unter einander ebenso verhalten, wie die anfangs gesetzten Zunahmen. Dividirt man demnach den Zahlenwerth einer Zunahme der einen Größe durch den Zahlenwerth der zugehörigen Zunahme der andern, so wird man eine constante Zahl als Quotient erhalten, welches auch diese zusammengehörigen Zunahmen seien. Bezeichnen wir den

Zahlenwerth der willkürlich veränderlichen Größe durch x, den der abhängig veränderlichen durch y, und eine beliebige Zunahme der Zahl x, da sie den Unterschied eines nachfolgenden Größenzustandes von dem vorhergehenden, also eine Differenz, angibt, durch Δx, und die zugehörige Zunahme der Zahl y durch Δy, so wird bei jeden zwei bestimmten gleichmäßig wachsenden Größen $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ sein. Durch die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ oder durch die Beständigkeit des Differenzquotienten zweier veränderlichen Größen ist also die Weise des gleichmäßigen Wachsens allgemein bezeichnet.

Es ist räthlich, sich den Sinn dieses allgemeinen Differenzquotienten noch durch einige Beispiele zu erläutern. Ist z. B. eine gleichförmige Geschwindigkeit so groß, daß in Einer Secunde 20 Fuß zurückgelegt werden, so ist, die Zeit in Secunden und den Raum in Fußen ausgedrückt, mit einer Zunahme des Zahlenwerthes der Zeit $= 1$ eine Zunahme des Zahlenwerthes des Raumes $= 20$ verbunden, der Quotient dieser Zunahmen also gleich 20. Für eine andere Zunahme der Zeit z. B. $\frac{1}{4}$ Secunde, wächst der Raum um 4 Fuß, und der Quotient beider ist wieder 20 ꝛc. Wenn s den Zahlenwerth des bei solcher Bewegung zurückgelegten Raumes in Fußen, und t den Zahlenwerth der dazu gebrauchten Zeit in Secunden ausdrückt, so würde also in diesem Falle allgemein $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 20$ sein. Eine Gleichung der Art $\frac{\Delta s}{\Delta t} = a$ ist also Ausdruck einer gleichförmigen Geschwindigkeit, und muß bei Voraussetzung der eben gebrauchten Maßeinheiten von Raum und Zeit so ausgesprochen werden: Die Geschwindigkeit ist so groß, daß in Einer Secunde a Fuß zurückgelegt werden. Oder man betrachte ein Parallelogramm mit einer veränderlichen und einer constanten Seite, wobei, wie oben schon angegeben,

die veränderliche Seite und der Flächeninhalt gleichmäßig wachſende Größen ſind. Iſt z. B. in dem Parallelogramm Fig. 4 die unveränderliche Seite $af = 3$ Fuß, ſo wird, wenn die veränderliche Seite um $bc = 1$ Fuß wächſt, die Fläche um 3 Quadratfuß wachſen, und überhaupt der Zahlenwerth einer beliebigen Zunahme der Fläche in Quadratfußen dreimal ſo groß ſein als der Zahlenwerth der zugehörigen Zunahme der Seite in Längenfußen. Heißt die Anzahl Fuße der veränderlichen Seite x, und die Anzahl der Quadratfuße der Fläche des Parallelogramms F, ſo wird alſo in dieſem Falle allgemein $\frac{\Delta F}{\Delta x} = 3$ ſein. Unter derſelben Vorausſetzung in Bezug auf die zu Grunde gelegte Längeneinheit und die Bedeutung der Buchſtaben F und x, würde der Ausdruck $\frac{\Delta F}{\Delta x} = a$ ein Parallelogramm bezeichnen, in welchem der Flächeninhalt um a Quadratfuße wächſt, wenn die veränderliche Seite um 1 Fuß wächſt.

In der allgemeinen für alle gleichmäßig wachſende Größen geltenden Gleichung, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, in welcher x die willkürlich veränderliche Zahl bezeichnen ſoll, kann die Zahl Δx, da ſie willkürlich iſt, auch den Zahlenwerth 1 annehmen. Unter dieſer Vorausſetzung wird $\frac{\Delta y}{1}$ oder $\Delta y = a$, und die Zahl a, als der Werth des Differenzquotienten, iſt alsdann dem Zahlenwerth der Zunahme der abhängig veränderlichen Größe ſelbſt gleich. Man kann daher bei jeden zwei beſtimmten gleichmäßig wachſenden ſtetigen Größen den Sinn des conſtanten Differenzquotienten auf eine anſchauliche Weiſe ſo ausſprechen: **Der Differenzquotient gibt allgemein an, um wie viel Einheiten ihrer Art die abhängig veränderliche Größe wächſt, wenn die willkürlich veränderliche um die Zahl 1 wächſt.**

Dieſe über den Sinn des Differenzquotienten gleich-

mäßig wachsender Größen hier gegebenen Erläuterungen sind so einfach, daß man sich fast versucht fühlen könnte, den Leser wegen ihrer Einschaltung um Verzeihung zu bitten, wenn es nicht gewiß wäre, daß ein nicht unbeträchtlicher Theil der Schwierigkeiten und Dunkelheiten, welche Anfänger oft in der Differential- und Integralrechnung finden, einzig und allein dadurch entsteht, daß man es versäumt hat, den Werth des Quotienten zusammengehöriger Zunahmen ausdrücklich in Worte zu übersetzen, und demselben anschauliche Vorstellungen unterzulegen.

§. 16.

Negative Differenzquotienten.

Es ist schon oben (§. 13.) angemerkt worden, daß bei den in Abhängigkeit von einander wachsenden Größen sowohl mit dem Wachsen der Einen ein Wachsen der Andern, als auch mit dem Wachsen der Einen ein Abnehmen der Andern verbunden sein kann. Die Coordinaten der geraden Linie fe (Fig. 7) geben ein Beispiel von gleichmäßig wachsenden Größen der letzteren Art. Denn denkt man die Abscisse ae vom Punkt a nach dem Punkt e hin wachsend, so sind mit gleichen Zunahmen ab, bc, cd der Abscisse gleiche Abnahmen lg, kh, mi der Ordinate verbunden. Die zusammengehörigen Veränderungen der Größenzustände zweier veränderlichen Größen x und y haben wir durch Δx und Δy bezeichnet. Ein solches Zeichen bedeutet an sich nur die Differenz oder den Unterschied zweier Größenwerthe. In dem Begriff des Unterschiedes liegt es aber nicht, welchen von zwei Werthen man von dem andern abgezogen denken soll. Bei wachsenden Größen insbesondere wird der Unterschied zweier Größenzustände erhalten, sowohl wenn man den vorhergehenden von dem nachfolgenden abzieht, als auch wenn man umgekehrt verfährt. Es ist nöthig, den Zeichen Δx und Δy in dieser Hinsicht immer dieselbe Bedeutung unterzulegen. Man nimmt allgemein an, daß Δx und Δy immer die Unter-

schiede bezeichnen, welche herauskommen, wenn man den vorhergehenden Größenzustand von dem nachfolgenden abzieht, vorausgesetzt, daß die willkürlich Veränderliche im wirklich wachsenden Vorschreiten begriffen ist. Wird x als die willkürlich Veränderliche wirklich wachsend gedacht, so ist der vorhergehende Zahlenwerth derselben kleiner als der folgende, und der Zahlenwerth von Δx dann immer positiv. Ist nun mit dem Wachsen der willkürlich Veränderlichen x auch ein Wachsen der abhängig Veränderlichen y verbunden, so wird der nachfolgende Zahlenwerth von y größer sein als der vorhergehende, und mithin der Zahlenwerth von Δy auch positiv sein. In diesem Falle ist also der Zahlenwerth des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv. Ist aber mit dem Wachsen von x ein Abnehmen von y verbunden, so ist der vorhergehende Zahlenwerth von y größer als der nachfolgende und folglich Δy eine negative Zahl. Mithin ist in diesem Falle der Zahlenwerth des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ. Bei wachsender willkürlich Veränderlichen deutet also ein positiver Differenzquotient auf ein Wachsen der abhängig Veränderlichen, und ein negativer auf ein Abnehmen derselben.

Es könnte freilich Jemand auch die Abnahme, welche y mit wachsendem x erfährt, positiv ansehen, denn eine Abnahme hat an sich natürlich ebenso wenig mit negativen Zahlen etwas zu schaffen, als eine Zunahme mit positiven, und der Ausdruck für die Veränderung von y, nämlich Δy, wird bei einer Abnahme eine negative Zahl und bei einer Zunahme eine positive einzig und allein dadurch, daß ich ihn durch die vorher angegebene Abziehung gebildet denke. Wollte man das Δy durch die umgekehrte Abziehung entstanden denken, oder was dasselbe ist, die Abnahme positiv setzen, so würde die eben aufgestellte Regel, nach welcher aus dem Vorzeichen des Differenzquotienten das Wachsen und Abnehmen beurtheilt wird, ungültig

werden; aber die Unveränderlichkeit der Bedeutung solcher allgemeinen Zeichen, wie hier der Zeichen Δx und Δy in Bezug auf ihre Entstehung durch Abziehen eines vorhergehenden Größenzustandes von dem nachfolgenden, ist für die Analysis von Wichtigkeit, und bildet einen Hauptvorzug der allgemeinen analytischen Zeichensprache, indem es dadurch möglich gemacht wird, die Untersuchungen allgemein zu führen, unbekümmert um die besonderen Fälle, und doch aus dem Resultat die Besonderheit des Falles herauszulesen, und Formeln zu erhalten, welche sich durch die Wandelung ihrer Werthe den möglichen Besonderheiten von selbst anschmiegen.

Die Coordinaten der geraden Linie ke (Fig. 7) bieten wie vorher bemerkt, ein Beispiel von gleichmäßig wachsenden Größen, bei welchen mit dem Wachsen der Abscisse x ein Abnehmen der Ordinate y verbunden ist. Ist nun gl dreimal so klein als lh oder ab, so ist überhaupt der negative Zahlenwerth eines beliebigen Δy dreimal so klein als der positive des zugehörigen Δx, und mithin allgemein $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{3}$. Hierdurch ist die Weise des Wachsens dieser Linien vollkommen bezeichnet; wäre eine Gleichung der Art gegeben, so wäre sie nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphen so auszusprechen: Wenn der Zahlenwerth der Abscisse um die Einheit wächst, so nimmt der der Ordinate um $\frac{1}{3}$ ab. Ein anderes einfaches Beispiel von gleichmäßig wachsenden Größen dieser Art bietet die Bewegung eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers. Wird bei dieser Bewegung von zufälligen äußeren Hindernissen und von den unbedeutenden Veränderungen der Anziehungskraft abgesehen, so sind die Geschwindigkeit und die Zeit gleichmäßig wachsende Größen, weil mit gleichen Zunahmen der Zeit gleiche Abnahmen der Geschwindigkeit verbunden sind. Eine bestimmte Größe der Geschwindigkeit wird kurzweg bezeichnet durch den Raum, der vermöge dieser Geschwindigkeit in der Zeiteinheit zurück-

gelegt wird. Die Geschwindigkeit eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers verändert sich bekanntlich so, daß der Raum, welcher die Geschwindigkeit für die Secunde als Zeiteinheit angibt, um 30 Fuß kleiner wird, so oft die Zeit um 1 Secunde wächst. Bedeutet also c die veränderliche Geschwindigkeit, so ist Δc eine negative Zahl; und wenn t die Zeit bedeutet, nach Secunden gezählt, so ist hier allgemein $\frac{\Delta c}{\Delta t} = -30$, und das Gesetz des gleichmäßigen Wachsens von Zeit und Geschwindigkeit durch diese Gleichung, deren Uebersetzung in Worte im Vorhergehenden schon enthalten ist, vollkommen ausgesprochen.

§. 17.

Verhältnißmäßige Stärke des Wachsens.

Der Differenzquotient zweier gleichmäßig wachsenden Größen liefert eine quantitative Bestimmung über das Wachsen derselben, und diese ist es, welche wir die Stärke des Wachsens nennen wollen. Wenn man von der Stärke des Wachsens der Größen spricht, so kann man dies in zwiefachem Sinne nehmen. Man kann entweder einer einzelnen wachsend gedachten Größe für sich allein eine Stärke des Wachsens beilegen, oder die Stärke des Wachsens als einen bloßen Verhältnißbegriff betrachten, und nur an ein verhältnißmäßiges Wachsen dabei denken, ohne diesem Begriff eine Anwendbarkeit auf eine einzelne Größe für sich zu gestatten. Indem man dem Wachsen Einer veränderlichen Größe, sei es der veränderlichen Zahl in einer Function oder des Zahlenwerthes der Function selbst, eine Stärke oder einen gewissen Grad, gleichsam eine Geschwindigkeit des Wachsthums beilegt, so denkt man sich die veränderliche Zahl immer unter dem Bilde einer wachsenden Linie, bei welcher der die Linie beschreibende Punkt mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortrückt. Es fällt mithin die Stärke des Wachsens für Eine Größe allein gedacht nothwendig mit dem Begriff der Geschwindigkeit zu-

sammen, und die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier von einander abhängigen veränderlichen Größen wird eine Vergleichung von Geschwindigkeiten des Wachsens. Newton ging, weil er den einzelnen Größen für sich eine Stärke des Wachsens beizulegen für rathsam hielt, bei der Darstellung unserer Wissenschaft von dem Begriff der Geschwindigkeit aus. Indessen kommt es bei veränderlichen von einander abhängigen Größen natürlich niemals auf die für Eine derselben supponirte Geschwindigkeit ihres Wachsens an, sondern immer nur auf das verhältnißmäßige Wachsen derselben. Und obgleich die Vorstellung bestimmter Geschwindigkeiten, mit denen das Wachsen der Größen sich vollzieht, etwas sehr Anschauliches hat, und insbesondere der dabei so wesentliche Begriff der Stetigkeit des Wachsens unverlierbar fixirt wird, so zeigt sich doch die fortwährende Unterlegung von bestimmten Geschwindigkeiten bei weiterem Fortgange der Entwickelung der Leichtigkeit der Auffassung eher hinderlich als förderlich. Wir wollen daher überall nur an ein verhältnißmäßiges Wachsen und an das Verhältniß zusammengehöriger Zunahmen denken, wenn von einer Stärke des Wachsens die Rede ist. Diese Stärke des Wachsens als bloßer Verhältnißbegriff wird dann, jenachdem man diesen Begriff auf Eine wachsende Größe angewandt denken will oder nicht, nach Belieben entweder eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens oder eine Stärke des verhältnißmäßigen Wachsens heißen können.

Da man nun von dieser verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens sich natürlich nur dadurch einen Begriff verschaffen kann, daß man zusammengehörige Zunahmen beider Größen vergleicht, und zusieht, wie vielmal die eine so groß ist als die andere, und da ferner diese Vergleichung hierzu nur tauglich sein kann, wenn das Verhältniß der Zunahmen von der zufälligen Größe derselben unabhängig ist, und der Differenzquotient bei allen beliebigen zusammengehörigen Zunahmen constant ist, so sieht man, da

dies bei gleichmäßig wachsenden Größen der Fall ist, daß man bei denselben durch den constanten Differenzquotienten unmittelbar eine Vorstellung und ein Maß der constanten verhältnißmäßigen Stärke ihres Wachsens hat. Weil die Bedingung, daß das Verhältniß der Zunahmen von der Größe derselben unabhängig ist, nur bei gleichmäßig wachsenden Größen erfüllt ist, bei ungleichmäßig wachsenden aber, wie leicht zu denken, das Gegentheil stattfindet, so ist einleuchtend, daß überhaupt nur gleichmäßig wachsende Größen mit constanter Stärke ihres Wachsens unmittelbar eine Vorstellung von der Stärke des Wachsens liefern können, und daß man bei ungleichmäßig wachsenden Größen mit veränderlicher Stärke des Wachsens von der in einzelnen Momenten vorhandenen Stärke des Wachsens nur dadurch wird eine Vorstellung erhalten können, daß man sie auf gleichmäßig wachsende zurückführt, oder daß die momentane Stärke des Wachsens als identisch erkannt wird mit der constanten Stärke des Wachsens zweier gleichmäßig wachsenden Größen.

§. 18.

Allg. Function der gleichmäßig Wachsenden.

Es ist schon oben als der Zweck der Analyse des von einander abhängigen Wachsens hingestellt worden, nicht blos die Stärke des Wachsens der veränderlichen Größen zu bestimmen, sondern auch die durch gemeinschaftliches Wachsen erreichten zusammengehörigen Werthe derselben als Resultate aus der Stärke des Wachsens hervorgehen zu lassen, was so viel heißt als aus dem die Stärke des Wachsens zweier Größen angebenden Ausdruck diejenige Function der willkürlich Veränderlichen zu finden, welche den Werth der abhängig Veränderlichen ausdrückt. Dieses zweite Geschäft für gleichmäßig wachsende Größen auszuführen, ist sehr leicht und einfach, und es fragt sich also dabei, durch welche Function der willkürlich Veränderlichen wird der Zahlenwerth einer mit ihr gleichmäßig wachsen-

den abhängig Veränderlichen ausgedrückt. Nennen wir den Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x, und stellen wir die unbekannte Function von x, deren Zahlenwerth die abhängig Veränderliche ist, durch den Buchstaben y vor, so gilt bei gleichmäßig Wachsenden die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, oder jede Zunahme des Zahlenwerthes der unbekannten Function ist a mal so groß als die zugehörige Zunahme der Zahl x. Setzen wir nun voraus, daß die Anfangspunkte der gleichmäßig wachsenden Größen zusammenfallen, oder daß für den Nullzustand der einen Größe auch die andere in den Nullzustand übergeht, so werden die ganzen durch allmäliges Wachsen erreichten zusammengehörigen Werthe der beiden Größen sich ohne Weiteres gerade so verhalten wie jede zwei beliebige zusammengehörige Zunahmen derselben, weil diese ganzen Werthe nun betrachtet werden können als zwei vom gemeinschaftlichen Nullzustand aus genommene zusammengehörige Zunahmen. Der Zahlenwerth der gesuchten Function wird also bei der hier gemachten Voraussetzung immer a mal so groß sein als der Zahlenwerth von x, und mithin ist ax die gesuchte Function. Aus der für die Stärke des Wachsens geltenden Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ folgt also für die Abhängigkeit der Größen selbst die Gleichung $y = ax$.

Wenn wir z. B. bei den Coordinaten der geraden Linie ak (Fig. 3) den Anfangspunkt der Abscisse in den Punkt a setzen, so wird für eine Abscisse gleich Null auch die Ordinate Null, und diese Coordinaten sind also gleichmäßig wachsende Größen, die zugleich in den Nullzustand übergehen. Wäre nun eine beliebige Zunahme gm der Ordinate $\frac{1}{2}$ mal so groß als die zugehörige Zunahme bc der Abscisse, so würde, die Abscisse x und die Ordinate y genannt, die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$ Ausdruck für die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens dieser Linien sein, und

daraus folgen, daß allgemein die Ordinate $y = \frac{1}{4}x$ sei. Ebenso werden die veränderliche Seite ae des Parallelogramms (Fig. 4) und der Flächeninhalt desselben gleichmäßig wachsende Größen sein, die zugleich in den Nullzustand übergehen. Sei x die Länge der veränderlichen Seite in Fußen, und F der zugehörige Flächeninhalt des Parallelogramms in Quadratfußen, so wird, wenn die unveränderliche Seite af z. B. 3 Fuß enthält, die Gleichung statthaben $\frac{\Delta F}{\Delta x} = 3$. Wäre nun die in dieser Gleichung ausgedrückte verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Fläche und der Seite des Parallelogramms ursprünglich gegeben gewesen, so würde man daraus die Fläche als Function des veränderlichen Zahlenwerthes der Seite erhalten, indem man daraus die Gleichung $F = 3x$ ableitete.

§. 19.

Bestimmung der Constanten.

Es ist bei dem eben angezeigten Verfahren, aus der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens die Abhängigkeit der durch Wachsen erreichten Werthe zu finden, von den gleichmäßig wachsenden Größen vorausgesetzt worden, daß sie zugleich anfangen zu wachsen, oder daß sie zugleich in den Nullzustand übergehen. Dies ist für die Eigenschaft des gleichmäßigen Wachsens an sich nicht nöthig; denn gleichmäßig wachsend sind die veränderlichen Größen nicht dadurch, daß sie selbst ein unveränderliches Verhältniß haben, sondern daß zusammengehörige Zunahmen ein solches haben, oder daß mit beliebigen gleichen Zunahmen der Einen immer gleiche Zunahmen der Andern verbunden sind, und dabei kann sehr wohl für den Nullzustand der Einen die Andere noch einen bestimmten Werth haben. Setzen wir z. B. bei den Coordinaten der geraden Linie eh (Fig. 8) den Anfangs- oder Nullpunkt der Abscisse in den Punkt a, so wird für die Abscisse gleich Null die Ordinate noch die Länge ae haben, und nichtsdestoweniger ein gleichmä-

ßiges Wachsen der Coordinaten statthaben. Die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens dieser Coordinaten, welche durch den Quotienten $\frac{gm}{bc}$ ausgedrückt wird, und gleich a sein möge, hängt natürlich nur von der Neigung der Linie eh gegen die Linie ad ab, und ist von dem Werthe, den die Ordinate für den Nullzustand der Abscisse hat, ganz unabhängig. Zöge man die Länge ae von den Ordinaten ab durch eine mit ad parallel gehende Linie eo, so würden die übrigbleibenden Theile der Ordinaten und die Abscisse gleichmäßig wachsende Größen sein, die zugleich in den Nullzustand übergehen, und folglich das über eo liegende Stück der Ordinate im Allgemeinen gleich ax sein. Die ganze Ordinate, welche y heißen mag, wird also gleich ax plus der constanten Zugabe ae; heißt diese C, so gilt die Gleichung $y = ax + C$. Man sieht hierbei, daß aus der angenommenen Stärke des Wachsens, gleich a, nur derjenige Theil der abhängig veränderlichen Größe folgte, welcher durch gemeinschaftliches Wachsen der beiden Größen erzeugt war, nicht aber, wie auch natürlich, derjenige Theil derselben, der vor dem Wachsen von x und unabhängig von der Stärke des Wachsens vorhanden war.

Es ist einleuchtend, daß allgemein bei allen gleichmäßig wachsenden Größen die Function der willkürlich Veränderlichen x, welche den Zahlenwerth der abhängig Veränderlichen ausdrückt, nur entweder von der Form ax oder von der Form $ax + C$ sein kann, wobei C eine beliebige constante Zahl bedeuten soll. Denn angenommen, die Größen gehen nicht zugleich in den Nullzustand über, so muß doch derjenige Theil der abhängig veränderlichen Größe, welcher durch das vom Nullzustand ausgehende Wachsen des x erzeugt wird, als mit x zugleich sich annullirend nothwendig durch eine Function von der Form ax ausgedrückt sein; alles Uebrigbleibende kann nichts Anderes sein als der Werth, den die abhängig Veränderliche für

den Nullzustand des x noch hat, und dieser ist natürlich constant.

Daß diese Constante von der Stärke des Wachsens unabhängig ist, sieht man allgemein auch daraus, daß der Ausdruck für die Stärke des Wachsens, nämlich der Differenzquotient, ungeändert bleibt, mag die Function ax noch eine Constante bei sich haben oder nicht. Nehmen wir an, daß in der Function ax die Zahl x um die Zahl k zunimmt, so verwandelt sich die Function in $a(x+k)$ oder $ax+ak$. Indem x um k gewachsen ist, hat die Function um ak zugenommen, also sind ak und k zusammengehörige Zunahmen von ax und x, und folglich ist der Differenzquotient dieser Größen, oder der Ausdruck $\frac{\Delta ax}{\Delta x}$ $= \frac{ak}{k} = a$. Ist aber die Function $ax+C$, so wird, wenn x um k wächst, die Function sich in $a(x+k)+C$ oder in $ax+ak+C$ verwandeln. Die Function hat also wieder um ak zugenommen für eine Zunahme von x, die gleich k ist. Mithin ist auch hier der Differenzquotient von $ax+C$ und x, oder der Ausdruck $\frac{\Delta(ax+C)}{\Delta x}$ $= \frac{ak}{k} = a$. Man sieht hieraus zuerst, daß der Differenzquotient, als der Ausdruck für die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens gleichmäßig wachsender Größen, immer kurzweg gleich ist dem Coefficienten, den die in der Function enthaltene willkürlich Veränderliche hat. Da aber die Constante der Function in dem Differenzquotienten verschwindet, und also in Bezug auf die Stärke des Wachsens zufällig ist, so kann, wenn x eine willkürlich und y eine abhängig Veränderliche bezeichnet, und die Stärke ihres Wachsens durch die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ gegeben ist, die Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y im Allgemeinen sein sowohl $y = ax$, als auch $y = ax+C$.

Ob in der Function dem Theile ax noch eine Constante zuzusetzen ist und welche, kann demnach nicht aus der gegebenen Stärke des Wachsens, sondern nur dadurch entschieden werden, daß man anderweit weiß, ob die abhängig Veränderliche für den Nullzustand des x noch einen gewissen Werth hat, und welchen.

Es möge zur Erläuterung der Bedeutung der Constanten noch ein Beispiel folgen. Wir sahen oben (§. 16), daß bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper die Geschwindigkeit gleichmäßig mit der Zeit der Bewegung abnimmt, und daß die Stärke des Wachsens dieser Größen gegeben ist durch die Gleichung $\frac{\Delta c}{\Delta t} = -30$, wobei die Zeit t in Secunden und die Geschwindigkeit c in Fußen gegeben ist. Jede Geschwindigkeit hat eine Richtung; und wenn man die nach einer Richtung hingewandte Geschwindigkeit durch eine positive Zahl ausdrückt, so wird wie bekannt ein für die Geschwindigkeit erhaltener negativer Zahlenwerth eine Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bedeuten. Unsere Gleichung $\frac{\Delta c}{\Delta t} = -30$ ist nach der Voraussetzung, daß die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit positiv sei, gebildet. Wenn wir nun aus der Gleichung $\frac{\Delta c}{\Delta t} = -30$ ableiteten $c = -30t$ ohne Constante, so hätten wir die Geschwindigkeit allgemein für jedes t oder jeden Zeitpunkt der Bewegung negativ, also abwärts gehend, und folglich sicherlich kein allgemein richtiges Resultat; denn wenn der Körper wirklich in die Höhe geworfen wird mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit, so muß zwar durch die fortwährende Abnahme der Geschwindigkeit nach einiger Zeit oder für gewisse Zahlenwerthe von t die Geschwindigkeit in eine nach entgegengesetzter Richtung übergehen, kann aber nicht durchaus negativ sein. Der Fehler liegt hier darin, daß keine Rücksicht auf die Constante genommen worden ist. Für den

Nullzustand der willkürlich Veränderlichen t oder der Zeitdauer der Bewegung behält hier die Geschwindigkeit als die abhängig Veränderliche noch einen gewissen Werth, nämlich die ursprünglich mitgetheilte nach oben gerichtete Wurfgeschwindigkeit. Diese ist also die zufällige Constante C. Dieselbe zugesetzt, wird die Gleichung $c = -30t + C$ die Geschwindigkeit bald positiv, bald negativ geben, je nachdem für beliebige Werthe von t die Zahl C größer ist als 30 t oder das Umgekehrte stattfindet. Nehmen wir an, daß die anfänglich mitgetheilte nach oben gerichtete Wurfgeschwindigkeit so groß sei, daß vermöge derselben, als gleichförmiger gedacht, in jeder Secunde 90 Fuß zurückgelegt würden, so wird unsere Gleichung $c = -30t + 90$. Berechnen wir nun die Geschwindigkeiten, welche der Körper nach 1, 2, 3, 4 ꝛc. Secunden hat, indem wir die Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. statt t in die Gleichung setzen, so erhalten wir die Geschwindigkeit nach 1 Secunde $= +60$, nach 2 Secunden $= +30$, nach 3 Secunden $= 0$, nach 4 Secunden $= -30$ ꝛc. War für den Anfangs- oder Nullpunkt der Zeitdauer der Bewegung keine Geschwindigkeit vorhanden, so gibt die Gleichung $c = -30t$, welche nun aus der Gleichung $\frac{\Delta c}{\Delta t} = -30$ folgt, freilich auch ein richtiges Resultat, aber nur, da die Bewegung jetzt blos eine fallende sein kann, die nach t Secunden vorhandene Geschwindigkeit des freifallenden Körpers sammt der abwärts gehenden Richtung dieser Geschwindigkeit.

Oder es sei, um noch ein Beispiel zu geben, die Summe zweier veränderlichen Größen x und y constant und $= S$. Um so viel hier die Eine wächst, muß die Andere abnehmen, und die zusammengehörigen Zunahmen werden gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen sein, und mithin wird die verhältnißmäßige Stärke ihres Wachsens in der Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ enthalten sein; was man auch daraus entnehmen konnte, daß unter den Grö-

ßen x und y hier die Gleichung $y = S - x$ gilt, und bei denselben als gleichmäßig wachsenden der Differenzquotient allgemein dem Coefficient von x, also gleich -1 sein muß. Die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ bezeichnet allgemein zwei Größen, deren Summe constant ist; bildet man aus derselben ohne Constante die Gleichung $y = -x$ oder $y + x = 0$, so erhält man nur den besonderen Fall, in welchem die Summe Null ist, oder in welchem die Größen gleich und entgegengesetzt sind. Da aber der Werth, in welchen y für ein annullirtes x übergeht, immer die Summe S sein muß, so wird diese als Constante zuzusetzen sein, und mithin aus der Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ die ursprüngliche Gleichung $y = -x + S$ wieder folgen. Wenn die grade Linie a b (Fig. 9) unter einem Winkel von 45° gegen ihre Abscisse c d geneigt ist, so wird, die Abscisse von c nach d wachsend angenommen, die Ordinate um so viel abnehmen als die Abscisse zunimmt, die Summe dieser Coordinaten also constant, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ sein. Die Constantenbestimmung hängt hier von dem willkürlich anzunehmenden Anfangspunkt der Abscisse ab. Setzt man den Punkt c als Anfangspunkt der Abscisse, und $a c = 3$, so würde aus der Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ folgen $y = -x + 3$. Setzte man den Anfangspunkt der Abscisse in e, so gehen die Coordinaten zugleich in den Nullzustand über, und aus der gegebenen Stärke des Wachsens folgt $y = -x$.

§. 20.

Schlußbetrachtung über die gleichmäßig Wachsenden.

Dem Obigen zu Folge handelt es sich bei der Untersuchung der von einander abhängigen veränderlichen Größen um zwei Hauptpunkte, um die Bestimmung ihrer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, und um die Auf-

stellung der das Gesetz ihrer Abhängigkeit angebenden Function, sei es nun, daß aus der gegebenen Stärke des Wachsens die Function abgeleitet werden soll, welches der häufigere Fall ist, oder daß aus der gegebenen Function die Stärke ihres Wachsens bestimmt werden soll. Dies Beides ist für gleichmäßig wachsende Größen vollständig geleistet, und damit die Betrachtung derselben geschlossen. Die Einfachheit der hier gewonnenen Begriffe und Lehrsätze schließt ihre durchgreifende Wichtigkeit nicht aus. Denn obgleich die ungleichmäßig wachsenden Größen das eigentliche Object der Differential- und Integralrechnung bilden, so kann doch der Fundamentalbegrjff dieser Wissenschaft, der Begriff der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, nur aus der Betrachtung der gleichmäßig wachsenden Größen gewonnen werden, indem man mit ihnen allein ursprünglich und unmittelbar die Vorstellung einer bestimmten Stärke des Wachsens verbinden kann. So wie man, wenn eine Linie ungleichförmig gekrümmt ist, und also ihre Krümmungsstärke sich verändert, von der in einem einzelnen Punkte derselben vorhandenen Krümmungsstärke sich durchaus keinen Begriff machen könnte, wenn man nicht eine gleichförmig gekrümmte Linie, die Kreislinie, zur Vergleichung hätte, bei welcher die die Krümmungsstärke bestimmenden Elemente, nämlich der Fortschritt auf der Linie und die Drehung aus einer Anfangsrichtung, gleichmäßig wachsen, und so wie die in einem einzelnen Punkte vorhandene bestimmte Krümmungsstärke einer krummen Linie nur dadurch erfaßt wird, daß sie als mit der constanten Krümmungsstärke irgend eines Kreises identisch erkannt wird, so wird man sich überhaupt bei allen ungleichmäßig wachsenden Größen von der in einem einzelnen Punkt vorhandenen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens nur dadurch einen Begriff machen können, daß man dieselbe als mit der constanten Stärke des Wachsens zweier gleichmäßig Wachsenden identisch aufzeigt. Es ist hieraus klar, daß der nach allen seinen Beziehungen vollständig ent-

wickelte Begriff der gleichmäßig wachsenden Größen an die Spitze der Differential- und Integralrechnung gestellt werden muß.

Den gleichmäßig wachsenden Größen gegenüber thut sich das unübersehliche Gebiet der ungleichmäßig wachsenden auf. Da die Art der Abhängigkeit aller gleichmäßig wachsenden Größen, wie vorher nachgewiesen, durch eine einzige bestimmte Function, nämlich durch eine Function von der Form $ax + C$ ausgedrückt wird, und diese Function zugleich nur aus der Voraussetzung des gleichmäßigen Wachsens resultiren kann, so folgt, daß alle andern möglichen Functionen einer veränderlichen Zahl x ungleichmäßig wachsende Größen anzeigen, und daß also die gleichmäßig wachsenden den ungleichmäßig wachsenden gegenüber stehen, wie die Einheit der Unendlichkeit, wie unter den krummen Linien der Kreis als die einzig gleichförmig gekrümmte der unendlichen Anzahl aller denkbaren krummen Linien.

Bei gegebener Stärke des Wachsens zweier gleichmäßig wachsenden Größen aus einem bestimmten Werth der Einen den zugehörigen Werth der Andern zu berechnen, ist eigentlich schon das wesentliche Geschäft der Regel de tri, wenn diese Größen nämlich zugleich in den Nullzustand übergehen, was bei jenem bekannten Mechanismus der Regel de tri, den Proportionen, immer als stattfindend vorausgesetzt wird. So wie man sich über die Regel de tri erhebt, tritt man mitten in die Differential- und Integralrechnung hinein, insofern man auch die ungleichmäßig wachsenden Größen untersuchen und behandeln will in Bezug auf dieselben Begriffsbestimmungen, welche in der Regel de tri für gleichmäßig wachsende in Anwendung gebracht sind. Es hat lange gedauert, bis man sich von der Regel de tri in das unmittelbar angrenzende Gebiet der Differential- und Integralrechnung erhoben hat. Man braucht sich aber darüber nicht zu verwundern, wenn man bedenkt, daß es sich bei diesem Schritte nicht um die Auflösung

bestimmter mathematischer Probleme, sondern um die Analyse sehr allgemeiner Begriffe handelt. Denn wenn auch eine solche Analyse sehr viel leichter und einfacher ist, als die meisten vorher gelösten mathematischen Probleme, so erhebt man sich doch überall nur sehr langsam und sehr selten zur Entwickelung und Untersuchung allgemeiner Begriffe, weil man ihre durchgreifende Bedeutung und die Fülle des in ihnen verborgenen Reichthums nicht ahnt. Diese Erhebung zu einer höheren scheinbar leeren Allgemeinheit, und die Einsicht in die Wichtigkeit und Fruchtbarkeit solcher Begriffserörterungen ist immer nur das Erbtheil eminenter Geister.

Alles, was man ohne Hülfe der Differential- und Integralrechnung von den Gesetzen der Abhängigkeit ungleichmäßig wachsender Größen herausbringt, wird entweder durch Zusammensetzung von Proportionen gefunden, wie bei den Alten fast durchgehends der Fall war, daher die große Ausbildung der Proportionslehre bei denselben, oder durch andere partielle unter besonderen Umständen anwendbare Methoden. Da aber die Differential- und Integralrechnung von den ungleichmäßig wachsenden Größen überhaupt handelt, so versteht es sich, daß alle denkbaren Gesetze der Abhängigkeit der Größen, die auf mehr als ein Regel de tri Exempel hinauslaufen, selbst der geringste Satz der Elementargeometrie, der die arithmetische Weise des Zusammenhangs und nicht blos die Ausdehnung des Zusammenhangs angibt, durch die Differential- und Integralrechnung muß gefunden werden können, wenn auch zuweilen eine Ableitung auf anderem Wege leichter und kürzer ist.

Zweites Capitel.

Vom Differentiiren im Allgemeinen.

§. 21.

Allgemeingültigkeit der Definition der ungleichmäßig Wachsenden.

Wir wenden uns zur näheren Betrachtung der ungleichmäßig wachsenden Größen. Ungleichmäßig wachsende Größen sind solche genannt worden, bei denen mit gleichen Zunahmen der Einen immer ungleiche Zunahmen der Andern verbunden sind, und wir wissen, daß alle veränderliche Größen, deren Abhängigkeitsgesetz nicht durch eine Function von der Form $ax + C$ ausgedrückt werden kann, zu denselben gehören. Diese Erklärung des ungleichmäßigen Wachsens erleidet keine Beschränkung oder Ausnahme dadurch, daß in der That selbst bei ungleichmäßig wachsenden Größen mit zwei gleichen Zunahmen der Einen auch einmal gleiche Zunahmen der Andern in dem Falle verbunden sein können, in welchem die abhängig veränderliche Größe durch mehrere sich wiederholende identische Bildungen dargestellt wird. Wird z. B. der Durchmesser bh eines Kreises (Fig. 1) als Abscissenlinie genommen, und der Lauf der krummen Linie durch die auf dem Durchmesser senkrecht stehenden Ordinaten bestimmt, so sind der Durchmesser und die Kreislinie ungleichmäßig wachsende Größen (§. 14). Nähme man nun aber grade vom Mittelpunkt e aus auf der Abscissenlinie nach entgegengesetzten Richtungen zwei gleiche Abschnitte de und ef, und betrachtete dieselben als zwei Zunahmen der Abscisse, so wären mit denselben auch gleiche Zunahmen mn und no der krummen Linie verbunden. Aber die beiden Quadranten des Kreises sind zwei identische Bildungen, die bei einer

symmetrischen Theilung auch identische Theile geben, welche dann zwei gleiche Paare zusammengehöriger Zunahmen der veränderlichen Größen darstellen können. Aber abgesehen davon, daß ein solcher Fall nur bei gewissen symmetrischen Theilungen identischer Bildungen eintreten kann, bei andern Theilungen aber nicht, so beruht doch auch bei solchen Größen das Interesse der Untersuchung nicht auf der Zusammensetzung dieser identischen Bildungen und auf dieser gleichgültigen Wiederholung, sondern einzig und allein auf dem Bildungsgesetz eines einzelnen solchen periodischen Theiles, und innerhalb desselben werden mit gleichen Zunahmen der Einen Größe auch immer ungleiche Zunahmen der Andern verbunden sein.

§. 22.

Stetige Veränderung der Stärke des Wachsens.

Aus dem Begriff des ungleichmäßigen Wachsens zweier von einander abhängigen veränderlichen stetigen Größen folgt ganz einfach, daß die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens derselben eine stetig veränderliche ist, und auch innerhalb der kleinsten Strecke oder Dauer nicht dieselbe bleiben kann. Denn alle die unendlich vielen Werthe, welche bei ungleichmäßig Wachsenden der Größenzustand der abhängig Veränderlichen durchläuft, werden dargestellt durch eine Function des Zahlenwerthes x der willkürlich Veränderlichen, welche nicht von der Form $ax + C$ ist, mag diese Function nun bekannt sein oder nicht. Bliebe nun innerhalb eines noch so kleinen angebbaren Spielraums des Wachsens von x die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens unverändert, so würde innerhalb dieses Spielraums der Differenzquotient constant sein, oder es müßte, den Zahlenwerth der abhängig Veränderlichen durch y ausgedrückt, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ sein. Hieraus würde aber folgen, daß innerhalb dieser Grenzen der Werth der abhängig Veränderlichen durch die Function $ax + C$ berechnet werden

könnte, welches der Voraussetzung, daß der ganze stetige Verlauf der abhängig Veränderlichen durch eine andere Function dargestellt werden muß, widerspricht.

Der Begriff der stetigen Veränderung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens ist der wesentlichste und wichtigste der ganzen Differential- und Integralrechnung. Durch die Erörterung desselben wird in der Analyse des gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens erst diejenige Stufe erstiegen, welche das Eigenthümliche dieser Rechnung bezeichnet. Ist die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens stetig veränderlich, so folgt, daß sie erstens in jedem Punkt oder Augenblick oder für jeden bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen als eine bestimmte wirklich vorhanden sein muß, und daß sie zweitens für jeden andern noch so nahe liegenden Punkt oder Augenblick oder noch so nahe liegenden Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen schon eine andere sein muß, und endlich, daß sie nach dem Uebergange von einem Größenzustande zu einem andern, wie wenig auch immer davon unterschiedenen, unendlich viele Zwischenstufen von Größenzuständen durchlaufen hat. Es treten dadurch mehrfache Schwierigkeiten in die Untersuchung. Denn erstens fragt es sich, wie man sich von einer rein momentanen, auf einen ausdehnungslosen Verflußpunkt eines Continuums zusammengezogenen Stärke des Wachsens einen Begriff bilden könne, und zwar sowohl wie sie überhaupt denkbar sei, als auch wie sie ihrem bestimmten Werthe nach berechnet werde. Zweitens aber kann der allgemeine Ausdruck für die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens nun nicht mehr eine bestimmte Zahl sein, wie bei gleichmäßig wachsenden Größen, sondern er muß als Ausdruck einer stetig Veränderlichen selbst als eine Function der willkürlich Veränderlichen erscheinen. Denn es entsteht bei ungleichmäßig Wachsenden die Frage nicht blos nach der in einzelnen Verflußpunkten vorhandenen augenblicklichen Stärke des Wachsens, sondern auch nach einem den ganzen Verlauf der ungleich-

mäßig Wachsenden beherrschenden Gesetz in Betreff ihrer Stärke des Wachsens. Es ist im Voraus klar, daß ein dies Gesetz der Veränderung der Stärke des Wachsens enthaltender Ausdruck, wenn er überhaupt möglich ist, nur allgemein und unbestimmt gegeben werden kann bezüglich auf den zufälligen Zahlenwerth, den man als von der willkürlich Veränderlichen gräde erreicht annehmen will, oder daß er nur als Function der willkürlich Veränderlichen gegeben sein kann. Es muß mithin in Bezug auf die mathematische Behandlung dieses Problems auch noch der wichtige Fortschritt in der Abstraction gemacht werden, welcher überhaupt und überall den Uebergang von der Rechnung mit constanten oder ein für allemal beliebig bestimmbaren Zahlenwerthen zu der Rechnung mit veränderlichen und mithin durchaus nur allgemein und unbestimmt ausdrückbaren Zahlenwerthen begleitet.

§. 23.

Logische Natur des Begriffs der stetigen Veränderung.

Da man es bei ungleichmäßig wachsenden Größen mit einer stetigen Veränderung ihrer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zu thun hat, so wird es, ehe man das Verfahren, dieselbe zu bestimmen, einer genaueren Betrachtung unterwirft, nöthig sein, sich klar zu machen, was in dem Begriff einer stetigen Veränderung überhaupt nothwendig schon mitgedacht wird, theils damit man bei der Auflösung des vorliegenden Problems diejenigen allgemeinen logischen Schwierigkeiten, welche an dem Begriff der stetigen Veränderung als solchem haften, zu unterscheiden wisse von den speciell mathematischen, welche die stetige Veränderung der Stärke des Wachsens betreffen, und theils auch, damit die über die stetig veränderliche Stärke des Wachsens zu gewinnenden Resultate das Auffallende und Unerwartete verlieren, welches sie in Betreff ihrer logischen Natur etwa zeigen dürften. In jeder stetigen Veränderung wird nothwendig dies gedacht, daß ein einzelner be-

ſtimmter Zuſtand der ſtetig veränderlichen Eigenſchaft oder Beſtimmung gar keine Dauer oder Ausbreitung gewinnt, daß er in einem ganz ausdehnungsloſen Verflußpunkt eines Continuums, wie des Raumes oder der Zeit ſtatt hat, und daß folglich das Entſtehen und das Vergehen dieſes Zuſtandes völlig in Eins zuſammenfallen. Wenn wir z. B. ſagen, daß eine krumme Linie ihre Richtung ſtetig ändere, und innerhalb keines noch ſo kleinen Theiles dieſelbe Richtung verfolge, ſo behaupten wir damit, daß einem einzelnen abſolut ausdehnungsloſen Punkte oder einem blos mathematiſchen Punkte, in ſofern er Verflußpunkt einer krummen Linie iſt, noch eine beſtimmte Richtung inhärire. Es muß alſo auch, wenn man ſich in den Act des Beſchreibens einer krummen Linie verſetzt, das Einſchlagen einer beſtimmten Richtung und das Verlaſſen derſelben, oder das Setzen und Aufheben derſelben völlig zuſammenfallen. Ebenſo wird bei einer ſtetig veränderlichen Geſchwindigkeit das Entſtehen einer beſtimmten Geſchwindigkeit und das Vergehen derſelben in Einem Verflußpunkt der Zeit zuſammentreffen.

Wir werden dadurch zur Anerkennung einer zwiefachen Weiſe des Daſeins eines beſtimmten Zuſtandes genöthigt, indem dieſes Daſein entweder von der Art iſt, daß es irgend eine Dauer und Ausbreitung gewinnt, und zu einer äußeren Realität gelangt, oder von der Art, daß es ein in ſeinem Geſetztſein zugleich wieder aufgehobenes, in ſeiner Innerlichkeit verſchloſſen bleibendes, blos potentiales Daſein iſt. Von dieſer letzteren Art iſt das Daſein eines jeden innerhalb des Fluſſes einer ſtetigen Veränderung vorüberfliegenden momentanen Zuſtandes. Will man das, was an einem ſolchen Zuſtand das real Daſeiende iſt, ausſprechen, ſo kann man ſagen, daß das Beſtreben oder die Tendenz, einen ſolchen Zuſtand darzuſtellen, wirklich vorhanden iſt. So wird man zugeben, daß bei dem Beſchreiben einer krummen Linie das Beſtreben, in einem einzelnen Punkte eine beſtimmte Richtung einzuſchlagen, wirklich

vorhanden ist, daß dies aber ein bloßes Bestreben bleibt, indem eine zur wirklichen Ausführung gekommene Richtung nie anders als durch eine grade Linie dargestellt werden kann. Diejenige grade Linie, welche die in einem Punkte der krummen Linie eingeschlossen liegende Richtung als ausgeführte enthält, ist bekanntlich die Tangente dieses Punktes. Die Bestimmtheit des Zustandes leidet natürlich nicht im Geringsten darunter, daß derselbe als bloßes Bestreben gesetzt ist, indem immer ein zur Ausführung und äußeren Realität gekommener Zustand gedacht werden kann, der mit dem als bloßes Bestreben vorhandenen Zustand identisch ist. Es ist zwar gewöhnlich, den Begriff des Bestrebens nur bei Kräften und nicht auch bei Größen in Anwendung zu bringen; indessen kann man dies Wort immerhin gebrauchen, wenn man nicht vergißt, daß durch dasselbe eigentlich nur ein Dasein bezeichnet werden soll, welches dem zur Ausführung und äußeren Realität gekommenen Dasein entgegengesetzt ist, welches nicht actu, sondern nur potentia vorhanden ist. Dies potentiale Dasein ist ein allgemeiner Begriff, unter welchem alles dasjenige, was gewöhnlich Bestreben genannt wird, selbst mit enthalten ist, und es mag in Ermangelung eines andern Wortes wohl gestattet sein, den besonderen Begriff statt des allgemeineren zu setzen.

Alle die mannichfachen logischen Schwierigkeiten, mit deren Abfertigung man sich in den Darstellungen der Differential- und Integralrechnung meistens so sehr viel Mühe gegeben hat, sind ganz einfache und unschuldige Consequenzen aus dem Begriffe der stetigen Veränderung. Will man diesen Begriff, bei welchem das Setzen und das Aufheben eines Zustandes zusammenfallen, einen widersprechenden nennen, so sind in demselben Sinne alle Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung widersprechend. Es ist daher unnöthig, an den Begriffen, welche sich bei der Analyse des Begriffs der stetigen Veränderung ergeben, so viel herumzuzerren und ihre Denkbarkeit in

Zweifel zu ziehen, wenn man an dem Hauptbegriff, in welchem sie eingeschlossen liegen, keinen Anstoß nimmt. Wo man Widerspruch gesäet hat, wird man Widerspruch ernten. Entweder sollte man die Wahrheit und Denkbarkeit der stetigen Veränderung anzweifeln, oder sich die Consequenzen gefallen lassen; man sollte z. B. leugnen, daß überhaupt krumme Linien, als specifisch von graden verschieden und nicht aus ihnen zusammengesetzt, angenommen und gedacht werden könnten, und dergleichen mehr. Man ist aber überall so weit davon entfernt, die Realität der stetigen Veränderung zu bezweifeln, daß man vielmehr umgekehrt mit fast allgemeiner Uebereinstimmung jede nicht stetige Veränderung, auf dem Gebiete der Natur und der Wirklichkeit wenigstens, für undenkbar hält. Wenn nun einerseits das Verlangen nicht gestellt werden darf, daß die Begriffe der Differential- und Integralrechnung weniger widersprechend seien als der Begriff der stetigen Veränderung, so darf andererseits gefordert werden, daß sie es nur in demselben Sinne seien. Alle anderen in der Darstellung dieser Wissenschaft so oft vorkommenden Härten und Widersprüche, die nicht nothwendige Consequenzen der stetigen Veränderung sind, müssen durchaus verworfen werden.

§. 24.

Zufälligkeit des Werthes des Differenzquotienten.

Wir wenden uns nun zur näheren Untersuchung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens bei ungleichmäßig wachsenden Größen. Von einer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zweier veränderlichen Größen kann man sich, so muß es scheinen, durchaus auf keine andere Weise eine Vorstellung verschaffen, als dadurch, daß man sie wirklich wachsen läßt, ihnen zusammengehörige Zunahmen ertheilt, und die Zahlenwerthe dieser Zunahmen mit einander vergleicht. Hierbei zeigt sich nun aber, sobald die von einander abhängigen Größen ungleichmäßig wachsend sind, daß das Verhältniß der Zahlen, welche zwei zusammengehörige

Zunahmen solcher Größen ausdrücken, nothwendig veränderlich ist, und sich nach der zufälligen Größe der Zunahme der willkürlich Veränderlichen richtet. Denn man denke sich zuerst zwei beliebige zusammengehörige Zunahmen der von einander abhängigen Größen, und das Zahlenverhältniß derselben festgesetzt. Halbirt man nun die angenommene Zunahme der willkürlich Veränderlichen, so können diese Hälften als zwei gleiche successive Zunahmen dieser Größe betrachtet werden. Da mit diesen gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen ungleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sein müssen, so wird mit einer Zunahme der Ersteren, die halb so groß ist als ihre anfangs gesetzte Zunahme, nothwendig eine Zunahme der Zweiten verbunden sein, die nicht halb so groß ist als ihre anfangs gesetzte Zunahme, sondern entweder größer oder kleiner, und so fort bei allen folgenden Halbirungen der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen. Da überhaupt, wenn eine anfangs gesetzte Zunahme der einen Größe in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt wird, die diesen gleichen Zunahmen zugehörigen Zunahmen der andern Größe immer ungleich sein müssen, so wird auch mit jedem aliquoten Theil der zuerst gesetzten Zunahme der einen Größe eine Zunahme der andern Größe verbunden sein, die nicht derselbe aliquote Theil der anfangs gesetzten Zunahme dieser andern Größe ist. Mithin werden die Zahlen, welche zusammengehörige Zunahmen zweier ungleichmäßig wachsenden Größen ausdrücken, ein durchaus veränderliches, von der Größe der Zunahmen selbst abhängiges Verhältniß haben. Und da die Zunahme einer der abhängigen Größen natürlich willkürlich und zufällig ist, so kann von dem Verhältniß zusammengehöriger Zunahmen der ungleichmäßig wachsenden Größen immer nur als von etwas Zufälligem die Rede sein.

Es ist dienlich, sich den eben aufgestellten Satz auch sinnlich zu veranschaulichen, etwa durch die Betrachtung der Coordinaten krummer Linien. Es möge gleich hier im

Allgemeinen bemerkt werden, daß man sich überhaupt alle Grundwahrheiten der Differential- und Integralrechnung, durch Betrachtung der krummen Linien sehr leicht anschaulich machen kann. Die nach einem Coordinatensystem construirten ebenen Curven haben, als sinnliche Bilder von Functionen einer Veränderlichen, der Differential- und Integralrechnung zur Entdeckung und Aufhellung ihrer Lehren außerordentlich große Dienste geleistet. Und da jede denkbare Function einer Veränderlichen als eine ebene Curve dargestellt werden kann, so gilt das, was an der Curve schlechthin oder an dem Allgemeinbegriff der Curve nachgewiesen werden kann, auch in seiner ganzen Ausdehnung von allen Functionen einer Veränderlichen, und die Allgemeinheit des Resultates leidet durch diese Substitution eines sinnlichen Bildes nicht im Geringsten. Wir werden uns deswegen im Folgenden auch der nach den bekannten Coordinatensystemen beschriebenen ebenen Curven vorzüglich bedienen zur Erläuterung der Lehren unserer Wissenschaft. Wenn eine krumme Linie ab (Fig. 10) der Abscisse af ihre convexe Seite zukehrt, so sind mit gleichen Zunahmen cd, de, ef der Abscisse immer größer werdende Zunahmen gh, ik, bm der Ordinaten verbunden, und wenn eine krumme Linie ab (Fig. 11) der Abscisse ihre concave Seite zukehrt, so sind mit gleichen Zunahmen cd, de, ef der Abscisse immer kleinere Zunahmen gh, ik, bm der Ordinaten verbunden, wie in beiden Fällen aus dem Rückblick auf das Coordinatengesetz der graden Linie leicht erhellt. Wird in Fig. 10 die Zunahme de der Abscisse im Punkte q halbirt, so sind die den gleichen Zunahmen dq und qe zugehörigen Zunahmen op und in der Ordinaten ungleich, und op nach Annahme kleiner als in, oder kleiner als die Hälfte von ik. Bei jeder neuen Halbirung der vom Punkte d aus genommenen Zunahme der Abscisse wird die der ersten Hälfte zugehörige Zunahme der Ordinate kleiner sein als die Hälfte ihrer vorherigen Zunahme. Wird mithin die Zunahme der Ordinate durch

die zugehörige Zunahme der Abſciſſe dividirt, ſo wird dieſer Differenzquotient bei jeder noch ſo weit fortgeſetzten Verkleinerung der Zunahmen fortwährend kleiner werden. Wird hingegen in Fig. 11 die Zunahme cd der Abſciſſe im Punkte q halbirt, ſo wird von den den gleichen Zunahmen cq und qd zugehörigen Zunahmen op und gn der Ordinaten die erſte größer ſein als die zweite, und folglich op größer als die Hälfte von gh. So wird ohne Ende, ſo oft man die vom Punkte c aus genommene Zunahme der Abſciſſe halbirt, die der erſten Hälfte zugehörige Zunahme der Ordinate größer ſein als die Hälfte ihrer vorhergehenden Zunahme. Dividirt man alſo die Zunahme der Ordinate durch die zugehörige der Abſciſſe, ſo wird dieſer Differenzquotient bei jeder noch ſo weit fortgeſetzten Verkleinerung der zuſammengehörigen Zunahmen fortwährend größer werden.

Man ſieht leicht, daß allgemein bei allen ungleichmäßig wachſenden Größen der Quotient zuſammengehöriger Zunahmen bei einer ohne Ende fortgeſetzten Verkleinerung dieſer Zunahmen entweder fortwährend kleiner oder fortwährend größer werden muß. Denn bei allen ungleichmäßig Wachſenden ſind mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen, entweder immer größer werdende Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden, nach Art der Coordinaten der convexen Linie Fig. 10, oder immer kleiner werdende, nach Art der Coordinaten der concaven Linie Fig. 11. Wir wollen, wenn das Wachſen der abhängig Veränderlichen von der erſteren Art iſt, daſſelbe ein beſchleunigtes nennen, natürlich nur in Beziehung auf ein als gleichförmig vorausgeſetztes Wachſen der willkürlich Veränderlichen, und wenn es von der zweiten Art iſt, ein retardirtes. In dem Falle, daß die abhängig Veränderliche beſchleunigt wächſt, wird alſo bei Verkleinerung der Zunahmen der veränderlichen Größen der Differenzquotient fortwährend kleiner, und im andern Falle fortwährend größer. Wären die veränderlichen Größen von der

Art, daß mit gleichen Zunahmen der Einen abwechselnd bald größer werdende und bald kleiner werdende Zunahmen der Andern verbunden wären, wie die Coordinaten einer krummen Linie, die aus Convexität in Concavität überginge, so können die Zunahmen doch immer innerhalb solcher Grenzen genommen werden, daß nur das Eine oder das Andere stattfindet, und dann die obigen Sätze darauf angewandt werden.

§. 25.

Die Stärke des Wachsens durch den Differenzquotienten nicht bestimmbar.

Während nun die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier von einander abhängigen veränderlichen Größen nicht anders bestimmbar erscheint, als durch das Verhältniß zweier zusammengehörigen Zunahmen derselben, so tritt bei ungleichmäßig Wachsenden dieser Bestimmung ihrer Stärke des Wachsens zuerst die Schwierigkeit entgegen, daß dem Verhältniß der zusammengehörigen Zunahmen der Charakter der Zufälligkeit anhaftet, und daß man nicht weiß, wie groß die Zunahmen genommen werden müßten, damit das bei dieser Größe vorhandene Verhältniß derselben die Stärke des Wachsens auszudrücken geeignet sei. Aber es ist nicht genug, daß man in der Wahl dieser bestimmten Größe der Zunahmen rathlos ist, sondern es ist auch leicht zu sehen, daß überhaupt gar keine zusammengehörigen Zunahmen der veränderlichen Größen, mögen sie nun beliebig groß oder beliebig klein genommen werden, dazu dienen können, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens auszudrücken, obgleich doch in jedem Verflußpunkt eine ganz bestimmte Stärke des Wachsens vorhanden ist, und diese auch als irgendwie auf einem Verhältniß von Zunahmen beruhend nothwendig gedacht werden muß. Es leuchtet nämlich sogleich ein, daß das Verhältniß zusammengehöriger Zunahmen, welche man von einem bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen ausgehend setzt, um so genauer die für diesen Werth der willkürlich

Veränderlichen geltende Stärke des Wachsens ausdrückt, je kleiner die Zunahmen genommen werden. Denn die Stärke des Wachsens soll stetig veränderlich sein. Ist dieselbe also von einem Größenzustand, den sie für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen hat, zu einem andern Größenzustand, den sie für einen größern Werth der willkürlich Veränderlichen hat, übergegangen, so hat sie unzählig viele dazwischen liegende Mittelstufen ihres Größenzustandes durchlaufen, vorausgesetzt, daß man die Zunahmen innerhalb solcher Grenzen nimmt, daß die abhängig Veränderliche entweder nur ein beschleunigtes oder nur ein retardirtes Wachsen hat, welches immer möglich ist. Mithin muß für immer kleiner gesetzte Zunahmen die Stärke des Wachsens immer geringere Veränderung zeigen und sich einer unveränderlichen nähern, oder diese Veränderung wird immer geringer werden, je kleiner der Spielraum ist, den man ihr übrig läßt. Weil nun bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen die innerhalb des Spielraums dieser Zunahmen stattfindende Veränderung der Stärke des Wachsens immer unbedeutender wird, so muß auch, wenn man die Stärke des Wachsens innerhalb gewisser Zunahmen ganz unverändert denkt, das aus dieser falschen Annahme gezogene Resultat die in einem Punkte vorhandene Stärke des Wachsens um so annähernder ausdrücken, je kleiner die von diesem Punkte aus genommenen Zunahmen sind. Nun wird aber, wie im vorhergehenden Paragraph bewiesen, in dem Falle, als die abhängig Veränderliche ein beschleunigtes Wachsen hat, der Differenzquotient bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen immer kleiner; und da er sich bei dieser Verkleinerung der Zunahmen und seiner zugleich erfolgenden eigenen Verkleinerung dem wahren Werth für die vorhandene momentane Stärke des Wachsens immer mehr nähert, so gibt er bei allen auch noch so klein angenommenen Zunahmen die Stärke des Wachsens nothwendig immer zu groß an. In dem Falle aber, als die abhängig Veränderliche ein retardirtes Wachsen hat,

wird der Differenzquotient mit zunehmender Kleinheit der Zunahmen immer größer; da er sich nun durch seine bei Verkleinerung der Zunahmen erfolgende fortwährende Vergrößerung dem wahren Werth für die momentane Stärke des Wachsens immer mehr nähert, so gibt er diesen Werth nothwendig immer zu klein an, wie klein auch die Zunahmen angenommen werden mögen. Von welcher Art demnach auch die ungleichmäßig wachsenden Größen sein mögen, so werden doch keine zwei zusammengehörige Zunahmen von irgend angebbarer Größe tauglich sein, um durch ihr Verhältniß die momentane Stärke des Wachsens auszudrücken, sondern dies Verhältniß wird in dem einen Falle immer zu groß und in dem andern immer zu klein ausfallen.

So gewiß es also ist, daß man sich durch fortgesetzte Verkleinerung der zusammengehörigen Zunahmen dem wahren Werth der in einem Punkte vorhandenen Stärke des Wachsens fortwährend annähern kann, so gewiß ist es, daß man auf diesem Wege diesen wahren Werth niemals erreichen wird. Nun handelt es sich hierbei aber nicht um einen bloßen Näherungswerth, sondern um einen absolut genauen und richtigen. Man müßte demnach, um seinen Zweck zu erreichen, die Zunahmen nicht blos sehr stark, sondern ins Unendliche verkleinern. Aber ins Unendliche verkleinerte Zunahmen sind keine Zunahmen mehr. Die Zunahmen gehen also der Herstellung des gesuchten Verhältnisses ebenso sehr entgegen, als der Vernichtung ihrer Größe oder Ausdehnung. Und da das Eine und das Andere nur in demselben Moment erreicht wird, so entziehen sich, wie es scheint, die Zunahmen jeder Verhältnißbestimmung grade in dem Augenblick, wo sie das gesuchte Verhältniß anzugeben im Begriffe stehen, und werden erst brauchbar in dem Moment, wo sie aufhören zu existiren, und wo es denn freilich zu spät ist.

§. 26.

Erläuterung durch den Begriff der Geschwindigkeit.

Es wird nicht undienlich sein, dieselben Reflexionen, welche so eben über die Bestimmung der momentanen Stärke des Wachsens aller ungleichmäßig wachsenden Größen überhaupt, und über die derselben entgegentretenden Schwierigkeiten gemacht worden sind, auch noch auf zwei bestimmte ungleichmäßig Wachsende überzutragen, indem sie dadurch zur völligsten Evidenz und zur unausweichlichsten Nothwendigkeit erhoben werden können. Und damit auch dem Verdacht, daß der Begriff einer Stärke des Wachsens überhaupt vielleicht ein erkünstelter und den Größen nur angedichteter sein möge, kein Raum gelassen wird, braucht man nur solche stetige Größen zu wählen, die gar nicht anders als durch gemeinschaftliches Wachsen in Abhängigkeit von einander gesetzt sein können, und an welche die Vorstellung einer Erzeugung derselben durch fließendes Wachsen also auch nicht willkürlich angebracht erscheinen kann. Wählt man außerdem die Größen noch so, daß sich zur Bezeichnung ihrer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens schon ein Wort in der Sprache vorfindet, so hat man außer dem Vortheil der Abkürzung im Ausdruck auch den der allgemein zugestandenen Realität dieses Begriffes. Solche Größen sind Zeit und Raum in einer Bewegung. Die Bewegung ist durchaus nur vorhanden durch fortfließendes Wachsen von Zeit und Raum, und nicht durch ruhiges Nebeneinanderliegen zusammengehöriger Werthe von Zeit und Raum. Die verhältnißmäßige Stärke ihres Wachsens nennt man Geschwindigkeit. Jedermann weiß, oder glaubt wenigstens zu wissen, was man unter Geschwindigkeit versteht, nämlich die Anzahl der Raumeinheiten, um welche der durchlaufene Raum zunimmt, bei einer Zunahme der Zeit um Eine Zeiteinheit, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit gleichförmig oder unveränderlich sei. Diese Anzahl der in der Zeiteinheit durchlaufenen Raumeinheiten wird, wie früher (§. 15) dargelegt, erhalten, wenn man

den Zahlenwerth einer beliebigen Zunahme des Raumes durch den Zahlenwerth der zugehörigen Zunahme der Zeit dividirt, oder durch den Differenzquotienten von Raum und Zeit.

Denken wir nun eine stetig veränderliche Geschwindigkeit, wie wir eine solche in allen Fällen, wo eine Kraft ununterbrochen auf einen bewegten Körper wirkt, anzunehmen gezwungen sind, und wie sie in den allergewöhnlichsten Bewegungen, z. B. in der Bewegung jedes freifallenden Körpers, vorkommt. Der Quotient zweier von einem bestimmten Zeitpunkt aus genommenen zusammengehörigen Zunahmen des Raumes und der Zeit wird die in diesem Zeitpunkt vorhandene Geschwindigkeit nicht angeben können, weil der während der angenommenen Zunahme der Zeit durchlaufene Raum durch die Veränderung der Geschwindigkeit eine andere Größe erhalten hat, als er erhalten haben würde, wenn die Geschwindigkeit während dieser Zunahme der Zeit unverändert geblieben wäre. Ist die veränderliche Geschwindigkeit eine beschleunigte, so wird dieser Raum und folglich auch der Differenzquotient von Raum und Zeit als Ausdruck der Geschwindigkeit immer und ohne Ende zu groß ausfallen, und bei einer retardirten Geschwindigkeit nothwendig immer zu klein. Da nun die Geschwindigkeit als eine stetig Veränderliche durch lauter unmerkliche Abstufungen fortschreiten, und nach dem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern alle unzählig vielen Mittelzustände des Größenzustandes factisch durchlaufen haben muß, so hat sich die Geschwindigkeit auch um so weniger verändert, je kleiner der Zeittheil genommen wird, für welchen man die zugehörige Zunahme des Raumes bestimmt. Mithin wird auch, wenn man die Geschwindigkeit innerhalb eines sehr kleinen Zeittheiles als gleichförmig betrachtet, das aus dieser falschen Voraussetzung für die Geschwindigkeit eines einzelnen Zeitpunkts gezogene Resultat um so weniger von der Wahrheit abweichen, je kleiner dieser Zeittheil genommen wird. Der

dabei stattfindende Fehler kann jede vorgeschriebene Grenze der Kleinheit überschreiten, aber auf diesem Wege wenigstens niemals zum Verschwinden gebracht werden.

Nun ist doch in der Bewegung nothwendig überall Geschwindigkeit vorhanden, und hier in jedem absolut ausdehnungslosen Verflußpunkt der Zeit eine ganz bestimmte. Und da Geschwindigkeit nicht anders gegeben sein kann als durch ein Verhältniß der Zahlenwerthe zusammengehöriger Zunahmen von Raum und Zeit, oder durch die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von Raum und Zeit, und auch nur als hierauf beruhend gedacht werden kann, so hat man mit jeder rein momentanen Geschwindigkeit eine gar nicht zur Ausführung kommende, als bloßes Bestreben gesetzte verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von Raum und Zeit. Wenn es sich nun in Betreff der Bestimmung einer rein momentanen Geschwindigkeit nicht blos um ein annäherndes, sondern um ein absolut richtiges Resultat handelt, so sieht man sich ganz unvermeidlich zu der Forderung hingetrieben, nicht sehr kleine zusammengehörige Zunahmen des Raumes und der Zeit mit einander zu vergleichen, sondern unendlich kleine, also bloße Verflußpunkte des Raumes und der Zeit. Aber ausdehnungslose Verflußpunkte können durch Raum- und Zeitlängenmaße nicht gemessen werden, und ihnen folglich auch keine auf diese Maßeinheiten bezüglichen Zahlenwerthe beigelegt werden. Vielmehr scheint der Differenzquotient in den nichtssagenden Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergehen zu müssen. Während man also durch fortgesetzte Verkleinerung der zusammengehörigen Zunahmen von Raum und Zeit dem wahren Werth der Geschwindigkeit immer näher kommt, so zerrinnt er doch wie ein Irrlicht in dem Augenblick, wo man ihn fassen will, nothwendig wieder in Nichts.

§. 27.

Trennung der logischen u. mathematischen Schwierigkeit.

Hiermit liegen nun die Schwierigkeiten, welche sich bei ungleichmäßig wachsenden Größen der Bestimmung ihrer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens entgegenstellen, klar vor Augen. Und zunächst sind in dem Vorhergehenden nur diejenigen Schwierigkeiten hervorgehoben, welche sich zeigen, wenn man die für einen bestimmten einzelnen Verflußpunkt eines Continuums oder für einen bestimmten einzelnen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen stattfindende verhältnißmäßige Stärke des Wachsens berechnen will. Soll aber, wie es natürlich gefordert werden muß, die momentane Stärke des Wachsens nicht blos für einzelne Verflußpunkte gefunden werden, sondern ein Gesetz aufgestellt werden, welches die ganze stetige Folge unendlicher Wandlungen der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens ausspricht, so daß man daraus die für jeden beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen geltende Stärke des Wachsens ohne Weiteres ablesen kann, so werden begreiflicher Weise die Schwierigkeiten, wenn nicht noch andere und größere, doch wenigstens dieselben sein. Diese Schwierigkeiten hat man natürlich schon längst, und seit den Zeiten der ersten Versuche zur Ausbildung der höheren Geometrie bei den Griechen, mit völligster Deutlichkeit und Klarheit eingesehen; nur hat man an der Möglichkeit einer allgemeinen und methodischen Auflösung allzusehr gezweifelt, und sich lieber in jedem einzelnen Falle, so gut es eben gehen wollte, mit besonderen Kunstgriffen und Einfällen beholfen, wodurch die Behandlung der hier einschlagenden Probleme ein ebenso buntes und verwirrendes als schwieriges und erkünsteltes Ansehn erhalten hat.

Man wird leicht bemerken, daß die in den nächstvorhergehenden Paragraphen dargelegte Schwierigkeit eine doppelte ist, und daß beide dort noch vermischt auftretenden von sehr verschiedener Natur sind. Denn erstens erscheint die Auflösung der Aufgabe, einen momentanen Größenzu-

ſtand einer ſtetig veränderlichen Stärke des Wachſens zu berechnen, als eine unerreichbare, obgleich ein ſolcher beſtimmter Zuſtand ſicherlich in jedem Verflußpunkt vorhanden iſt, und es auch irgend einen Zahlenwerth geben muß, der die momentane Stärke des Wachſens genau ausdrückt, d. h. welcher angibt, wie die Zahlenwerthe zuſammengehöriger Zunahmen ſich verhalten würden, wenn die in dieſem Moment vorhandene Stärke des Wachſens unverändert bliebe. Zweitens würde man, ſelbſt wenn man eine ſolche auf einen bloßen Verflußpunkt fallende Stärke des Wachſens genau berechnet vor ſich hätte, doch noch die Frage erheben können, durch welche objective in der Sache liegende Beſtimmungen man ſich das Daſein derſelben realiſirt denken ſolle, da die vorhergehenden Betrachtungen darauf zu führen ſcheinen, daß man annullirten Zunahmen oder Zahlen noch ein beſtimmtes Verhältniß beilegen müßte, um für die Art des Daſeins eines ſolchen Zuſtandes noch irgend eine objective Beſtimmung übrig zu behalten. Nur die erſte Schwierigkeit iſt eigentlich eine mathematiſche, und die zweite, bei der man ſich nur mit widerſprechenden Beſtimmungen abfinden aber keinen Größenwerth berechnen will, eine logiſche.

Beide Schwierigkeiten können ſehr wohl von einander getrennt werden, und müſſen getrennt betrachtet werden. Denn das Auffinden eines Ausdrucks für eine momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens kann an ſich mit der Annahme eines Verhältniſſes annullirter Zahlen und mit den Bedingungen der Möglichkeit oder Denkbarkeit eines ſolchen Zuſtandes nichts zu thun haben, da ein ſolcher Ausdruck, wie wir geſehen, ja doch nicht durch eine Vergleichung der Zahlenwerthe der ſucceſſiv ins Unendliche verkleinerten Zunahmen gefunden ſein kann, ſondern jedenfalls auf irgend eine andere Weiſe erſchloſſen ſein muß. Und der die Beſtimmtheit einer momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens angebende Ausdruck kann, wenn er gefunden iſt, ebenfalls gar keine Beziehung auf

ein Verhältniß annullirter Zahlen und überhaupt nicht das geringste Widersprechende enthalten, wie wenn ich sage, die in diesem Zeitpunkte vorhandene Geschwindigkeit ist so groß, daß der Körper, wenn er mit derselben unverändert fortginge, in einer Secunde sechs Fuß zurücklegen würde. Man muß nämlich nicht vergessen, daß eine bestimmte Stärke des Wachsens durchaus nur für ein vorausgesetztes gleichmäßiges Wachsen ausgesprochen werden kann, oder nur dadurch, daß man angibt, wie die zusammengehörigen Zunahmen sich verhalten würden, wenn die Stärke des Wachsens unverändert bliebe. Mithin hat jeder Ausdruck oder Zahlenwerth, der eine momentane Stärke des Wachsens angibt, nicht die geringste Beziehung darauf, daß sie momentan ist, sondern setzt die als bloßes Bestreben vorhandene Stärke des Wachsens als zur Ausführung gekommen voraus. Die Auflösung dieser mathematischen Schwierigkeit kann streng und bündig gegeben werden, und von allen logischen Schwierigkeiten völlig befreit werden, oder hat vielmehr mit denselben eigentlich gar keinen Zusammenhang. Was aber die zweite Schwierigkeit, nämlich die Denkbarkeit eines momentanen Zustandes innerhalb einer stetigen Veränderung betrifft, so fällt diese mit der Erörterung des Begriffs der stetigen Veränderung zusammen, und die Mathematik hat genug gethan, wenn sie das Problem in seiner ganzen Schärfe und Bestimmtheit ausspricht und hinstellt, braucht sich aber nicht in logischen Excursen über die Denkbarkeit der stetigen Veränderung und ihrer Consequenzen zu ergehen; am allerwenigsten sollte sie eine Einstimmung zu erzwingen suchen mit den Gesetzen einer Logik, gegen welche die stetige Veränderung selbst als eine der mächtigsten Instanzen aufgeführt werden kann.

Das mannichfache Ungeschickte, logisch Anstößige und selbst Undenkbare, welches sich in viele Darstellungen der Differential- und Integralrechnung eingeschlichen hat, und dieselben verunziert, beruht einzig und allein auf dem

Mangel an Unterscheidung des mathematischen Theils unserer Frage und des logischen. Diese Unterscheidung ist freilich unmöglich, wenn man, anstatt eine Entwickelung der Begriffe, welche der Differential- und Integralrechnung zu Grunde liegen, an die Spitze zu stellen, damit anfängt, die Operation des Differentiirens und die Bedeutung der dabei gebrauchten Zeichen zu erklären. Ist dann die Zeichensprache zugleich von der Art, daß sie eine Hinweisung auf die logische Schwierigkeit der Sache enthält, wie es bei der üblichen wirklich der Fall ist, so müssen dann natürlich beide Theile der Frage völlig durch einander gemengt werden. Man lasse es sich überhaupt immer angelegen sein, die Grundbegriffe einer mathematischen Wissenschaft unabhängig von Zeichen und Symbolsprache einzusehen. Ist die Sache erkannt, so versteht sich ja die Bedeutung der Zeichen ohnedies von selbst. Kleben aber die Begriffe an den Zeichen, so ergeht es dem Mathematiker wie dem sclavischen Anhänger eines philosophischen Systems. Nimmt man diesem die kategorischen Schlagwörter seines Systems, so ist seine Weisheit am Ende, und nimmt man dem Mathematiker seine Zeichensprache, seine Operationen, seine Umformungen von Gleichungen und andere dergleichen mathematische Handarbeiten, so ist er mit seiner Wissenschaft bald fertig, und braucht keine Stunde, um sich völlig auszusprechen. Wie sehr die Entwickelung der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung mit der Erklärung ihrer Zeichensprache in der Regel zusammengekettet gewesen ist, sieht man daraus, daß man eine neue Zeichensprache theils vorgeschlagen theils in Anwendung gebracht hat, und zwar aus dem Grunde, weil man ernstlich geglaubt hat, dadurch die logischen Schwierigkeiten der Sache beseitigen oder mindern zu können.

§. 28.

Stärke des Wachsens durch den Grenzwerth des Differenzquotienten bestimmbar.

Wir betrachten zuerst den mathematischen Theil unseres Problems für sich, und fragen blos, wie die in einem bestimmten Verflußpunkt vorhandene verhältnißmäßige Stärke des Wachsens berechnet, oder wie jener bei Verkleinerung der Zunahmen und Vergleichung ihrer Werthe unerreichbar scheinende Zahlenwerth gefunden werden kann. Wenn die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Größen durch einen einfachen Zahlenwerth ausgedrückt erscheint, so ist dabei nochmals daran zu erinnern, in welchem Sinne dem Vorhergehenden zu Folge ein Zahlenwerth eine Stärke des Wachsens ausdrückt, nämlich in dem Sinne, daß er die Anzahl der Einheiten angibt, um welche die abhängig Veränderliche wächst, wenn die willkürlich Veränderliche um die Zahl 1 wächst (s. §. 15). Und ist die Stärke des Wachsens nur die momentane eines Verflußpunktes, so gibt er an, um wie viel Einheiten die abhängig Veränderliche zunehmen würde bei einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen $= 1$, wenn die momentane Stärke des Wachsens unverändert bliebe.

Die Möglichkeit nun im Allgemeinen, eine momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens innerhalb einer stetigen Veränderung derselben genau zu berechnen, erhellt folgendermaßen. Bei allen ungleichmäßig wachsenden Größen nähert sich, wie wir wissen, der Quotient zweier zusammengehörigen Zunahmen, die man von einem gewissen Punkt der willkürlich Veränderlichen ausgehend setzt, dem Ausdruck für die in diesem Punkte vorhandene momentane Stärke des Wachsens um so mehr, je kleiner die Zunahmen genommen werden. Wenn nun gleich, insofern der Werth dieses Quotienten aus einer Vergleichung der Zahlenwerthe der Zunahmen entnommen werden sollte, die Zunahmen nicht ins Unendliche verkleinert oder annullirt werden dürften, weil dabei der Quotient unbestimmt und nichtssagend würde, so ist es doch denkbar, daß aus der

Betrachtung der Regel der Veränderungen, welche der Quotient der sich stets verkleinernden Zunahmen erleidet, oder auch aus der bloßen Ansicht der arithmetischen Form, in welcher der Differenzquotient sich darstellt, unmittelbar ein gewisser Zahlenwerth ersichtlich wird, dem sich der Quotient der Zunahmen ohne Ende um so mehr nähert, je kleiner die Zunahmen genommen werden. Hat man sich überzeugt, daß ein gewisser Zahlenwerth die Grenze ist, welcher sich der Quotient der Zunahmen bei einer ohne Ende fortgesetzten Verkleinerung derselben immer mehr und mehr nähert, so unterliegt es nicht dem geringsten Zweifel, daß dieser Grenzzahlenwerth eben derjenige gesuchte Zahlenwerth ist, der die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens angibt, und zwar für denjenigen Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen, von welchem ausgehend man die Zunahmen gesetzt, oder den Differenzquotienten gebildet hat. Man schließt also hier allgemein so: Während einerseits aus der Natur der ungleichmäßig wachsenden Größen folgt, daß der Zahlenwerth des Quotienten der von einem bestimmten Punkt aus genommenen Zunahmen, als Ausdruck für die in diesem Punkt vorhandene verhältnißmäßige Stärke des Wachsens, sich bei fortgesetzter Verkleinerung dieser Zunahmen ohne Ende der Wahrheit nähert, und während anderseits aus der arithmetischen Form des Quotienten der Zunahmen ein gewisser Zahlenwerth ersichtlich ist als die Grenze, welcher sich dieser Quotient bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen ebenfalls ohne Ende nähert, so ist es klar, daß dieser Grenzzahlenwerth mit der Wahrheit zusammenfällt. Es bedarf also überall nur der Auffindung eines solchen Grenzzahlenwerthes für den Quotienten der sich verkleinernden Zunahmen, um demselben ohne Weiteres die Bedeutung unterzulegen, daß er die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens in dem oben erläuterten Sinne angibt.

§. 29.

Beispiel von bestimmten Werthen des Grenzwerths des Differenzquotienten.

Wir wollen das, was so eben über den Grenzwerth des Differenzquotienten gesagt ist, zunächst durch einige Beispiele erläutern. Dabei gehen wir von bestimmten ungleichmäßig wachsenden continuirlichen Größen aus, damit dieser Grenzwerth eine concrete anschauliche Bedeutung erhält. Diese Größen seien nochmals Raum und Zeit; ihre verhältnißmäßige Stärke des Wachsens ist, wie wir wissen, die Geschwindigkeit. Als die bestimmte Bewegung mit stetig veränderlicher Geschwindigkeit, in welcher eine momentane Geschwindigkeit berechnet werden soll, wählen wir die Bewegung des freien Falls an der Oberfläche der Erde. Das Gesetz, nach welchem man aus der Zeitdauer des Falls den durchlaufenen Raum berechnet, wird dabei als gegeben betrachtet. Dies Gesetz ist folgendes: Stellt t die Anzahl der Secunden vor, welche ein Körper zum Fallen gebraucht hat, so enthält der in diesen t Secunden durchlaufene Raum $15\,t^2$ Fuß. Da nach dieser Formel der Raum durch die Zeit berechenbar erscheint, so ist t oder die Zeit die willkürlich Veränderliche, und $15\,t^2$ die Function der willkürlich Veränderlichen, deren Zahlenwerth die abhängig Veränderliche, hier den Raum, ausdrückt. Aus der Form der Function ersieht man, daß Raum und Zeit ungleichmäßig wachsend sind, oder daß die Geschwindigkeit stetig veränderlich ist. Es ist klar, daß man durch dies Gesetz, welches die Abhängigkeit von Zeit und Raum in der Fallbewegung angibt, zwar in den Stand gesetzt wird, zu jeder beliebigen Zunahme der Zeit die zugehörige Zunahme des Raumes zu berechnen, daß damit aber die Regel der Berechnung der Geschwindigkeit eines bestimmten Zeitpunktes noch nicht gegeben ist, weil diese aus dem Verhältniß endlicher Zunahmen nicht folgen kann.

Wir wollen zuerst den Grenzwerth des Quotienten zusammengehöriger Zunahmen des Raumes und der Zeit für einen bestimmten Zeitpunkt der Fallbewegung berech-

nen. Es würde zwar auch außerordentlich leicht sein, aus der arithmetischen Form des allgemein ausgedrückten Differenzquotienten der beiden ungleichmäßig wachsenden Größen t und $15\,t^2$ den Grenzwerth abzuleiten, welchem sich dieser Quotient mit Verkleinerung der Zunahmen immer mehr nähern muß; aber hierbei würde der Grenzwerth nicht als eine bestimmte Zahl, sondern als ein allgemeiner nur bezüglich auf den zufälligen Zahlenwerth von t zu bestimmender Ausdruck, d. h. als eine Function von t erscheinen müssen, weil er ja als Ausdruck der für jeden Zeitpunkt der Fallbewegung stattfindenden Geschwindigkeit mit t zugleich veränderlich und von t abhängig sein muß. Da aber solche allgemeine Resultate, wie einfach auch immer, in der Regel für den, der sich ihren Sinn nicht schon an einzelnen bestimmten Fällen veranschaulicht hat, etwas Unfaßliches haben, so wollen wir es vorziehen, zuerst die momentane Geschwindigkeit eines bestimmten einzelnen Zeitpunktes der Fallbewegung auf dem mühsameren Wege der Induction zu finden, um daran das Wesen des Grenzwerthes zu erläutern.

Angenommen, man wollte die in dem Endpunkt der ersten Secunde vorhandene Geschwindigkeit berechnen. Immer genauer werdende Näherungswerthe dieser Geschwindigkeit, d. h. des vermöge dieser Geschwindigkeit als gleichförmiger betrachtet in Einer Secunde durchlaufenen Raumes, erhält man, indem man immer kleinere vom Endpunkt der ersten Secunde aus genommene zusammengehörige Zunahmen des Raumes und der Zeit berechnet, und die Ersteren durch die Letzteren dividirt. Berechnen wir also z. B. zuerst den in dem ersten Tausendtel der zweiten Secunde durchlaufenen Raum. Die Zeit der Fallbewegung bis zum Ende dieses Tausendtels ist, vom Anfangspunkt der Bewegung an gerechnet, 1,001 Secunde. Der in dieser Zeit durchlaufene Raum enthält nach obiger Regel $15 . 1{,}001^2$ Fuß, oder 15,030015 Fuß. Davon die in der ersten Secunde durchlaufenen 15 Fuß abgezogen, blei-

ben für den in dem ersten Tausendtel der zweiten Secunde durchlaufenen Raum 0,030015 Fuß übrig. Diese Zunahme des Raumes durch die zugehörige Zunahme der Zeit, nämlich 0,001, dividirt, gibt 30,015 Fuß als Näherungswerth für die im Endpunkt der ersten Secunde vorhandene Geschwindigkeit. Berechnen wir, um einen genaueren Näherungswerth zu finden, den in dem ersten Milliontel der zweiten Secunde durchlaufenen Raum. Derselbe wird, auf die eben angezeigte Weise berechnet, gleich 0,000030000015 Fuß gefunden. Diese Zunahme des Raumes durch 0,000001, als die zugehörige Zunahme der Zeit, dividirt, gibt 30,000015, oder eine Geschwindigkeit, vermöge welcher in Einer Secunde 30,000015 Fuß durchlaufen würden. Berechnet man auf dieselbe Weise einen noch genaueren Näherungswerth für die Geschwindigkeit, indem man die Zeit vom Endpunkt der ersten Secunde an nur um ein Tausendmilliontel einer Secunde wachsen läßt, so erhält man 30,000000015 Fuß als Werth dieser Geschwindigkeit. Vergleichen wir nun die einzelnen für die Geschwindigkeit des Endpunkts der ersten Secunde gefundenen immer genaueren Näherungswerthe, nämlich 30,015, 30,000015 und 30,000000015, so ist die Regel ihrer Veränderung hinlänglich klar. Ein solcher Näherungswerth, der, weil die Geschwindigkeit eine beschleunigte ist, immer zu groß ausfallen muß, enthält außer den unveränderlichen 30 Fußen noch einen gewissen Bruchtheil von 15 Fußen, welcher, wie leicht zu sehen, in jedem der drei Fälle gerade derselbe Bruchtheil ist, den man von der Secunde genommen hat, um ihn als Zunahme der Zeit zu betrachten. Diese hier gefundenen Näherungswerthe bestehen also aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen, von denen nur der Eine, nämlich der Bruchtheil von 15 Fuß, von der Größe der Zunahmen abhängt, der Andere aber, nämlich die 30 Fuß, unverändert bleibt bei allen beliebigen Zunahmen, die vom Endpunkt der ersten Secunde aus angenommen werden. Da nun bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunah-

men von Raum und Zeit der den 30 Fußen zugefügte Bruchtheil von 15 Fuß sich auch ohne Ende verkleinert, so ist die Zahl 30 der Grenzwerth des Differenzquotienten von Raum und Zeit. Indem man nun die Zunahme der Zeit jeden angebbaren Werth von Kleinheit überschreitend oder indem man sie vielmehr annullirt denkt, so geht der Differenzquotient nicht in einen nichtssagenden Ausdruck über, sondern es verschwindet nur der der Zahl 30 angehängte Bruchtheil, die Zahl 30 aber bleibt stehen. Die momentane Geschwindigkeit im Endpunkt der ersten Secunde ist demnach absolut genau bestimmt, und zwar würden vermöge derselben, wenn sie unverändert bliebe, in Einer Secunde 30 Fuß zurückgelegt werden. Nicht also durch Vergleichung der Zahlenwerthe zusammengehöriger Zunahmen der ungleichmäßig wachsenden Größen, oder durch den Zahlenwerth ihres Differenzquotienten wird die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens gefunden, was durchaus unmöglich ist, sondern durch die Betrachtung der Regel der Veränderung des Differenzquotienten bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen. Dadurch scheidet sich im Differenzquotienten dasjenige, was von der Größe der Zunahmen abhängig ist, und mit endloser Verkleinerung derselben sich selbst endlos verkleinert, von demjenigen, was damit nichts zu schaffen hat, und also den Grenzzahlenwerth des Differenzquotienten bildet.

Mit dem Verschwinden oder der Annullirung der Größe der Zunahmen verschwindet, wie man schließen zu dürfen glauben muß, das Verhältniß dieser Zunahmen nicht, indem der Quotient derselben einem bestimmten Zahlenwerth gleich wird. Aber diese Reflexionen, welche die Möglichkeit eines Verhältnisses annullirter Zahlen betreffen, sind, wie man leicht bemerken wird, zur rein mathematischen Lösung des vorliegenden Problems nicht nöthig, und gehören auch gar nicht hierher. Die Reihe der Schlüsse, welche zur strengen mathematischen Lösung des Problems führt, ist, wie im vorhergehenden Paragraphen schon ge-

zeigt worden, von allen Speculationen über die Denkbarkeit eines momentanen Zustandes unabhängig, und kann durch Einmischung derselben nur in Unordnung gebracht werden. Es wird gut sein, diese Beweisart, welche einen wichtigen Schritt in der Begründung der Differentialrechnung bezeichnet, noch auf unser vorliegendes Beispiel anzuwenden. Man zieht dabei die Fäden von zwei Seiten her zu dem Resultat zusammen. Da nämlich einerseits aus der Natur der ungleichmäßig wachsenden Größen folgt, daß der Quotient der vom Endpunkt der ersten Secunde aus genommenen Zunahmen des Raumes und der Zeit sich bei Verkleinerung der Zunahmen ohne Ende demjenigen Zahlenwerth nähert, welcher die wahre Geschwindigkeit dieses Zeitpunkts angibt, und da anderseits aus der Regel der Veränderlichkeit dieses Quotienten folgt, daß derselbe sich bei Verkleinerung der Zunahmen ohne Ende der Zahl 30 nähert, so fällt die Zahl 30 mit der wahren Geschwindigkeit dieses Zeitpunkts nothwendig zusammen. Was frage ich dabei nach der Möglichkeit oder Denkbarkeit einer auf einen bloßen Verflußpunkt der Zeit zusammengezogenen Geschwindigkeit; genug daß eine solche in dem unabweisbaren Begriff der stetigen Veränderung ohne Weiteres mitgedacht ist, und daß die Mathematik ein sicheres und allgemein anwendbares Mittel gefunden hat, sich in den Fluß der stetigen Veränderung zu versetzen, den einzelnen vorüberfliegenden Moment darin zu ergreifen, und seinem Größenwerthe nach zu berechnen.

§. 30.

Beispiel vom allgemeinen Ausdruck des Grenzwerths des Differenzquotienten.

Wir haben in dem vorhergehenden Paragraphen zwar die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier ungleichmäßig Wachsenden berechnet, aber nur für einen bestimmten einzelnen Werth der willkürlich Veränderlichen, indem wir nur die momentane Geschwindigkeit eines bestimmten Zeitpunktes der Fallbewegung berechnet haben.

Die Bestimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens würde aber wenig fruchtbar sein, wenn man ihren Werth immer nur für einzelne Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen anzugeben wüßte. Vielmehr muß man, damit die im Wachsen erreichten Werthe der veränderlichen Größen auch als Resultate der in ihrem ganzen Verlauf sich kundgebenden verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens betrachtet werden können, was wir gleich Eingangs als den Grundgedanken und das Hauptziel unserer ganzen Untersuchung aufgestellt haben, die unendliche stetige Folge der Veränderungen der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens in ein Gesetz zu fassen und durch eine allgemeine Formel auszudrücken suchen, aus welcher die für jeden beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen stattfindende Stärke des Wachsens ohne Weiteres bestimmt werden kann. Man wird vielleicht erwarten, daß diese allgemeine Lösung viel schwieriger sein müßte, als die specielle. Sie ist aber im Gegentheil eigentlich kürzer und einfacher; denn man braucht nur den Differenzquotienten allgemein auszudrücken, so ergibt sich der allgemeine Ausdruck des Grenzwerthes des Differenzquotienten schon aus der bloßen arithmetischen Form desselben, während in dem speciellen Fall der Grenzwerth aus der Regel der Veränderung des Differenzquotienten abgeleitet werden mußte. Der Grenzwerth des Differenzquotienten erscheint dann natürlich nur bezüglich auf den beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen bestimmt, oder als Function derselben.

Wir wollen diese Aufgabe gleich an unserm vorliegenden Beispiel von der Fallbewegung lösen, und allgemein die Geschwindigkeit eines jeden beliebigen Zeitpunktes ausdrücken. Die ungleichmäßig wachsenden Größen sind t und $15\,t^2$, d. h. die Anzahl der in der Fallbewegung verflossenen Secunden, und die Anzahl der in t Secunden durchlaufenen Fuße. Wir brauchen nur der Zahl t eine allgemein ausgedrückte Zunahme zu ertheilen, die derselben zugehörige Zunahme des Raumes auszudrücken, und aus

beiden den Differenzquotienten zu bilden. Die Zahl, welche die Zunahme der Zeit in Secunden angibt, heiße k. Der in $t + k$ Secunden durchlaufene Raum enthält $15 (t + k)^2$ Fuß, oder $15 t^2 + 30 t k + 15 k^2$ Fuß. Nun gehörte vorher zur Zeit t der Raum von $15 t^2$ Fuß. Wir sehen also, daß der Raum um $30 t k + 15 k^2$ Fuß gewachsen ist, während die Zeit vom Zahlenwerth t aus um k Secunden zugenommen hat. Also sind die Zahlenwerthe $30 t k + 15 k^2$ und k zusammengehörige Zunahmen des Raumes und der Zeit, von dem Punkte aus genommen, wo die Zeit den Zahlenwerth t hatte. Der Quotient dieser zusammengehörigen Zunahmen ist also $\frac{30 t k + 15 k^2}{k}$ oder $30 t + 15 k$.

In dieser allgemeinen Form des Differenzquotienten erkennt man noch deutlicher als vorher in dem speciellen Fall, daß derselbe aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen besteht. Der erste Theil $30 t$ ist nur abhängig von der Zahl t, also von der Anzahl der Secunden, die verflossen sind bis zu dem Zeitpunkt, von welchem aus man eine Zunahme der Zeit gesetzt hat; der zweite Theil $15 k$ ist nur von der Größe der Zunahme der Zeit selbst abhängig. Mit einer Veränderung der Zunahme der Zeit oder der Zahl k verändert sich also auch nur der Theil $15 k$ des Differenzquotienten, der Theil $30 t$ aber bleibt ungeändert. Und da durch Verkleinerung von k der Theil $15 k$ bis zu jedem beliebigen Grad von Kleinheit heruntergebracht werden kann, so ist $30 t$ der Grenzzahlenwerth, welchem sich der Differenzquotient bei endlos fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen immer mehr nähert. Mithin ist, zu Folge der früher über den Sinn dieses Grenzwerthes gegebenen Erklärung, in der Bewegung des freien Falls die momentane Geschwindigkeit allgemein nach t Secunden so groß, daß vermittelst derselben, wenn sie dauernd würde, in einer Secunde $30 t$ Fuß zurückgelegt würden. Ist also Eine Secunde verflossen, oder hat t den Zahlenwerth 1, so ist die Geschwindigkeit 30 Fuß, wie vorher für diesen einzelnen

Zeitpunkt schon durch Induction gefunden war. Nach drei Secunden ist die momentane Geschwindigkeit 30.3 Fuß, nach $\frac{1}{1000}$ Secunde $30.\frac{1}{1000}$ oder $\frac{3}{100}$ Fuß auf die Secunde ꝛc. Wir haben also hiermit, wie gefordert war, die ganze unendliche Folge der stetigen Veränderungen der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens von Raum und Zeit, oder der stetigen Veränderungen der Geschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von der willkürlich Veränderlichen, nämlich der Zeit, d. h. als Function der Zeit. Aus der gefundenen Function der Zeit $30\,t$, welche die momentane Geschwindigkeit angibt, ersieht man, daß Geschwindigkeit und Zeit gleichmäßig wachsende Größen sind in der Bewegung des freien Falles, wie in den dieser Bewegung entlehnten Beispielen des ersten Capitels auch schon angenommen war.

§. 31.

Sinn des Grenzwerthes des Differenzquotienten einer abstracten Function.

Wir wollen nun zunächst, ohne grade an ungleichmäßig wachsende Continua einer bestimmten Art zu denken, den Grenzwerth des Differenzquotienten in etwas größerer Abstraction betrachten, indem wir nur die Function als eine bestimmte denken. Stelle x den Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen, und x^2 den der abhängig Veränderlichen vor. Wächst x um die Zahl k, so geht der Werth der Function in $(x+k)^2$ oder in $x^2+2xk+k^2$ über. Mit einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen $=k$ ist also eine Zunahme der abhängig Veränderlichen $=2xk+k^2$ verbunden. Der Quotient dieser Zunahmen ist $\frac{2xk+k^2}{k}$ oder $2x+k$. Mit Verkleinerung von k, als Zunahme der willkürlich Veränderlichen, nähert sich der Differenzquotient dem Werthe $2x$ als Grenze, und geht für ein annullirtes k in $2x$ über. Man unterlasse für den Anfang nicht, dieses etwas abstracte Resultat noch in Worte zu übersetzen. Der Sinn desselben ist folgender:

Man denke zwei continuirliche Größen so von einander abhängig, daß der Zahlenwerth der abhängig Veränderlichen das Quadrat des zugehörigen Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen ist; für einen beliebigen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen oder in einem beliebigen Punkt derselben ist dann die momentane Stärke des Wachsens so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, jede Zunahme der abhängig Veränderlichen grade so viel mal so groß sein würde als die zugehörige Zunahme der willkürlich Veränderlichen, wie das Doppelte des von der willkürlich Veränderlichen in diesem Punkte erreichten Zahlenwerthes angibt.

Wir haben uns in dieser Erklärung des Sinnes, welcher dem Grenzwerthe des Differenzquotienten unterzulegen ist, auf continuirliche Größen bezogen, deren Abhängigkeit durch die Function x^2 ausgedrückt ist. Diese Beziehung auf Continua ist wesentlich, wenn der Grenzwerth einen objectiven Inhalt haben soll. Es ist gar nicht zu billigen, daß man, wie so häufig geschieht, den Sinn und die Bedeutung des Grenzwerthes des Differenzquotienten gleich von vorn herein durch abstracte Functionen erläutert, ohne auch nur die Realität einer momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens an ungleichmäßig wachsenden Continuis nachgewiesen zu haben. Hat man z. B. die Function x^2, so sind x und x^2 nur zusammengehörige Zahlen; und wenn man sich dieselben auch als stetig wachsende denken soll, so ist doch in der abstracten Function als solcher das Wachsen nicht anders als durch Zusetzen von Zahlenwerthen, oder als discretes Wachsen zu bewerkstelligen und aufzuzeigen. Nun ist freilich auch bei den Zahlen x^2 und x zu sehen, daß ihr Differenzquotient sich ohne Ende dem Grenzzahlenwerth $2x$ nähert. Ist z. B. $x = 5$, und läßt man 5 um eine sehr kleine Zahl wachsen, so ist die Zunahme von x^2 oder 25 beinahe 2.5mal so groß, als die Zunahme der Zahl 5, und dies ohne Ende um so genauer, je kleiner die Zunahme von 5 ist. Aber der wirkliche Ue-

bergang zum Grenzwerth des Differenzquotienten verliert offenbar Sinn und Bedeutung, wenn ich an weiter nichts denke als an das Wachſen der Zahlenwerthe in einer abſtracten Function, und wenn nicht vorher ſchon die Realität eines blos potentialen Daſeins nachgewieſen iſt, welches nicht zur Ausführung kommend doch als Beſtreben vorhanden iſt. Weil bei dem Wachſen der Zahlen, als blos gedachten und nicht in Anſchauung übergehenden Größen die unzählig vielen Zwiſchenſtufen der Größenzuſtände überſprungen werden, ſo liefert daſſelbe auch gar keine Vorſtellung von den vorüberfliegenden Momenten des Wachſens. Eine Zahl x wächſt entweder, und dann wächſt auch ihr Quadrat, oder die Zahl wächſt nicht, und dann wächſt auch ihr Quadrat nicht, und das Wachſen ſowohl der Zahlen als auch das Nichtwachſen derſelben erſcheint in beiden Fällen als ein fertiges Reſultat ohne innern Trieb und Beſtreben. Bei continuirlichen Größen hingegen kann grade umgekehrt keine der unendlich vielen Zwiſchenſtufen zweier im Wachſen erreichten Größenzuſtände überſprungen werden, ſondern ſie müſſen alle factiſch durchlaufen, und nach ihrer ganzen Unendlichkeit erſchöpft werden. Dadurch entſtehen unendlich viele einzelne Acte des Wachſens; indem aber ein ſolcher einzelner Act des Wachſens in keiner Strecke von angebbarer Größe ſtatt hat, und kein wirkliches Wachſen enthält, ſo iſt auch das Wachſen in jedem Moment als ein in ſich verſchloſſen bleibendes, als bloßes Beſtreben vorhanden, und dadurch kommt nicht blos der Quotient der Zunahmen, ſondern auch der Grenzwerth dieſes Quotienten zu einer realen Bedeutung als Ausdruck dieſes Triebes. Man muß alſo nothwendig ſchon wiſſen, daß überhaupt ein Größenzuſtand vorhanden iſt, der nur durch den Grenzwerth des Differenzquotienten erreicht werden kann, wenn dieſer Uebergang zu dem Grenzwerth Sinn und Bedeutung behalten ſoll. Will man, blos von der Betrachtung der Veränderungen des Differenzquotienten einer Function herkommend, dem Grenzwerth

des Differenzquotienten noch einen Sinn unterlegen, so ist man sogleich genöthigt, von Zunahmen zu sprechen, von denen man nicht weiß, ob sie welche sind oder nicht, bei denen man mit der einen Hand nehmen muß, was man mit der andern gibt, von denen man nur in lauter contradictoriſchen Sätzen sprechen kann, wobei das Subject nie wiſſen darf, was das Prädicat thut.

Wie ſinn- und lebenvoll wird dagegen dies Alles, wenn wir in unſerm Beiſpiel unter x und x^2 uns continuirliche Größen vorſtellen. Es ſeien z. B. x und x^2 Coordinaten einer Linie. Die krumme Linie aem (Fig. 12) ſei ſo gebildet, daß der Zahlenwerth jeder Ordinate das Quadrat des Zahlenwerthes der zugehörigen Abſciſſe iſt, wobei natürlich diejenige Abſciſſe, welche ihrer Ordinate gleich iſt, wie hier die Abſciſſe ab, den Zahlenwerth 1 haben muß. Man weiß, daß die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens der Coordinaten dieſer krummen Linie durch den Quotienten beliebig kleiner zuſammengehöriger Zunahmen unerreichbar iſt, daß dieſelbe aber durch den Grenzwerth des Differenzquotienten, durch $2x$ richtig angegeben wird. Im Punkte b alſo, z. B. wo x oder der Zahlenwerth der Abſciſſe $= 1$ iſt, iſt $2x$ oder die momentane Stärke des Wachſens $= 2$, d. h. die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens der Coordinaten iſt in dieſem Verflußpunkt ſo groß, daß, wenn ſie unverändert bliebe, jede Zunahme der Ordinate doppelt ſo groß ſein würde, als die zugehörige Zunahme der Abſciſſe. Nun haben eine unveränderte Stärke des Wachſens nur die Coordinaten einer graden Linie. Iſt alſo die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens der Coordinaten einer krummen Linie in einem Punkt eine beſtimmte, ſo iſt ſie identiſch mit der conſtanten Stärke des Wachſens der Coordinaten irgend einer graden Linie; im Punkt b alſo identiſch mit einer Graden, bei welcher jede Zunahme der Ordinate doppelt ſo groß iſt als die zugehörige Zunahme der Abſciſſe. Laſſen wir demnach die Abſciſſe vom Punkte b aus um

das Stück bc wachsen, und die Ordinate eb um doppelt so viel, indem wir das Stück gk doppelt so groß als bc oder ek nehmen, so ist in den Coordinaten der geraden Linie eg diejenige Stärke des Wachsens als ausgeführte enthalten, welche bei den Coordinaten der krummen Linie für den Punkt e als bloßes Bestreben oder als rein momentane Stärke des Wachsens vorhanden ist. Im Punkte c sei x oder der Zahlenwerth der Abscisse $= \frac{3}{2}$; folglich ist 2x oder die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten der krummen Linie für den Punkt c der Abscisse = 3, und also identisch mit der constanten Stärke des Wachsens der Coordinaten einer Graden, bei welcher jede Zunahme der Ordinate dreimal so groß ist als die zugehörige Zunahme der Abscisse. Nehmen wir also lh dreimal so groß als cd oder fh, so stellen die Coordinaten der Graden fl, oder auch die zusammengehörigen Zunahmen lh und fh der Coordinaten dieser Graden diejenige Stärke des Wachsens anschaulich dar, welche für die Coordinaten der krummen Linie im Punkte f eingeschlossen ruht.

Es ist auch leicht zu sehen, daß, so wie die Coordinaten der geraden Linie ge diejenige Stärke des Wachsens als eine ausgeführte enthalten, welche für die Coordinaten der krummen Linie im Punkte e momentan vorhanden war, so auch die gerade eg selbst diejenige Richtung als eine zur Ausführung gekommene enthält, welche die krumme Linie momentan gerade im Punkte e hatte, oder daß die gerade Linie eg eine Tangente der krummen Linie im Punkte e ist. Denn durch die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten einer geraden Linie eg, oder, was dasselbe ist, durch den Bruch $\frac{gk}{ek}$ als Differenzquotient ihrer Coordinaten ist der Winkel gek, den die Grade eg mit der Abscisse bildet, folglich überhaupt ihre Richtung völlig bestimmt. Ist die verhältnißmäßige

Stärke des Wachsens der Coordinaten einer Linie nur momentan, so ist auch ihre Richtung nur momentan, aber nichtsdestoweniger die Richtung immer noch durch die Stärke des Wachsens der Coordinaten, und umgekehrt die Letztere durch die Richtung völlig bestimmt, da ja nur durch das Vorhandensein einer momentanen Richtung eine momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten überhaupt als möglich gedacht werden kann. Es ist einleuchtend, daß durch die Bestimmung der momentanen Stärke des Wachsens der Coordinaten einer krummen Linie auch die Mittel gegeben sind, eine Tangente an die krumme Linie zu ziehen, wie denn auch das Problem der Tangenten als erste Veranlassung zur Entwickelung der Grundbegriffe der Differentialrechnung gedient hat.

§. 32.

Allgemeine Betrachtungen über den Grenzwerth des Differenzquotienten.

Das Verfahren, welches in den vorhergehenden Beispielen angewendet worden ist, um für zwei ungleichmäßig wachsende Größen, bei denen die das Gesetz ihrer Abhängigkeit angebende Function als bekannt vorausgesetzt war, die momentane verhältnißmäßige Stärke ihres Wachsens allgemein für alle Werthe der willkürlich Veränderlichen zu finden, enthält im Wesentlichen das ganze Geheimniß der Differentialrechnung, das Geheimniß, durch welches es der Mathematik möglich geworden ist, sich in das Innere des Flusses der stetigen Veränderung zu versetzen, und den einzelnen flüchtigen Moment in derselben zu ergreifen, und seinem Größenwerthe nach zu bestimmen. Das Allgemeine dieses Verfahrens ist folgendes: Da es auf Bestimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens ankommt, so muß man nothwendig die Größen überhaupt wachsen lassen, oder ihnen zusammengehörige Zunahmen ertheilen, und dieselben mit einander vergleichen. Da aber die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens stetig veränderlich ist, so sind alle beliebigen wirklichen Zunahmen zu diesem Zwecke ab-

ſolut unbrauchbar. Man müßte vielmehr, um durch das Verhältniß oder den Quotienten zuſammengehöriger Zunahmen die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens ausdrücken zu können, dieſe Zunahmen ins Unendliche verkleinern, oder ſie völlig wieder aufheben und annulliren. Und während dadurch, daß die Zunahmen annullirt werden, der geſuchte Größenwerth auch verſchwinden zu müſſen ſcheint, ſo ſehen wir, daß derſelbe ſich vielmehr erhält und herſtellt in dem Grenzwerth, dem ſich der Quotient der Zunahmen bei einer endlos fortgeſetzten Verkleinerung der Zunahmen ohne Ende immer mehr nähert. Es werden Zunahmen geſetzt, und dieſelben werden, indem man den Grenzwerth des Quotienten der Zunahmen als das geſuchte Reſultat anſpricht, in dem Reſultate wieder aufgehoben. Da die Natur des vorliegenden Problems es mit ſich bringt, daß nothwendig Zunahmen gedacht werden müſſen, dieſelben aber auch zugleich das Reſultat verfälſchen, ſo iſt die Auflöſung des Problems ganz naturgemäß, wenn man Zunahmen ſetzt, die als eine falſche Vorausſetzung in dem Reſultate wieder aufgehoben erſcheinen. Die wirklichen Zunahmen dienen dabei blos als ein Gerüſte, an welches das aufzubauende Reſultat ſich anlehnt, und welches nach Schließung des Reſultates wieder abgebrochen wird.

Man wird bemerkt haben, daß dieſes Reſultat gewonnen wird durch ein Aufeinanderbeziehen ſehr heterogener Begriffe, des Begriffs eines anſchaulichen Continuums einerſeits, und des Begriffs einer Function anderſeits, d. h. einer irgendwie arithmetiſch zuſammengeſetzten Form, in welcher natürlich die Größen immer nur als Zahlen gedacht werden können. Das Wachſen der Continua für ſich betrachtet liefert einen Inhalt, der keine Größenbeſtimmung zuläßt, und das Wachſen der Zahlen in der Function für ſich betrachtet liefert einen Größenwerth, der keinen Inhalt hat, und nur die Beziehung beider aufeinander, und die Nachweiſung, daß beide ſich decken, gibt einen nach Form

und Inhalt, nach Größe und Bedeutung völlig bestimmten Ausdruck, nämlich den die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens angebenden Grenzzahlenwerth des Differenzquotienten.

Die wirkliche Auffindung des Grenzwerthes, welcher aus dem Differenzquotienten einer Function von x hervorgeht, und welcher natürlich immer vorhanden sein muß bei allen ungleichmäßig Wachsenden, oder überall, wo eine Function von x nicht von der Form $ax + C$ ist, beruht im Wesentlichen, sobald die Function gegeben ist, immer auf demselben Verfahren. Man denkt das x um einen allgemein ausgedrückten Zahlenwerth wachsend, welcher k heißen möge, und unterwirft nun die zweitheilige Größe $x + k$ allen denjenigen Operationen, welche durch die gegebene Function für x selbst vorgeschrieben sind. Zieht man alsdann von dem dadurch erhaltenen Ausdruck die ursprünglich gegebene Function ab, so hat man in dem Rest diejenige Zunahme der Function oder der abhängig Veränderlichen, welche der Zunahme k der willkürlich Veränderlichen zugehörig ist. Wird die erstere Zunahme durch die letztere, durch k, dividirt, so wird in dem so gebildeten Differenzquotienten auf mehr oder weniger einfache Weise, sei es durch Ausführung der für die zweitheilige Größe $x + k$ vorgeschriebenen Operationen oder durch leichte Umformungen, eine gewisse Function von x kenntlich gemacht werden können, welcher sich der Differenzquotient mit Verkleinerung des k ohne Ende nähert, und welche von der Größe der Zunahme k unabhängig ist, und diese Function ist der Grenzwerth des Differenzquotienten. Wenn wir eine Function von x eine gegebene nennen, so setzen wir dabei voraus, daß sämmtliche mit der veränderlichen Zahl x in Verbindung mit andern constanten Nebenzahlen anzustellende Rechnungsoperationen vorgeschrieben und gegeben sein, und betrachten eine Function von x nicht als gegeben, sobald sie nur durch ein bloßes Wort wie $\sin x$ oder $\log x$ gegeben ist, es sei denn, daß dabei die ganze

Folge von Rechnungsoperationen, welche durch dieses Wort kurz bezeichnet werden sollen, als schon bekannt vorausgesetzt wird.

§. 33.

Grenzwerth des Differenzquotienten der allgemeinen Potenzfunction.

Wir wollen nun zunächst, theils um das eben beschriebene allgemeine Verfahren zur Auffindung des Grenzwerthes des Differenzquotienten noch an einem Beispiel zu erläutern, theils um in der hier zunächst noch folgenden allgemeinen Betrachtung der Differential- und Integralrechnung bei der Wahl der Beispiele in nicht zu enge Grenzen eingeschlossen zu sein, den Grenzwerth des Differenzquotienten einer etwas mehr verallgemeinerten Function aufstellen. Wir wählen hierzu die allgemeine Potenzfunction, worunter man einen beliebigen aber constanten Potenzgrad einer veränderlichen Zahl x versteht, und die durch x^m vorgestellt werden soll. Denkt man sich, daß die Zahl x um die Zahl k gewachsen sei, so ist der Werth der Function $(x+k)^m$. Zieht man davon die ursprüngliche Function x^m ab, so hat man in dem Rest $(x+k)^m - x^m$ diejenige Zunahme der abhängig Veränderlichen, welche der Zunahme k der willkürlich Veränderlichen zugehörig ist. Folglich ist $\frac{(x+k)^m - x^m}{k}$ der Differenzquotient. Damit dieser Differenzquotient für ein annullirtes k nicht in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergehe, welches offenbar geschehen würde, wenn man unmittelbar in der vorliegenden Form des Differenzquotienten die Zahl k annullirte, und damit die bestimmte von k unabhängige Function von x, welche der Grenzwerth dieses Differenzquotienten ist, sich ausscheiden lasse, muß man die für die zweitheilige Größe $x+k$ vorgeschriebene Potenzirung ausführen. Der Ausdruck $(x+k)^m$ stellt sich nach dem binomischen Lehrsatz, den wir als bekannt annehmen wollen, in folgender Reihe dar:

$$(x+k)^m = x^m + \frac{m}{1} \cdot x^{m-1} \cdot k + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot x^{m-2} \cdot k^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot x^{m-3} \cdot k^3 + \ldots.$$

In dieſer Reihe rechts vom Gleichheitszeichen enthalten, was für unſern Zweck weſentlich iſt zu bemerken, alle Glieder mit Ausnahme des erſten die Zahl k als Factor, und zwar mit nach der natürlichen Zahlenreihe ſteigenden Potenzgraden. Iſt m eine ganze poſitive Zahl, ſo iſt die Reihe endlich, und hat m + 1 Glieder. Iſt m eine gebrochene oder negative Zahl, ſo geht die Reihe nach dem vorliegenden Geſetz ins Unendliche. Das erſte Glied der Reihe enthält blos die urſprüngliche Function x^m, alſo den Zahlenwerth der abhängig Veränderlichen, welcher dem Zahlenwerth x der willkürlich Veränderlichen zugehörig iſt. Nehmen wir dieſes erſte Glied von der Reihe weg, ſo ſtellt die Summe aller übrigbleibenden Glieder der Reihe die Zunahme vor, welche die abhängig Veränderliche dadurch erhalten hat, daß die willkürlich Veränderliche um die Zahl k gewachſen iſt. Der Ausdruck

$$\frac{\frac{m}{1} \cdot x^{m-1} \cdot k + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot x^{m-2} \cdot k^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot x^{m-3} \cdot k^3 + \ldots.}{k}$$

oder nach Hebung des Bruches durch k der Ausdruck

$$\frac{m}{1} \cdot x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot x^{m-2} \cdot k + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot x^{m-3} \cdot k^2 + \ldots$$

iſt alſo der Differenzquotient der beiden Veränderlichen x und x^m. In dieſem allgemeinen Ausdruck des Differenzquotienten enthalten alle Glieder, wie viele deren auch ſein mögen, mit Ausnahme des erſten den Factor k. Läßt man alſo k in Null übergehen, ſo fallen alle auf das erſte folgenden Glieder, als den Factor 0 enthaltend, weg, und das erſte Glied $m x^{m-1}$ iſt der Grenzwerth des Differenzquotienten. Wir ſehen alſo, daß man allgemein den Grenzwerth des Differenzquotienten einer Potenzfunction erhält, wenn man den Potenzgrad der willkürlich Veränderlichen

um eine Einheit vermindert, und die so erhaltene Potenz mit dem ursprünglichen Exponenten der gegebenen Potenzfunction multiplicirt. Sind also x und x^2 zwei Veränderliche, so ist $3x^2$ der Grenzwerth ihres Differenzquotienten.

Hätte die Potenzfunction noch irgend einen beliebigen constanten Factor bei sich gehabt, und wäre ax^m gewesen, so würde dies, wie leicht zu sehen, in dem Differenzquotienten weiter keine Veränderung hervorgebracht haben, als daß die Zahl a ebenfalls als Factor zu demselben hinzugetreten wäre. Denn indem x in $x+k$ übergeht, verwandelt sich die gegebene Function ax^m in $a(x+k)^m$. In der vorher angegebenen Reihe, welche die Entwickelung der Potenz $(x+k)^m$ ist, wird nun jedes Glied der Reihe noch mit dem Factor a multiplicirt erscheinen müssen, und alles Uebrige ungeändert bleiben. Und folglich wird auch bei der Annullirung von k nur das erste Glied der Reihe, welches jetzt amx^{m-1} ist, als Grenzwerth des Differenzquotienten stehen bleiben. Sind also z. B. x und $2x^5$ die beiden Veränderlichen, so ist $5.2x^{5-1}$ oder $10x^4$ der Grenzwerth ihres Differenzquotienten.

Der binomische Lehrsatz, aus welchem hier die Regel zur Bildung des Grenzwerthes des Differenzquotienten einer Potenzfunction abgeleitet ist, hat nun bekanntlich seine Geltung für alle Arten von Exponenten, für positive und negative sowohl, als für ganze und gebrochene. Folglich hat auch die hier abgeleitete Regel allgemeine Geltung für alle Arten von Exponenten. Wäre also z. B. die gegebene Function $8x^{\frac{1}{2}}$, so wäre der Grenzwerth des Differenzquotienten $\frac{1}{2}.8x^{\frac{1}{2}-1}$ oder $4x^{-\frac{1}{2}}$, und für die Function $3x^{-2}$ wäre derselbe $-2.3x^{-2-1}$ oder $-6x^{-3}$ ꝛc. Wollte man die in der niederen Analysis gegebenen Beweise des binomischen Lehrsatzes für gebrochene und negative Exponenten nicht gelten lassen, wie sie denn vielfältig angezweifelt worden sind, so schadet dies der Allgemein-

gültigkeit der hier gegebenen Regel nichts, weil man, wie wir in einem späteren Capitel sehen werden, diese Regel als für alle Arten von Exponenten geltend auch dann noch nachweisen kann, wenn man den binomischen Lehrsatz nur als für ganze positive Exponenten bewiesen ansehen will, und sie außerdem auch ohne alle Beziehung auf diesen Lehrsatz abgeleitet werden kann. Wir werden uns aber deswegen, weil man diese Regel auch auf andere vielleicht befriedigendere Voraussetzungen gestützt beweisen kann, in dem vorläufigen uneingeschränkten Gebrauche derselben nicht geniren lassen.

Hätte endlich die Function ax^m noch einen constanten Bestandtheil bei sich gehabt, und wäre $ax^m + C$ gewesen, so wäre der Grenzwerth des Differenzquotienten derselbe geblieben wie für die Function ax^m. Denn ließe man x in $x + k$ übergehen, so würde die Function $a(x+k)^m + C$. Wenn man nun wie vorher den Ausdruck $a(x+k)^m$ in einer Reihe entwickelte, so würde C als constantes Glied dieser Reihe zugesetzt erscheinen; und durch Abziehen der ursprünglichen Function $ax^m + C$ würde C wieder wegfallen, und der Differenzquotient gerade so ausfallen, als wenn die Function blos ax^m gewesen wäre. Mithin ist dasselbe auch der Fall mit dem Grenzwerth des Differenzquotienten. Mag also die Function ax^m oder $ax^m + C$ sein, so ist in beiden Fällen der Grenzwerth des Differenzquotienten max^{m-1}, wie wir auch schon im ersten Capitel sahen, daß bei gleichmäßig wachsenden Größen, mag ihre Function ax oder $ax + C$ sein, der Differenzquotient derselbe und gleich der Zahl a ist.

§. 34.

Algebraische Bezeichnung des Grenzwerthes des Differenzquotienten.

Wir haben noch die eigenthümliche Wort- und Zeichensprache anzugeben, welche man für diese bis jetzt entwickelten Eigenschaften des ungleichmäßigen Wachsens und die darauf bezüglichen Operationen in Gebrauch genommen

hat. Wir wollen uns dabei im Wesentlichen auf die von Leibnitz eingeführte Terminologie und algebraische Bezeichnungsweise beschränken, weil dieselbe am meisten Anerkennung und Ausbreitung erhalten hat, und wenn sie nicht ganz allgemein angenommen ist, es wenigstens verdiente. Der Grenzwerth des Differenzquotienten ist, wie man aus dem Vorhergehenden weiß, eine von dem Differenzquotienten selbst, von dem er abgeleitet ist, durchaus verschiedene Sache, und es bedarf also auch einer Bezeichnung, welche den Ersteren ein für allemal von dem Letzteren unterscheidet. Nun ist, wenn eine Function von x z. B. ax^4 gegeben wäre, der Differenzquotient der beiden Veränderlichen x und ax^4 zu bezeichnen durch $\frac{\Delta ax^4}{\Delta x}$. Und da der Grenzwerth dieses Differenzquotienten gemäß der im vorigen Paragraph angegebenen Regel $4ax^3$ ist, so hätte man, wenn man etwa, wie häufig geschieht, durch Vorsetzen des Wortes Limen die Grenze eines Ausdrucks bezeichnete, diesen Zusammenhang sehr deutlich ausdrücken können durch die analytische Gleichung $\mathrm{Lim}\,\frac{\Delta ax^4}{\Delta x} = 4ax^3$. Leibnitz wählte eine einfachere und kürzere Bezeichnung, und unterschied den Grenzwerth des Differenzquotienten von dem Differenzquotienten selbst kurzweg dadurch, daß er nur statt des im Letzteren vorkommenden Buchstabens Δ ein kleines lateinisches d setzte, so daß also $\frac{dax^4}{dx}$ gerade so viel heißen soll als $\mathrm{Lim}\,\frac{\Delta ax^4}{\Delta x}$, und daß man die analytische Gleichung aufstellen kann $\frac{dax^4}{dx} = 4ax^3$. Er bildete gleicherweise auch ein einfaches Wort für den Grenzwerth des Differenzquotienten und nannte ihn Differentialquotient. Durch diese Benennung und Bezeichnung des Grenzwerthes des Differenzquotienten wird derselbe von dem Differenzquotienten selbst einerseits streng geschieden,

und durch das Entsprechende in den Ausdrücken anderseits so eng damit verbunden, wie es die große Verwandtschaft beider nach Entstehung und Bedeutung wünschenswerth macht. Und obgleich der Differentialquotient nicht als ein Quotient von wirklichen Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden betrachtet werden kann, so ist doch das in seine Benennung aufgenommene Wort Quotient, und die in seiner Bezeichnung erhaltene Form des Quotienten sehr passend, weil seine Bedeutung wenigstens immer die eines Quotienten zusammengehöriger Zunahmen ist, indem er eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens angibt, welche doch immer als auf einem Verhältniß von Zunahmen beruhend gedacht werden muß, mag nun dies Verhältniß im Wachsen der Größen zur Ausführung kommen, oder als bloßes Bestreben vorhanden sein.

Allerdings ist dies weder die einzige noch die ganze Bedeutung, welche man dem Differentialquotient beigelegt hat, indem man diese Benennung einführte und ihn in Form eines Quotienten oder Bruches schrieb. Man beschränkte sich nicht darauf, daß er nur insofern die Bruchform habe, als der Sinn, der ihm als Ausdruck einer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens unterzulegen ist, sich nicht anders als durch ein Verhältniß von Zunahmen aussprechen läßt, sondern man betrachtete ihn gewissermaßen als einen Quotienten von Größen, oder man sah Zähler und Nenner einzeln als eine Art Größen an, welche, da sie doch keine wirklichen Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden sein konnten, als unendlich kleine Zunahmen derselben bezeichnet, und zum Unterschied von allen Differenzen oder Zunahmen Differentiale genannt wurden. In dem Differentialquotient $\frac{d\,a\,x^4}{d\,x}$ nannte man demgemäß den Zähler das Differential von $a\,x^4$ und den Nenner das Differential von x. Unter diesen Differentialen, als isolirten Theilen des Differentialquotienten, dachte man sich eine Art Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden, welche zwar ihrem

Verhältniß nach einen wirklichen Größenwerth bezeichnen, und Beziehung haben auf einen mathematischen Begriff, die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens, ihrer Größe nach aber, die von unangebbarer Kleinheit sein soll, nur Beziehung haben auf die Art des Daseins eines rein momentanen Zustandes, wodurch denn der mathematische Theil des Problems mit dem logischen äußerlich vermengt erscheint. Wir bleiben aber vorerst noch bei der blos mathematischen Untersuchung unseres Problems stehen, welche nur herauszubringen hat, wie man Größen, die von andern abhängig sind, ihrem Werthe nach berechnen, und die Wahrheit und Richtigkeit des zu dieser Berechnung eingeschlagenen Weges streng beweisen kann. Von der eben angezogenen Bedeutung des Differentials als einer unendlich kleinen Zunahme wird weiter unten ausführlicher gehandelt werden. Desgleichen auch von einer andern Behandlung der Theile des Differentialquotienten als selbständiger Größen, wobei dieselben als endliche wirkliche Größen erscheinen, und welche mit der Isolirung und Verselbständigung der Differentiale als unendlich kleiner Zunahmen durchaus nicht zu verwechseln ist. Für uns ist jetzt zunächst der Differentialquotient nur ein anderes Wort für den Grenzwerth des Differenzquotienten, und seine Bezeichnung in Bruchform ein untrennbares Zeichen, und wir befinden uns sonach mit den neuen Worten und Zeichen noch auf wohl bekanntem Gebiete.

§. 35.

Das Differentiiren und die Differentialgleichungen.

Die Operation, durch welche man aus einer Function von x auf die oben beschriebene Weise den Differentialquotienten dieser Function ableitet, nennt man das Differentiiren. Eigentlich sollte man statt Differentialquotient der Function von x sagen der Differentialquotient der beiden Veränderlichen, des x als der willkürlich Veränderlichen, und der Function von x als der abhängig Veränderlichen.

Da aber durch die Natur der Function der Differentialquotient bestimmt ist, und einer bestimmten Function von x eine andere bestimmte Function als Differentialquotient zugehörig ist, so sagt man kurzweg der Differentialquotient einer Function. Ist der Differentialquotient einer Function gefunden, so kann die Regel des Differentiirens dieser Function, wie alle Operationsregeln der allgemeinen Arithmetik, in einer Gleichung ausgesprochen werden. Da wir z. B. oben gefunden haben, daß aus der Function ax^m als Differentialquotient folgte die Function max^{m-1}, so drückt man diese Folge durch die Gleichung $\frac{dax^m}{dx} = max^{m-1}$ aus. Diese Gleichung spricht nur eine Abhängigkeit von Operationen und keine Abhängigkeit von Größen aus, und ist also eine analytische Gleichung im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes, worunter eine Gleichung verstanden wird, die auf der einen Seite des Gleichheitszeichens gewisse an bestimmten Größenformen vorzunehmende Operationen, und auf der andern Seite des Gleichheitszeichens das Resultat dieser Operationen enthält. Jede Gleichung, in welcher das Zeichen des Differentialquotienten einer Function der willkürlich Veränderlichen gleichgesetzt erscheint, gehört zu denjenigen, welche man Differentialgleichungen nennt. Unsere obige Gleichung ist demnach eine analytische Differentialgleichung. Alle Regeln des Differentiirens von Functionen können in solchen analytischen Differentialgleichungen gegeben werden. Die Aufstellung dieser Gleichungen für beliebige Functionen bildet den formellen oder rein operativen Theil der Differentialrechnung.

Wird eine abhängig Veränderliche, deren fließender Zahlenwerth durch eine Function der willkürlich Veränderlichen x, z. B. durch die Function $2x^3$, bestimmt ist, noch durch ein besonderes einfaches Zeichen, etwa durch den Buchstaben y vorgestellt, und bildet man demgemäß die unbestimmte Gleichung $y = 2x^3$, so bedeutet natürlich der Differentialquotient der Veränderlichen x und y, ausge-

drückt durch $\frac{dy}{dx}$, dasselbe, was der Differentialquotient der Veränderlichen x und $2x^3$ oder das Zeichen $\frac{d2x^3}{dx}$ bedeutet, da y nur ein anderes Zeichen für $2x^3$ ist. Und da $\frac{d2x^3}{dx} = 6x^2$ ist, so folgt aus der Gleichung $y = 2x^3$ die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 6x^2$. Man erhält auf diese Weise zwei zusammengehörige Gleichungen, eine ursprüngliche, welche die Art der Abhängigkeit zweier Veränderlichen, wie hier der Veränderlichen x und $2x^3$ oder oder x und y, angibt, und eine daraus folgende Differentialgleichung, welche angibt, durch welche Function von x die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen x und $2x^3$ ausgedrückt wird. Eine Differentialgleichung der Art wie $\frac{dy}{dx} = 6x^2$ gibt natürlich für sich betrachtet keine Regel des Differentiirens einer Function, da in ihr nicht gesagt ist, welche Function von x es sei, die den Differentialquotient $6x^2$ habe, und sie ist also auch keine analytische Differentialgleichung. Nur in Verbindung mit der ursprünglichen Gleichung $y = 2x^3$, gibt die aus ihr folgende Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 6x^2$ eine Regel des Differentiirens der Function $2x^3$. Es versteht sich, daß man aus einer unbestimmten Gleichung die ihr zugehörige Differentialgleichung nur ableiten, oder wie man sagt, die Gleichung differentiiren kann, wenn man schon weiß, welchen Differentialquotient die in der unbestimmten Gleichung gegebene Function von x liefert. Es müßte denn sein, daß man die Regel des Differentiirens einer Function selbst erst auf die Weise entwickelte, daß man von der Form einer unbestimmten Gleichung ausginge. Dieses Verfahren ist aber, obgleich häufig angewandt, gar nicht zu billigen, indem es den Anfänger mit

ganz überflüssigen nicht zur Sache gehörenden Abstractionen und einem unnützen Formalismus belästigt.

Insofern man unter y oder f(x) nur irgend eine nicht weiter bestimmte Function von x sich denkt, so sind die Formen $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{df(x)}{dx}$ nur Zeichen für den allgemeinen Begriff des Differentialquotienten einer Function von x überhaupt. Solcher Zeichen für den allgemeinen Begriff des Differentialquotienten einer Function ist man allerdings benöthigt, nicht blos um gewisse von allen Functionen geltende Regeln der Differential- und Integralrechnung in der Zeichensprache und in Formeln darzulegen, sondern auch in allen Fällen, wo der Differentialquotient zweier Veränderlichen gegeben ist, ohne daß man die das Gesetz der Abhängigkeit dieser Veränderlichen angebende Function kennt, und man also die Veränderlichen nur durch unabhängige Zeichen wie x und y oder x und f(x) vorstellen, und ihren gegebenen Differentialquotient nur einem allgemeinen Ausdruck, wie $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{df(x)}{dx}$, gleichsetzen kann.

§. 36.

Allgemeiner Sinn des Differentialquotienten.

Wenn man sich unter einem Differentialquotient etwas Bestimmtes denken will, so muß er in der Weise gedeutet werden, wie es für den Grenzwerth des Differenzquotienten, der ja dasselbe ist, oben schon an einigen Beispielen gezeigt worden ist. Wir kommen hier nochmals in größerer Allgemeinheit auf diesen Sinn des Differentialquotienten und seine Uebersetzung in Worte zurück, weil diese für die Evidenz der Resultate unserer Wissenschaft von der höchsten Wichtigkeit ist. Jede zurückbleibende Unklarheit in diesen Dingen kann blos dadurch hervorgebracht werden, daß man diese Uebersetzung unterlassen hat. Der Differentialquotient drückt eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen aus, und diese kann

nicht anders ihrer Bestimmtheit nach ausgesprochen werden als durch gleichmäßig Wachsende, oder durch Zurückführung auf eine constante verhältnißmäßige Stärke des Wachsens. Der Sinn des Differentialquotienten, der bei ungleichmäßig Wachsenden überall als eine Function der willkürlich Veränderlichen erscheint, ist nun allgemein folgender: Wenn die in irgend einem Punkt der willkürlich Veränderlichen x vorhandene verhältnißmäßige Stärke des Wachsens unverändert bliebe, so würde eine Zunahme der abhängig Veränderlichen so viel mal so groß sein als die zugehörige Zunahme der willkürlich Veränderlichen, wie der Zahlenwerth angibt, den man erhält, indem man in den Differentialquotient statt x denjenigen bestimmten Zahlenwerth einsetzt, welchen die willkürlich Veränderliche in dem angenommenen Punkt erreicht hat. Ist also z. B. der Differentialquotient zweier Veränderlichen x und y gleich $6x^2$, ausgedrückt durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 6x^2$, so ist in dem Punkte, wo die willkürlich Veränderliche x den Zahlenwerth 3 hat, die Stärke des Wachsens so groß, daß, wenn sie unverändert gedacht würde, die Zunahme der abhängig Veränderlichen 6.3^2 oder 54 mal so groß sein würde als die zugehörige Zunahme der willkürlich Veränderlichen. In dem Punkte, wo x den Zahlenwerth $\frac{1}{4}$ hat, würde unter denselben Voraussetzungen eine Zunahme der abhängig Veränderlichen $6.\left(\frac{1}{4}\right)^2$ oder $\frac{3}{8}$ mal so groß sein als die zugehörige Zunahme der willkürlich Veränderlichen ꝛc.

Im gemeinen Leben bezeichnet man jede verhältnißmäßige Stärke des Wachsens auf die Weise, daß man die willkürlich Veränderliche um die Zahl 1 wachsend annimmt, und angibt, wie groß die zugehörige Zunahme der abhängig Veränderlichen ist, z. B. eine Geschwindigkeit, indem man angibt, wie groß der in einer gewissen Zeiteinheit zu-

rückgelegte Raum ist. Da die Zunahme der willkürlich Veränderlichen ganz beliebig ist, so kann sie auch immer gleich 1 angenommen werden, und der Differentialquotient erhält dadurch eine sehr faßliche und anschauliche Bedeutung. Unter derselben Voraussetzung wie oben, nämlich daß man in den Differentialquotient statt x den Zahlenwerth setzt, welchen die willkürlich Veränderliche in einem bestimmten Punkt erreicht hat, kann man kurz so sagen: Der Differentialquotient enthält die Anzahl der Einheiten, um welche die abhängig Veränderliche wachsen würde bei einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen = 1, wenn die vorhandene Stärke des Wachsens ungeändert bliebe.

Es ist noch der negativen Differentialquotienten und ihrer Bedeutung zu gedenken. Man weiß, daß bei zwei Veränderlichen mit einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen im Allgemeinen sowohl eine Zunahme als eine Abnahme der abhängig Veränderlichen verbunden sein kann. Und wenn wir gleich der Kürze wegen überall nur von zusammengehörigen Zunahmen gesprochen haben, so kann doch, wie oben (§. 13) schon angemerkt worden, diese Ausdrucksweise als beide Fälle umfassend angesehen werden, indem die Abnahme als negative Zunahme bezeichnet und mit unter den allgemeinen Begriff der Zunahme subsumirt werden kann. Ist nun mit einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen eine Abnahme der abhängig Veränderlichen verbunden, so ist auch bei ungleichmäßig Wachsenden, wie leicht zu sehen, der Differenzquotient negativ. Denn der Ausdruck für die Zunahme der abhängig Veränderlichen, in diesem Falle gebildet durch Abziehen einer größeren Zahl von der kleineren, wird negativ, und dieser durch die Zunahme der willkürlich Veränderlichen dividirt, gibt einen negativen Differenzquotienten. Da aber der Differenzquotient durch fortgesetzte Verkleinerung der Zunahmen sich seinem Grenzwerthe oder dem Differentialquotienten bis zu jedem beliebigen Grad von Genauigkeit nähern kann, und dabei immer negativ bleibt, so muß der Differential-

quotient selbst negativ sein. Und da in dem Falle, als mit einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen auch eine Zunahme der abhängig Veränderlichen verbunden ist, aus denselben Gründen der Differentialquotient positiv ist, so folgt umgekehrt, daß jeder negative Differentialquotient auf eine im Abnehmen begriffene abhängig Veränderliche hinweist. Der negative Differentialquotient ist übrigens ebenso zu deuten, wie der positive, nur daß er eine Abnahme der abhängig Veränderlichen angibt. Setzt man nämlich den Zahlenwerth, den die willkürlich Veränderliche in demjenigen Punkt erreicht hat, für welchen man die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens berechnen will, in den Differentialquotient, so gibt der negative Zahlenwerth des Differentialquotienten an, um wie viel mal die Abnahme der abhängig Veränderlichen so groß sein würde als die zugehörige Zunahme der willkürlich Veränderlichen, wenn die in diesem Punkt vorhandene Stärke des Wachsens unverändert bliebe, oder auch wie groß die Abnahme der abhängig Veränderlichen sein würde bei einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen $= 1$.

Es möge zur Erläuterung noch ein Beispiel von einem negativen Differentialquotienten folgen. Der fließende Zahlenwerth der Abscisse einer krummen Linie heiße x, und der ihrer Ordinate y, und es sei $y = \frac{1}{x}$ die Parallelcoordinatengleichung der krummen Linie. Die krumme Linie $fghi$ (Fig. 13) sei nach diesem Coordinatengesetz gebildet. Die Linie ae sei die Abscissenlinie, und im Punkt a der Anfangs- oder Nullpunkt derselben. Ist die Abscisse $ac = 1$, so ist nach unserer Gleichung die zugehörige Ordinate cg auch $= 1$. Für eine Abscisse $ad = 2$, ist die zugehörige Ordinate $dh = \frac{1}{2}$ u. s. w. Da die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ auch geschrieben werden kann $y = x^{-1}$, so fällt die gegebene Function von x, nämlich x^{-1}, unter den Be-

griff der Potenzfunction. Die aus der Gleichung $y = x^{-1}$ folgende Differentialgleichung ist also nach unserer obigen Regel $\frac{dy}{dx} = -1 . x^{-2}$ oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$. Der negative Differentialquotient $-\frac{1}{x^2}$ bezeichnet nun allgemein die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten dieser krummen Linie. Im Punkt b, wo $x = \frac{1}{2}$ sein möge, ist also der Differentialquotient $= -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

Dieser Werth des Differentialquotienten sagt gemäß der gegebenen allgemeinen Erklärung Folgendes: Für den Punkt b der Abscisse ist die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, eine Abnahme der Ordinate viermal so groß sein würde als die zugehörige Zunahme der Abscisse. Wollte man demnach diese momentane Stärke des Wachsens in den Coordinaten einer geraden Linie zur Ausführung kommen lassen, und sich veranschaulichen, so müßte die gerade Linie so liegen, daß mit jeder Zunahme der Abscisse eine viermal so große Abnahme der Ordinate verbunden wäre. Da die Linie $ab = \frac{1}{2}$ angenommen war, so ist die Ordinate $bf = 2$ und $bc = \frac{1}{2}$, und folglich enthalten die Coordinaten der geraden Linie fc diejenige Stärke des Wachsens als eine ausgeführte, welche in den Coordinaten der krummen Linie momentan für den Punkt b vorhanden ist; zugleich ist die Linie fc, wie oben bewiesen, eine Tangente der krummen Linie. Im Punkte d, wo $x = 2$ sein möge, wird der Differentialquotient $= -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$; das heißt, die für den Punkt d stattfindende Stärke des Wachsens bleibend gedacht, würde die

Abnahme der Ordinate $\frac{1}{4}$ mal so groß sein als die zugehörige Zunahme der Abscisse, oder mit einer Zunahme der Abscisse $= 1$ eine Abnahme der Ordinate $= \frac{1}{4}$ verbunden sein. Wird also dk viermal so groß genommen als dh, so ist hk eine Tangente.

Daß überall in dem Vorhergehenden, wenn kurzweg nur von Zunahmen der Veränderlichen die Rede ist, damit gemeint sind die Zahlenwerthe der Zunahmen, welche ihnen mit Einheiten ihrer Art gemessen zukommen, versteht sich von selbst, weil sonst, wenn die veränderlichen Größen ungleichartig sind, von einem Verhältniß der Zunahmen nicht die Rede sein könnte.

§. 37.

Isolirte Differentiale und die Rechnung mit denselben.

Es wird Niemandem entgangen sein, daß ein Differentialquotient, insofern man seinen Sinn aussprechen will, immer als ein Quotient von wirklichen Zunahmen erscheinen muß, nur nicht von Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden, deren momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens durch ihn gegeben wird, sondern von Zunahmen zweier gleichmäßig Wachsenden, welche ja statt der ungleichmäßig Wachsenden nothwendig überall gesetzt werden müssen, sobald man von einer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens überhaupt eine Vorstellung haben will. Wenn ich den Differentialquotient zweier ungleichmäßig Wachsenden x und y, oder den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ nur insofern als einen Bruch betrachten will, als der Sinn desselben nur durch einen Quotient von Zunahmen ausgesprochen werden kann, jedoch seinen Zähler und Nenner nicht wirkliche Größen repräsentiren lassen will, so ist dies allerdings gestattet; alsdann ist aber $\frac{dy}{dx}$ ein untrennbares

einfaches Symbol, und Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{dy}{dx}$ sind für sich isolirt genommen Nichts. Will ich aber den Differentialquotient als einen Quotient von wirklichen Größen betrachten, und die isolirten Differentiale dy und dx als wirkliche angebbare Zahlen ansehen, mit denen man rechnen kann, so steht mir das auch frei. Alsdann bedeutet das Differential der willkürlich Veränderlichen oder dx irgend eine ganz beliebige Zunahme der willkürlich Veränderlichen, und dy oder das Differential der abhängig Veränderlichen die dem dx zugehörige Zunahme einer andern Veränderlichen, die mit x gleichmäßig wachsend ist, und zwar mit derjenigen bestimmten Stärke des Wachsens, welche auch die Größen x und y haben in dem Punkte, von welchem aus die Zunahme der willkürlich Veränderlichen genommen ist. Da in diesem Falle, als der Zähler und Nenner des Differentialquotienten wirkliche Zahlen vorstellen sollen, das Differential der willkürlich Veränderlichen oder dx eine Zunahme von x selbst, dy aber nicht eine Zunahme der durch y vorgestellten Veränderlichen selbst, sondern einer andern mit x gleichmäßig wachsenden Veränderlichen ausdrückt, so wäre es allerdings wohl, um diesen Unterschied anzudeuten, besser gewesen, den Differentialquotienten der Veränderlichen y und x in der Form $\frac{dy}{\Delta x}$ zu schreiben, durch welche er schon hinlänglich von dem Differenzquotienten derselben, oder von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unterschieden gewesen wäre. Leibnitz gab aber der Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ den Vorzug wegen eines andern Gebrauches, den er von dem Zeichen dx machte, und der in der Integralrechnung zur Sprache kommen wird. Ueberhaupt ist die Sache viel zu unwichtig, als daß man sich, wie Manche gethan, veranlaßt sehen sollte, diese Veränderung der Bezeichnungsweise in Vorschlag oder in Anwendung zu bringen.

Die Differentiale dy und dx in ihrer Isolirung sind wirkliche Zahlen und wirkliche Zunahmen, aber nur hypothetische Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden x und y, Zunahmen nämlich, welche die Veränderlichen x und y unter der Voraussetzung, daß die momentane Stärke des Wachsens zur Ausführung käme, annehmen würden. Wären also z. B. die Veränderlichen y und x die Coordinaten einer krummen Linie, so würden dy und dx nicht zusammengehörige Zunahmen der Coordinaten der krummen Linie, sondern zusammengehörige Zunahmen der Coordinaten der Tangente vorstellen, weil in den Coordinaten der Tangente diejenige Stärke des Wachsens zur Ausführung kommt, welche die Coordinaten der krummen Linie im Berührungspunkt der Tangente momentan haben. Sollen die Differentiale dy und dx überhaupt Größen sein, so können sie ohnedies niemals zusammengehörige Zunahmen der Veränderlichen y und x selbst sein, da sie von solchen Zunahmen oder von Δy und Δx absolut geschieden sind; sie müssen also nur hypothetische Zunahmen von y und x in dem angegebenen Sinne sein.

Wenn es für die Methode und für die Anwendung der Differentialrechnung bequem erscheint, den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ nicht als ein untrennbares Zeichen, sondern als einen Quotienten wirklicher Größen zu behandeln, und die isolirten Theile dy und dx des Bruches $\frac{dy}{dx}$ wie wirkliche Zahlen den Rechnungsoperationen zu unterwerfen, so ist also dagegen nicht das Geringste einzuwenden. Die isolirten Differentiale der Veränderlichen y und x bedeuten alsdann jene hypothetischen Zunahmen von y und x, die beliebig groß oder klein angenommen werden können. Es kann dadurch unmöglich ein Irrthum entstehen, weil man hierbei den Differentialen auch in ihrer Allgemeinheit diejenige Bedeutung gibt, die man ihnen doch überall unterlegen muß, wo man in einem bestimmten Falle sagen will,

was man sich unter dem Werthe eines Differentialquotienten denkt. Hat man also die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 2x$, und versteht man unter dy und dx die Zahlenwerthe jener zusammengehörigen hypothetischen Zunahmen von y und x, so kann man auch z. B. den Nenner dx auf der einen Seite der Gleichung wegschaffen, und schreiben $dy = 2x.dx$ und dergl. mehr. Aber auch nur unter dieser Bedingung, daß dy und dx Zahlenwerthe von beliebiger Größe sind, hat es einen Sinn, die Rechnungsoperationen auf dieselben anzuwenden. Sobald man aber unter den Differentialen zweier Veränderlichen gewissermaßen-Zunahmen der Veränderlichen selbst versteht, die dann doch wieder keine wirklichen Zunahmen sein dürfen, und die man deswegen unendlich klein nennt, und also dabei solche Zunahmen im Sinne hat, die zugleich das Vorhandensein eines rein momentanen Zustandes der Stärke des Wachsens begreiflich machen sollen, so bringt man überflüssigerweise etwas ganz Unfaßliches und Nebuloses in diese Worte und Bezeichnungen, indem man die Bedingungen der Denkbarkeit eines rein momentanen Zustandes in die Bedingungen seiner Berechnung hineinwirrt, womit doch der mathematischen Behandlung des Problems nichts geholfen ist. Die Mathematik kann und soll überall in ihrem beweisenden Gange auf klaren und faßlichen Vorstellungen fußen, und braucht das ganze Nest von Widersprüchen, welche in dem Begriffe der stetigen Veränderung liegen, nicht auf jedem Tritt und Schritt mit sich herumzuschleppen. Genug, daß diese Widersprüche ein für allemal zugestanden und anerkannt sind; den weiteren Verlauf der Entwickelung kann man ganz faßlichen Begriffen und Zeichen, welche der Natur der Sache gemäß gebildet sind, und über deren Sinn man sich verständigt hat, ruhig überlassen.

Die Uebelstände der Vorstellungsweise, nach welcher man das in den Calcül aufgenommene isolirte Differential

einer Veränderlichen, wie dx, als eine unendlich kleine Zahl betrachtet, kommen erst recht zum Vorschein, wenn man, wie es in dem weiteren Verlaufe der Differentialrechnung unvermeidlich wird, auch von den höheren Potenzen der unendlich kleinen Zahl dx zu sprechen hat. Die zweite Potenz von dx muß dann nothwendig eine Zahl sein, welche gegen dx selbst unvergleichbar klein ist, oder welche unendlich vielmal kleiner ist als die unendlich kleine dx. Die dritte Potenz von dx muß ebenso eine Zahl sein, die unendlich vielmal kleiner ist als diejenige, die ihrerseits auch schon unendlich vielmal kleiner ist als die unendlich kleine dx u. s. w. Hierbei geht dem Denken der Athem bald aus. Und wenn man die successiven Potenzen von dx kurzweg unendlich kleine Zahlen der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Ordnung nennt, und nun damit wie mit bekannten Dingen umgeht, so sieht man, daß auch in diesem Falle ebenda, wo die Begriffe zu fehlen anfangen, gerade zur rechten Zeit ein Wort sich einstellt. Von dem sehr einfachen und bestimmten Sinn der höheren Differentiale wird weiter unten in der zweiten Abtheilung gehandelt werden.

§. 38.

Andere Bezeichnungsweisen des Differentialquotienten.

Es sind außer der von Leibnitz eingeführten Wort- und Zeichensprache noch mannichfache andere Benennungen und Bezeichnungsweisen gebraucht worden, um einen momentanen Größenzustand der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens auszudrücken. Da dieselben aber sämmtlich keine allgemeinere Geltung und Anerkennung erlangt haben, selbst die von Newton erfundenen nicht, die nur in dessen Vaterland einige Zeit vorherrschend im Gebrauch waren, so ersparen wir uns die Erklärung derselben. Nur Eine Bezeichnung des Differentialquotienten kommt neben der Leibnitz'schen in den heutigen Schriften noch vor, und diese mag kurz erwähnt werden. Wenn unter y oder $f(x)$

irgend eine Function der Veränderlichen x vorgestellt wird, so ist nach Leibnitz unter $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{df(x)}{dx}$ der Differentialquotient dieser Function zu verstehen. Die andere gebräuchliche Bezeichnung des Differentialquotienten einer durch f(x) ausgedrückten Function von x besteht darin, daß man den Buchstaben, welcher als Functionsbezeichnung dient, wie hier den Buchstaben f, accentuirt, so daß man unter f'(x) den Differentialquotienten der Function f(x) zu denken hat. Ebenso würde φ'(x) den Differentialquotienten einer durch φ(x) vorgestellten Function von x bedeuten. Die Zeichen f'(x), φ'(x) und dergl. werden nicht blos gebraucht, um den allgemeinen Begriff des Differentialquotienten einer Function von x auszudrücken, sondern auch in den Fällen, wo eine bestimmte Function von x gegeben ist, die der Differentialquotient irgend einer andern bekannten oder unbekannten Function von x sein soll, was in der Leibnitz'schen Bezeichnung durch die Differentialgleichungen dargestellt wird. So wie man durch die Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ oder $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$ ausspricht, daß $3x^2$ der Differentialquotient einer durch y oder f(x) vorgestellten Function von x sei, so würde man die Gleichung $f'(x) = 3x^2$ ebenfalls so zu verstehen haben, daß $3x^2$ der Differentialquotient der Function f(x) sei.

Um den Werth auszudrücken, den der Differentialquotient einer durch f(x) vorgestellten Function von x annimmt, indem man statt der Veränderlichen x irgend einen bestimmten Zahlenwerth a setzt, schreibt man f'(a). Demgemäß würde man auch, um den Werth anzudeuten, den der Differentialquotient der Function f(x) annimmt, indem man o statt x in demselben setzt, schreiben f'(o). Wäre z. B. $\sqrt{1+x^2}$ der Differentialquotient einer Function f(x) und folglich $f'(x) = \sqrt{1+x^2}$, so würde derselbe, wenn man statt x etwa die Zahl 3 setzte, den Werth $\sqrt{10}$ an-

nehmen, und folglich $f'(3) = \sqrt{10}$ sein. Für $x = 0$ würde in diesem Falle der Differentialquotient den Werth $\sqrt{1}$ annehmen, und also hier $f'(0) = \sqrt{1}$ sein. Den Werth auszudrücken, in welchen der Differentialquotient einer Function von x für einen bestimmten Zahlenwerth des x übergeht, wäre nun freilich auch durch einen an den Leibnitzischen Symbolen des Differentialquotienten angebrachten Zusatz oder irgend eine Modification derselben möglich gewesen. Da dies aber nicht geschehen ist, so werden wir uns in Fällen dieser Art der andern Bezeichnungsweise des Differentialquotienten bedienen, ohne sonst einen Gebrauch von derselben zu machen.

Man darf übrigens nicht denken, daß grade diese kurze und bequeme Bezeichnung des Werthes des Differentialquotienten für einen bestimmten Zahlenwerth der Veränderlichen x der Grund der Einführung dieser neuen Bezeichnung gewesen sei. Man nahm vielmehr an der gewöhnlichen Bezeichnung das Aergerniß, daß der Grenzwerth des Differenzquotienten in Form eines Bruches ausgedrückt war, und als ein Quotient von Größen erschien. Anstatt nun entweder diese Bruchform als ein bloßes Erinnerungszeichen an die Entstehung und Bedeutung des Differentialquotienten anzusehen, ohne mit Zähler und Nenner als selbstständigen Zahlen zu rechnen, in welchem Falle man mit der alten Bezeichnung ebenso weit gewesen wäre, als mit der neuen, oder den Zähler und Nenner als jene oben erwähnten hypothetischen Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden gelten zu lassen, die wirkliche Zahlen sind, betrachtete man Zähler und Nenner oder die Differentiale als den ungleichmäßig Wachsenden selbst angehörige Zunahmen; und da diese nothwendig unendlich kleine Zahlen oder Nullen sein müßten, so fand man es undenkbar, und zwar mit Recht, daß ein Verhältniß von Nullen einem bestimmten Zahlenwerth gleich sein sollte. Wenn man die Sache selbst, um die es sich handelt, nämlich die Berechnung einer momentanen verhältnißmäßigen Stärke des

Wachsens, unabhängig von jedem Formalismus der Bezeichnung dargestellt hätte, so würde die Leibnitzische Bezeichnung, wenn auch nicht als eine sinnvolle, schöne und zweckmäßige, doch wenigstens als eine unschädliche und gleichgültige erschienen sein. Aber grade diese unabhängige Einsicht der Sache war nicht überall vorhanden. Worte und Zeichen vererben sich sicher und leicht, aber nicht so der Gedankenproceß, der sie geboren. Die Erklärung der Worte und Zeichen wurde als das Erste und Wesentlichste vorausgestellt. Dadurch sah man sich in die Nothwendigkeit versetzt, von einem Quotient unendlich kleiner Zunahmen oder annullirter Zahlen, als einer für das zu suchende mathematische Resultat unentbehrlichen Vorstellung Rechenschaft zu geben. Nur solchen Darstellungen gegenüber konnte eine andere Bezeichnungsweise als eine wünschenswerthe Neuerung erscheinen. Was that man also? Man nahm die bloßen Functionen in ihrer ganzen abstracten Kahlheit vor. Man zeigte, daß aus jeder Function einer Veränderlichen x, die nicht von der Form $ax + C$ ist, sich eine andere Function von x ableiten läßt, welche der Grenzwerth des Differenzquotienten der ersten Function ist. Und so stellte man zunächst das ganze Formelwesen der Differentialrechnung auf, ohne sich um Sinn und Bedeutung desselben zu bekümmern. Hierin war nun freilich nichts Widersprechendes, weil überhaupt Nichts darin war. Und um in dem Grenzwerth des Differenzquotienten nur ja nichts von einem Quotienten zurückzubehalten, setzte man $f'(x)$ statt $\frac{d f(x)}{dx}$, und sagte Ableitung statt Differentialquotient. Indem man so in dem Grenzwerth des Differenzquotienten alle berüchtigten Anstößigkeiten und damit zugleich allen Sinn und alle Bedeutung getilgt hatte, glaubte man mit diesen ausgehöhlten Worten und Zeichen der Sache einen großen Dienst geleistet zu haben. Nun kommt es aber zur Anwendung. Man muß nun entweder mit dem Problem der stetigen Veränderung der verhält-

nißmäßigen Stärke des Wachsens ganz von vorn anfangen, und dann kommen alle die Dinge, denen man so schlau ausgewichen zu sein glaubte, wieder zum Vorschein, oder man muß, was der gewöhnlichere Fall ist, in der Anwendung um so wüster, willkürlicher und principloser verfahren, je weniger man die allgemeine Natur des Problems scharf ins Auge gefaßt und methodisch entwickelt hat. Man beobachtet in dem formellen und operativen Theil der Differentialrechnung den äußeren logischen Anstand um so ängstlicher, je zügelloser man sich in der Anwendung allen Ausschweifungen des Verstandes überläßt. Neben allem diesem nicht zu gedenken, daß bei dieser Bezeichnung der Differentialquotient $f'(x)$ einer Function $f(x)$ als ein einfaches Zeichen erscheint, ebenso wie die Bruchform $\frac{dy}{dx}$, wenn man in derselben Zähler und Nenner als unendlich kleine Zahlen oder als Nullen betrachtet, und sie zu einem bloßen Symbol macht, und daß man also des Vortheils, oder wenn man lieber will, der Bequemlichkeit verlustig geht, die Differentiale zu isoliren, und mit denselben, als den wirklichen Zahlenwerthen der hypothetischen Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden arithmetisch zu operiren.

Um mit diesen Erörterungen über die Wort- und Zeichensprache der Differentialrechnung zu Ende zu kommen, so müssen wir gestehen, daß uns die von Leibnitz erfundene nicht minder schön und sinnvoll als zweckmäßig und nützlich erscheint. Zwar hat Leibnitz in seinen Ausdrücken über das Wesen des Differentials etwas Schwankendes, woraus nicht recht ersichtlich wird, in welchem Sinn es als eine Größe angesehen werden soll, die den Rechnungsoperationen unterworfen werden kann, weil er den mehrerwähnten Unterschied zwischen den Bedingungen der Denkbarkeit eines momentanen Zustandes und den Bedingungen der Berechnung desselben nicht hervorhob. Und da er das Differential, als unendlich kleine Zahl betrachtet, den Rech-

nungsoperationen unterwarf, so war das Undenkbare besonders bei den höheren Differentialen und den Potenzen der unendlich kleinen Zahl unvermeidlich. Aber hiervon abgesehen, so ist dasjenige, was man am meisten getadelt und bekrittelt hat, die Bezeichnungsweise des Differentialquotienten als eines Bruches oder eines Quotienten, sehr passend, indem sie erstens auf die Entstehung desselben aus dem Differenzquotienten, dessen Grenzwerth er ist, hindeutet, zweitens auf seinen Sinn, welcher eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens ist, und nie anders als durch ein Verhältniß von Zunahmen ausgesprochen werden kann, und indem sie endlich den Stachel des Widerspruchs, der in dem Begriffe der stetigen Veränderung liegt, in sich erhalten hat durch Hinweisung auf Zunahmen, die keine sind. Man wird eine Anpreisung der letztern Eigenthümlichkeit vielleicht kaum erwartet haben und glauben, daß wir durch dieselbe mit unsern früheren Behauptungen in Widerspruch treten. Dies ist aber nicht der Fall. Denn in dem allgemeinen Begriff des Differentialquotienten soll man sich der widersprechenden Momente der stetigen Veränderung freilich bewußt bleiben, aber in dem einzelnen Falle der Anwendung, wo man ein blos mathematisches Resultat erzielt, muß dasselbe unabhängig von diesen Widersprüchen seinem bestimmten Inhalte nach gedacht und ausgesprochen werden, und der Gang und die Form der Rechnung einen hiervon ebenso unabhängigen Sinn behalten. Andere Vorzüge der Leibnitzischen Bezeichnung vor den übrigen, daß sie nämlich die ursprüngliche Aufstellung des Differentialquotienten bestimmter continuirlicher Größen sehr erleichtert, daß sie sich dem Sinn der höheren Differentialquotienten so wesentlich anschließt, und daß sie eine sehr natürliche Vorstellung vom Integriren vermittelt, werden später einleuchtend werden.

§. 39.

Bedingungen der Denkbarkeit eines stetig veränderlichen Zustandes.

Nachdem wir nun in dem Vorhergehenden gezeigt haben, auf welche Weise das Problem, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen zu berechnen, gelöst wird, kann noch die davon allerdings unabhängige Frage aufgeworfen werden, wie das Vorhandensein eines solchen rein momentanen Zustandes überhaupt denkbar oder wodurch es möglich sei. Man wird schon bei der bisher entwickelten Auflösung des Problems der Berechnung überall nahe daran geführt, zu dem Gedanken fortzugehen, daß das Vorhandensein eines solchen Zustandes auf einem Verhältniß annullirter Zahlen, welche die unendlich kleinen oder vielmehr die aufgehobenen Zunahmen repräsentiren, beruhen müsse. Die mathematische Auflösung freilich enthält keine Nöthigung zu diesem Fortgang, da in derselben eigentlich nur nachgewiesen zu werden braucht, daß eine als vorhandenseiend anerkannte verhältnißmäßige Stärke des Wachsens, und ein bestimmter Zahlenwerth, der eine solche auszudrücken geeignet ist, in Einem Punkt gemeinschaftlicher Annäherung zusammentreffen und sich decken. Warum man sich aber dennoch in der Differentialrechnung mit den unendlich kleinen Größen so viel zu schaffen gemacht hat, beruht auf mehreren Gründen, von welchen der hauptsächlichste aus dem Vorhergehenden schon bekannt ist, und die andern bald zur Sprache gebracht werden sollen.

Das Widersprechende der Begriffe, auf welche man bei der Analyse der Vorstellung der stetigen Veränderung geführt wird, ist oben (§. 23) schon im Allgemeinen angedeutet und darin gefunden worden, daß die ganze zu Grunde liegende Vorstellung eine Einheit absolut widersprechender Bestimmungen ist, und daß es sich um einen Zustand handelt, dessen Entstehen und Vergehen, dessen Gesetztsein und dessen Aufgehobensein unmittelbar in Eins zusammenfallen. Sehen wir ab von der stetigen Veränderung im Allgemei-

nen, und betrachten nur die uns zunächſt angehende ſtetige Veränderung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens. Nehmen wir nun z. B. eine ſtetig veränderliche Geſchwindigkeit, wobei wir jede einzelne beſtimmte Geſchwindigkeit als etwas in einem abſolut ausdehnungsloſen Verflußpunkt der Zeit Vorhandenes betrachten müſſen, und fragen, nicht durch welche Methode ſie berechnet werden kann, ſondern durch welche objective Beſtimmungen ſie realiſirt gedacht werden kann. Eine Geſchwindigkeit kann durchaus nicht anders wirklich vorhanden ſein, als dadurch, daß irgend ein Raum in irgend einer Zeit durchlaufen wird, und wie kann folglich, da doch in einem ausdehnungsloſen Verflußpunkt der Zeit natürlich gar kein Raum durchlaufen wird, dennoch in dieſem Verflußpunkt, wie gefordert iſt, eine beſtimmte Geſchwindigkeit vorhanden ſein, oder wie kann eine Geſchwindigkeit, die an ſich nichts weiter als ein Verhältniß von Raum und Zeit iſt, auch ohne Raum und Zeit vorhanden ſein. So ſtellt ſich der Widerſpruch in ſeiner ganzen Härte.

Hierbei iſt es nun zunächſt weſentlich zu bemerken, daß vor allen Dingen die ausdehnungsloſen Punkte der Continua nicht iſolirt und herausgeriſſen aus dem Fluß der ſtetigen Veränderung betrachtet werden dürfen. Man kann dies am deutlichſten an einer verwandten Vorſtellung, an der ſtetigen Veränderung der Richtung in einer krummen Linie ſehen. Allerdings legt man einem einzelnen ausdehnungsloſen Raumpunkt eine Richtung bei, aber doch nur inſofern, als er Punkt einer krummen Linie, oder Verflußpunkt innerhalb einer ſtetigen Veränderung der Richtung iſt. Niemand wird einem iſolirt gedachten Raumpunkt eine Richtung zuſprechen, dies wäre völlig ſinnlos. So iſt auch eine Geſchwindigkeit, als ausdehnungsloſen Zeit- und Raumpunkten in ihrer Iſolirung inwohnend, ſinnlos. Durch ein Verhältniß annullirter Zahlen iſt im Grunde dieſelbe Iſolirung ausgeſprochen, und dieſe Ausdrucksweiſe daher zu verwerfen.

Wir wollen die Bedingungen der Denkbarkeit eines momentanen Zustandes zuerst an der anschaulicheren Vorstellung einer krummen Linie und einer in einem ausdehnungslosen Raumpunkt vorhandenen Richtung nachweisen, da die Schwierigkeit dabei ganz dieselbe ist wie bei einer momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, obgleich man von derselben in der Mathematik gewöhnlich nicht viel Aufhebens macht. Die Möglichkeit einer einem bloßen Punkt inhärirenden Richtung erhellt folgendermaßen: Erstens ist klar, da die Veränderung der Richtung eine stetige, alle denkbaren Zwischenstufen der Richtung durchlaufende ist, daß, je kleiner der Fortschritt ist, der auf der krummen Linie von einem Punkt aus genommen wird, desto kleiner auch die Veränderung der Richtung ist, und daß die Veränderung der Richtung dem Verschwinden um so näher gebracht wird, je kleiner der Fortschritt genommen wird. Man nähert sich also mit Verkleinerung des Fortschritts ohne Ende einer bestimmten Richtung. Nun sind aber nach jeder noch so kleinen angebbaren Veränderung der Richtung unendlich viele Punkte factisch durchlaufen. Diese im Continuirlichen immer zurückbleibende Unendlichkeit, die real vorhanden ist, bringt es mit sich, daß jeder angenommene Fortgang ins Unendliche kein blos postulirter, sondern ein verwirklichter ist. Wenn ich mich nun einer Richtung ins Unendliche nähere, so wird dadurch, daß der Fortgang ins Unendliche ein verwirklichter ist, auch die Richtung eine verwirklichte. So erscheint die Richtung eines einzelnen Punktes nur getragen und gehalten durch diesen realen Durchgang durch die Unendlichkeit, und wäre ohne das Zusammensein dieses Punktes mit andern in ihn continuirlich überfließenden Punkten unmöglich.

In den einzelnen Acten der fortschreitenden Bildung der krummen Linie, von welchen jeder angebbare Fortschritt schon unendlich viele enthält, ist im Grunde genommen weder Dauer noch Veränderung der Richtung vorhan-

den, da beide keine angebbare Größe haben. In diesem continuirlichen, alle denkbaren Zwischenstufen durchlaufenden Uebergang fließt die Dauer mit der Veränderung selbst zusammen, und beide widersprechende Begriffe zermalmen sich in ihrer Verbindung. So ist freilich das Widersprechende der ganzen Sache nicht beseitigt, was begreiflicherweise auch nicht die Absicht sein kann, sondern es kommt erst recht zum Vorschein. Wenn man durch diese Art von Dauer das Vorhandensein eines Zustandes innerhalb der stetigen Veränderung begreiflich findet, so kommt es dem Verstande noch theuer genug zu stehen. Die Begriffe der Veränderung und Dauer in ihrer Sonderung und Geschiedenheit verhalten sich der Welt des anschaulichen Continuums gegenüber gewissermaßen wie discrete Größen. So wie wir in dem Continuirlichen gewisse Verhältnisse absolut vollendet vor uns sehen, die durch Zahlen nie erreicht werden können, ja deren Zahlenwerthe ganz widersprechend sind, wie z. B. eine Zahl, die mit sich selbst multiplicirt 2 gebe, absolut unmöglich ist, so wird die Natur des Continuums auch unsern Begriffen widersprechend gefunden, da sie auf eine Einheit entgegengesetzter Bestimmungen führt, und ihr gegenüber die Begriffe sich in ihrer Sonderung nicht erhalten können.

Mit der momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens bei einer stetigen Veränderung derselben ist es nun ganz ebenso wie mit der momentanen Richtung in einer krummen Linie. Den einzelnen Punkten der veränderlichen Größen inhärirt eine bestimmte momentane Stärke des Wachsens nur dadurch, daß die Unendlichkeit der Zwischenstufen überall real durchlaufen und gänzlich erschöpft wird, und die einzelnen Punkte continuirlich in andere überfließen, mit denen sie einen nicht angebbaren Unterschied der Stärke des Wachsens bilden, oder auch daß in den einzelnen in die Unendlichkeit sich verlierenden Acten des Uebergangs weder Dauer noch Veränderung für sich wahrhaft vorhanden ist.

§. 40.

Die überflüssigen Grübeleien der Differential- und Integralrechnung.

Wenn man die Schwierigkeiten betrachtet, welche an der Denkbarkeit der stetigen Veränderung haften, so wird es nicht verwunderlich erscheinen, daß die Darstellungen der Differential- und Integralrechnung an allerlei logischen Härten laboriren, sobald man die Speculationen über die Art des Vorhandenseins eines momentanen Zustandes mit der Entwickelung der Methode seiner Berechnung vermischt. Man sollte das Widersprechende im Begriffe der stetigen Veränderung schlechtweg anerkennen und sich zum Bewußtsein bringen, und dann die tiefere Untersuchung der Logik und Dialektik überlassen, aber nicht allerwärts vergeblich sich abarbeiten, einen trüglichen Scheinfrieden zu schließen und mit den Widersprüchen zu accordiren. Die Mathematik nimmt den Begriff der Veränderung überhaupt und der stetigen Veränderung insbesondere als einen unserm Denken unabweisbar sich darbietenden auf, zieht auf dem Gange ihres nothwendigen Denkens die Consequenzen daraus, und überläßt die Untersuchung des Fundamentes dieses als nothwendig sich darstellenden Gedankenganges der Philosophie. Die in dem Grundbegriff liegenden logischen Schwierigkeiten und Widersprüche, insofern sie allgemeinerer Natur sind, schaden ihr gar Nichts. In diesem Sinne sagt Herbart mit Recht: „Wenn die Mathematik an Widersprüchen sterben könnte, so wäre sie längst todt.“ Wozu überhaupt die vielen Grübeleien über die unendlich kleinen Größen oder Zunahmen. Sind sie ein Widerspruch, so sind sie eine sehr unschuldige Consequenz aus dem Begriffe der stetigen Veränderung. Diesen sollte man vor allen Dingen angreifen und bekritteln; damit würde man aber auch einsehen, daß man sich auf das Gebiet der Philosophie begeben hätte. Wenn man die unendlich kleinen Größen unter eine so scharfe Controle gestellt sieht, der Begriff der stetigen Veränderung aber unangefochten passiren darf, so kann man nichts Anderes denken, als die kleinen Diebe hängt man und die großen läßt man laufen.

Der Begriff der ſtetigen Veränderung und der Veränderung überhaupt iſt nach allen ſeinen Schwierigkeiten und Härten für das Denken in der Philoſophie lange vorher, ehe dieſer Begriff in der Mathematik eine ſolche Wichtigkeit und weite Sphäre ſeiner Anwendbarkeit erhalten hat, weitläufig zur Sprache gebracht und in viel allgemeinerem Sinne behandelt worden, als es der Mathematik zukommt. Die Mathematik ſollte dies Gebiet auch gänzlich der Philoſophie überlaſſen, da Alles, worauf dieſe Unterſuchungen zuletzt hinauslaufen, nur die logiſche Natur deſſen betrifft, was man das wahrhaft Seiende oder Reale nennen will, und deswegen auch ganze philoſophiſche Syſteme darnach unterſchieden werden können, wie ſie ſich zu den Widerſprüchen des Begriffs der Veränderung ſtellen. Und wenn die Eleaten die Wahrheit und Realität aller Veränderung und Bewegung ſchlechthin läugnen, und ein abſolut unveränderliches reines Sein für das einzig Wahre erklären, und andere verwandte Syſteme wenigſtens nur das von Widerſprüchen Purificirte für ein wahrhaftes Sein halten, und alle lebendigen Begriffe ſo lange abdeſtilliren, bis ſie das vollkommene Phlegma ihres weſenhaften Seins haben, und wenn dagegen wieder andere philoſophiſche Syſteme die ſtetige Veränderung und den ewigen continuirlichen Fluß der Dinge für das einzig wahrhaft Reale ausgeben, und demgemäß auch die dialektiſche Bewegung der Begriffe, ihr Zuſammenfließen und ihre Ausſcheidung, für die weſentliche innere Natur des Wahren überhaupt halten, was geht dies Alles die Mathematik an? Iſt alle Veränderung nur ein mit Nothwendigkeit ſich aufdrängender Schein, nun gut, ſo beſchäftigt ſich die Mathematik mit den nothwendigen Geſetzen dieſer reichen, ſchönen und bunten Scheinwelt, und beneidet Niemand um die graue Langeweile ſeines von Widerſprüchen gänzlich purificirten wahren Seins.

Den größten Unfug in den Darſtellungen der Differential- und Integralrechnung hat offenbar das Wort un-

endlich klein angerichtet. Es scheint recht dazu gemacht zu sein, daß alles Halbe, Unentschiedene und Schwankende sich darin einnistet, und daß es allen Inconsequenzen der Darstellung gefällig sich anschmiegt. Da es an sich eine völlige contradictio in adjecto ist, und mit der einen Hand nimmt, was es mit der andern gibt, so kann es nur dadurch einen Sinn erhalten, daß man in Gedanken den Accent entweder auf unendlich oder auf klein legt. Wird der Accent des Gedankens auf unendlich gelegt, und der Zusatz klein preisgegeben, so ist eine unendlich kleine Zahl nichts Anderes als eine Null, legt man den Accent auf klein und läßt unendlich fallen, so denkt man eine wirkliche Zahl, und legt man endlich wie gewöhnlich den Accent des Gedankens auf gar nichts, so kann man darunter denken was man will. Und wenn man das Wort unendlich klein bald in ein Räsonnement eingehen sieht, bei welchem der Nerv des Beweises darin besteht, daß die Vorstellung des Etwas festgehalten wird, und bald wieder in ein anderes, wo man von der Vorstellung des Nichts den allerbesten Gebrauch machen kann, so wird alle Consequenz der Beweise unterbrochen. Nimmt man es mit dem Zusatz unendlich streng, so ist zwar die unendlich kleine Zahl ihrer Größe nach nicht von Null verschieden, aber das Wort unendlich klein ist dann doch bequem, um durch dasselbe nicht die Null schlechthin zu bezeichnen, sondern die Null, insofern sie durch einen ins Unendliche fortgehenden Progreß der Verkleinerung entstanden gedacht werden soll. Wenn wir in dem Folgenden uns des Wortes unendlich klein bedienen, so wird es durchaus als gleichbedeutend mit Null genommen, und wir thun es blos, um die Null und ihre Entstehung zugleich auszudrücken, nicht aber, um den Mantel auf zwei Achseln zu tragen und nöthigenfalls nach dem Winde zu hängen.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß diejenigen Zahlen, welche man unendlich klein genannt hat, und welche den Zähler und Nenner des Differentialquotienten bilden, völ-

tig gleich Null zu setzen sind, sobald man unter denselben nicht die hypothetischen Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden versteht, sondern Zunahmen, die ihnen in ihrem wirklichen Verlauf zukommen, und doch die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens genau angeben sollen. Es wäre wohl, wenn man den Differentialquotienten einmal als einen Quotient von Zunahmen bezeichnen wollte, das Unzweideutigste und Beste gewesen, wenn man ihn den Quotient der aufgehobenen Zunahmen genannt hätte, weil er nur aus dem Setzen der Zunahmen und dem Wiederaufheben derselben resultiren kann. Allerdings ist eine aufgehobene Zunahme keine Zunahme; aber dennoch sind in dem Grenzwerth des Differenzquotienten die Zunahmen als aufgehobene noch enthalten insofern, als derselbe wenigstens die Bedeutung eines Quotienten von Zunahmen hat, indem er eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens ausdrückt. Der allein logisch zu rechtfertigende Widerspruch scheint uns hier, wie überall bei der Auffassung eines blos potentialen nicht in Realität übergehenden Daseins, darin zu liegen, daß eine Bestimmung, welche in dem Resultat aufgehoben erscheint, dennoch in demselben gegenwärtig und erhalten ist durch die Bedeutung, welche diesem Resultat untergelegt wird. Doch lassen wir dies auf sich beruhen. Den Ausdruck unendlich klein scheint man deswegen vorgezogen zu haben, um durch denselben, da das Wort klein darin vorkommt, der sinnlichen Vorstellung noch einen schwachen Anhalt zu lassen, und ihr den Boden nicht ganz unter den Füßen wegzuziehen.

Indessen hat man die unendlich kleinen Zahlen keineswegs überall für identisch mit annullirten Zahlen erklärt, und geglaubt, daß denselben doch noch Etwas von Größe anhaften müsse, und hat hinter dem Unendlichkleinen noch ein dunkles, unsagbares Etwas gesucht, von welchem man zugab, daß es sich nicht genau definiren lasse, weil alle darauf angewandte Denkbestimmungen eine Verfälschung hineinbringen müssen. Man wagte um so weniger den Be-

griff der Größe in dem Unendlichkleinen ganz fallen zu lassen, weil man sich genöthigt sah, verschiedene Ordnungen des Unendlichkleinen anzunehmen, und folglich Unterschiede des Unendlichkleinen zu statuiren, welche nicht einmal quantitative sind, sondern welche, da sie ihrer Größe nach ganz unvergleichbar sein sollen, gewissermaßen Artunterschiede des Unendlichkleinen sein müßten. Indem diese Ansicht vom Unendlichkleinen sich doch in irgend einem Ausdruck zu fixiren bestrebt sein mußte, hat man die in so vielen Lehrbüchern vorkommende Definition desselben gegeben, daß es zwar eine Größe sei, aber eine Größe, die kleiner sei als jede noch so kleine denkbare oder angebbare Größe. Auf diese Weise glaubte man sowohl die wirkliche Größe als auch das völlige Nichts glücklich vermieden zu haben. Weit entfernt aber, sich dadurch in den Schwebepunkt zwischen dem Etwas und dem Nichts gesetzt zu haben, so hat man durch diesen Ausdruck statt einer haltbaren Vorstellung nur eine sich immer über sich selbst forttreibende Bewegung des Denkens bezeichnet. Denn jede noch so kleine angebbare Größe ist doch immer noch eine angebbare Größe; was kleiner ist als dieselbe, und wäre es auch viel tausendmal kleiner, ist ebenfalls eine angebbare Größe. Nun soll freilich nach dieser selben Definition das Unendlichkleine ja auch kleiner als dies Letztere sein; aber da dies Kleinere aus demselben Grunde wieder eine angebbare Größe ist, so fällt man jeden Augenblick, wenn man aus der angebbaren Größe heraustreten will, immer wieder in dieselbe zurück. Man müßte, um wirklich herauszukommen, diese Procedur der Verkleinerung unendlich vielmal wiederholen, wodurch man dann aber entweder ein Unerreichbares oder eine völlig annullirte Zahl ausspricht. Diese Definition des Unendlichkleinen also, statt ein ruhiges Plätzchen zu gewähren zwischen der Skylla und Charybdis der wirklichen Größen und des Nichts, ist vielmehr ein Strudel, der sich immer tiefer in sich selbst hineinwirbelt. Nur das Abbrechen des Denkens an einer beliebigen

Stelle kann hier Ruhe finden, wie es denn auch von selbst klar ist, daß Alles, was weder Etwas noch Nichts sein soll, wenn dadurch nicht etwa ein Werden, sondern ein Ding bezeichnet werden soll, nie faßbar sein wird. Gibt man etwas der Art dennoch als einen unvermeidlichen Begriff, so erwartet man wohl von Jedermann so viel feine Rücksicht, daß er die Gedanken nicht gewaltsam presse, sondern sich nach dieser doppelten Negation überhaupt ruhig verhalte.

Wir wollen die vielen Versuche, die man gemacht hat, um die Schwierigkeiten des Begriffs einer stetig fließenden Veränderung auf eine listige Weise zu umgehen, nicht weiter namhaft machen, da man sich dabei über die logische Natur des Problems ebenso sehr getäuscht, als die Mathematik mit überflüssigen Grübeleien belästigt und verunstaltet hat. Irgend ein Widerspruch, der viel schlimmer ist als der Erste, wird unvermerkt untergeschoben, und durch weitläufige Erklärungen verdeckt, und man schmeichelt sich dabei, das Gebäude der Mathematik befestigt zu haben, wenn man die klaffenden Risse der Widersprüche nothdürftig verschmiert hat.

Wenn wir einmal alle die Schwierigkeiten wegdenken, welche theils durch die Untersuchung über die Möglichkeit des Vorhandenseins eines rein momentanen Zustandes, theils durch die Polemik gegen gangbare Vorstellungen über die Differentiale hervorgerufen worden sind, so sind die Grundprincipien der Differentialrechnung höchst einfach, klar und wohlbegründet. Daß eine momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen durch den Grenzwerth ihres Differenzquotienten dargestellt und berechnet wird, ist ganz klar; ebenso klar, daß, wenn ich ihn als einen Quotienten von Zunahmen betrachten will, ich solche Zunahmen denken muß, die überhaupt eine Stärke des Wachsens auszudrücken im Stande sind, also zusammengehörige Zunahmen von gleichmäßig Wachsenden, oder Zunahmen, welche unter der Annahme einer unveränder-

ten Stärke des Wachsens entstehen würden, und diese sind unsere hypothetischen Zunahmen der ungleichmäßig Wachsenden, die natürlich wirkliche Größen sind. Auf diese Weise bewahrt sich die Mathematik einen ebenso klaren und sicheren als streng beweisenden Gang, und die Differentialrechnung steht dann in diesen Hinsichten der Exhaustionsmethode der Alten keineswegs nach. Und obgleich sie es mit lauter faßlichen Vorstellungen zu thun hat, ist das Widersprechende eines momentanen Zustandes nicht geläugnet oder verdeckt, sondern anerkannt. Nur erhält der Mathematiker in seinen Forschungen sich immer schwebend über den Widersprüchen, die der Philosoph in seinen logisch-dialektischen Untersuchungen in ihrer ganzen Härte hervorzuziehen hat. Dieser darf den Stachel des Widerspruchs nicht scheuen, sondern muß ihn lebendig erhalten, und die Qual der Unruhe verwandelt sich ihm in die Wollust seiner Gedanken.

§. 41.

Schlußbetrachtung über das Differentiiren.

Die bisher entwickelten Lehren der Differentialrechnung zeigen uns im Allgemeinen den Weg, den wir einzuschlagen haben, um die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier veränderlichen Größen zu finden, wenn wir nämlich die Art der Abhängigkeit der Größen schon kennen, d. h. wenn wir wissen, durch welche Function der einen Größe, als der willkürlich Veränderlichen, der Werth der andern, als der abhängig Veränderlichen ausgedrückt wird. Das dabei anzuwendende Verfahren ist allgemein anwendbar, und besteht dem Obigen zu Folge darin, daß man die willkürlich Veränderliche x um einen allgemein ausgedrückten Zahlenwerth wachsend denkt, und eine zweitheilige Größe, wie etwa $x + k$, statt x in die gegebene Function einsetzt, dadurch den Differenzquotienten der Veränderlichen, nämlich der Function von x und des x selbst, allgemein darstellt, und dann zusieht, in welche

bestimmte Function der willkürlich Veränderlichen dieser Differenzquotient übergeht für die wieder aufgehobene oder annullirte Zunahme k der willkürlich Veränderlichen. Der so erhaltene Differentialquotient drückt die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens allgemein in ihrer Abhängigkeit von der willkürlich Veränderlichen aus.

Nun haben wir oben (§. 11), als wir die Untersuchung über die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der von einander abhängigen veränderlichen Größen einleiteten, als Zweck derselben angegeben, vermittelst der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zweier veränderlichen Größen die Gesetze der Abhängigkeit dieser Größen selbst zu finden. Denn als die natürlichste und zugleich allgemein anwendbare Methode zur Auffindung solcher Gesetze, so schlossen wir, muß uns diejenige erscheinen, welche die Größen entstehen läßt, und sich in den innern Proceß ihres Werdens versetzt, oder welche sich an den in dem Wesen der Veränderlichkeit liegenden Begriff des gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens anschließend die Stärke dieses Wachsens ins Auge faßt und unter eine allgemeine Regel bringt, um dann die durch allmäliges Wachsen erreichten Werthe der veränderlichen Größen als Resultat dieser in ihrem ganzen Verlauf sich kundgebenden Stärke des Wachsens hervorgehen zu lassen. Wenn dies der einzige Zweck der Bestimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens oder des Differentiirens wäre, so müßten wir zugeben, daß wir dasselbe in der Gestalt, in welcher es brauchbar ist, noch nicht kennen gelernt haben, oder daß wir wenigstens noch nicht wissen, auf welche Weise die bisher entwickelten Regeln zu jenem Zwecke verwendet werden können. Denn grade die Function, in welche das Gesetz der Abhängigkeit zweier Veränderlichen gefaßt wird, haben wir in dem Bisherigen bei Bestimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens immer schon als bekannt und gegeben vorausgesetzt, und das entwickelte Verfahren des Differentiirens war überall auf diese Voraussetzung basirt. Allerdings ist

diejenige Anwendung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, bei welcher dieselbe nur als Mittel gebraucht wird, um die Gesetze der Abhängigkeit veränderlicher Größen zu finden, bei weitem die wichtigste und hauptsächlichste, und von derselben soll gleich im nächsten Capitel ausführlich gehandelt werden. Zunächst aber können wir fragen, ob nicht auch das Differentiiren, welches das Bekanntsein der die Abhängigkeit der Größen angebenden Function voraussetzt, und welches wir bisher allein kennen gelernt haben, schon unmittelbar die Auflösung wichtiger mathematischer Probleme enthält.

Obgleich es unmöglich ist, die Menge wichtiger mathematischer Probleme, welche durch das Differentiiren gegebener Functionen lösbar sind, in vorläufiger Uebersicht anzudeuten, so werden doch auch schon einige wenige Beispiele hinreichend zeigen können, wie fruchtbar diese Operation ist, und wie insbesondere durch dieselbe die Betrachtung in eine Sphäre großer Allgemeinheit erhoben wird, und die umfassendsten Probleme, von welchen man sonst nur einzelne Fälle durch specielle Kunstgriffe zu behandeln verstand, in einer einzigen Methode der Auflösung begriffen werden können. So ist z. B. aus dem Vorhergehenden schon einzusehen, daß man durch das Differentiiren in den Stand gesetzt wird, eine Tangente an jede krumme Linie zu ziehen, deren Parallelcoordinatengleichung gegeben ist. Wir verstehen unter Tangente hier zunächst nur eine Linie, welche die momentane Richtung einer krummen Linie angibt, und lassen es unentschieden, ob dieselbe die krumme Linie in allen Fällen blos berührt, oder ob sie in gewissen Fällen dieselbe auch schneidet. In den Coordinaten der Tangente ist diejenige verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zur Ausführung gekommen, welche die Coordinaten der krummen Linie im Treffpunkt der Tangente momentan haben. Berechnet man also diese momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens durch Differentiiren der gegebenen Gleichung oder Function, so kann man eine grade

Linie construiren, in deren Coordinaten diese Stärke des Wachsens constant ist. Der Winkel, den diese Gerade mit ihrer Abscisse bildet, ist derselbe, welchen die Tangente mit der Abscisse der krummen Linie bildet, und die Tangente kann also leicht gezogen werden.

Ein anderes umfassendes und wichtiges Problem, welches durch das Differentiiren einer gegebenen Function sehr leicht und einfach gelöst wird, ist die sogenannte Lehre vom Größten und Kleinsten, oder die Aufsuchung derjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welche die abhängig Veränderliche einen größten oder kleinsten Werth annimmt. Eine abhängig Veränderliche kann aber nur dadurch einen größten Werth annehmen, daß sie bei dem fortwährenden Wachsen der willkürlich Veränderlichen erst im Wachsen und dann im Abnehmen begriffen ist, und einen kleinsten dadurch, daß sie erst im Abnehmen und dann im Wachsen begriffen ist. In dem Moment des Ueberganges aus dem Wachsen ins Abnehmen wird das Maximum erreicht, und in dem Uebergang aus dem Abnehmen ins Wachsen das Minimum. Nun ist aber aus Früherem (§. 36) bekannt, daß in dem Falle, als mit einem Wachsen der willkürlich Veränderlichen auch ein Wachsen der abhängig Veränderlichen verbunden ist, der Differentialquotient positiv, und in dem umgekehrten Falle negativ ist. Wenn also bei fortschreitendem Wachsen der willkürlich Veränderlichen die abhängig Veränderliche aus dem Wachsen ins Abnehmen übergeht, so geht der Werth des Differentialquotienten aus einem positiven Zahlenwerth in einen negativen über. Da dieser Uebergang grade auf die Stelle des Maximums fällt, und ein Uebergang aus einem positiven Zahlenwerth in einen negativen, insofern dieser Uebergang, wie hier angenommen, stetig ist, sich nur durch den Durchgang durch den Nullwerth vermitteln kann, so folgt, daß für die Stelle des Maximums der Zahlenwerth des Differentialquotienten in den Nullwerth

übergehen muß. Um also denjenigen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x zu finden, für welchen die als Differentialquotient gegebene Function von x den Nullwerth annimmt, brauche ich nur diese Function gleich Null zu setzen, und dann die auf Null gebrachte Gleichung in Bezug auf x als Unbekannte algebraisch aufzulösen. Mit dem Minimum verhält es sich ebenso. Bei einem Minimum geht die abhängig Veränderliche aus dem Abnehmen ins Wachsen, und folglich der Differentialquotient aus negativen Werthen in positive über, ist also für den Moment dieses Ueberganges selbst, oder für die Stelle des Minimums gleich Null.

Es sei ferner das Gesetz einer Bewegung dadurch bestimmt, daß der Raum als Function der Zeit gegeben ist, und man also den nach jeder beliebigen Zeitdauer der Bewegung durchlaufenen Raum unmittelbar berechnen kann. Es kann alsdann gefragt werden, wie findet man allgemein die in jedem Zeitpunkt der Bewegung vorhandene Geschwindigkeit, oder durch welche Function der Zeit wird die Geschwindigkeit ausgedrückt. Eine gleichbleibende Geschwindigkeit wird ausgedrückt durch den Quotienten zusammengehöriger Zunahmen des Raumes und der Zeit. Sind nun Raum und Zeit ungleichmäßig wachsend, und ist folglich die Geschwindigkeit stetig veränderlich, so kommt es, um die Geschwindigkeit eines Zeitpunktes zu finden, darauf an, zu bestimmen, wie groß der Quotient zusammengehöriger Zunahmen des Raumes und der Zeit sein würde, wenn die in diesem Zeitpunkt vorhandene verhältnißmäßige Stärke des Wachsens dieselbe bliebe. Dies sagt uns aber der Differentialquotient der beiden ungleichmäßig Wachsenden, des Raumes und der Zeit. Derselbe liefert uns also diejenige Function der Zeit, durch welche die Geschwindigkeit eines einzelnen Zeitpunktes allgemein ausgedrückt wird. Sei der Zahlenwerth der Zeitdauer einer Bewegung durch t, und der des durchlaufenen Raumes, als irgend einer Function der willkürlich Veränderlichen t, durch f(t), und die

Geschwindigkeit durch c vorgestellt, so gilt allgemein die Gleichung $\frac{df(t)}{dt} = c$. Drückt man, wie es gewöhnlich ist, den der Zeit t zugehörigen Raum statt durch f(t) durch den Buchstaben s aus, so hat man die bekannte und wichtige Differentialgleichung $\frac{ds}{dt} = c$. Man sieht also, wie durch die eine und dieselbe Operation des Differentiirens für alle denkbaren Bewegungen ein Uebergang vermittelt wird von der Beziehung zwischen Raum und Zeit zu der Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit, und hierdurch allein die Möglichkeit gegeben ist, diese Zusammenhänge auf eine durchgreifende und fruchtbare Weise einer mathematischen Behandlung zu unterwerfen.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß auch der Uebergang von der Geschwindigkeit zu der Kraft durch die Operation des Differentiirens zu bewerkstelligen ist. Wir nennen überhaupt Alles, wodurch eine vorhandene Geschwindigkeit nach Größe oder Richtung verändert wird, eine Kraft, mag nun die Geschwindigkeit beschleunigt oder retardirt werden. Wir wollen uns hier nur den einfachen Fall denken, daß die Richtung der Kraft und die Richtung der Geschwindigkeit in Eine gerade Linie fallen, wodurch die Bewegung geradlinig wird. Es sei die Geschwindigkeit als Function der Zeit gegeben, und es wird gefragt, wie man daraus die in jedem Zeitpunkt vorhandene Kraft berechnen kann, falls sie veränderlich ist. Von der Größe der Kraft kann man sich nur eine Vorstellung machen durch die Größe der Veränderung der Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit, wenn dabei an keine Verschiedenheit der Masse gedacht, sondern eine beliebige unveränderliche Masseneinheit zu Grunde gelegt wird. Um also die Kraft zu bestimmen, braucht man nur zu wissen, wie groß die Zunahme der Geschwindigkeit ist für eine gewisse Zunahme der Zeit; der Quotient dieser Zunahmen dient als Maß

der Kraft. Sind die Veränderungen der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich groß, und also Zeit und Geschwindigkeit gleichmäßig wachsend, so ist durch diese constante Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit eine bestimmte Kraft ausgedrückt, oder die Kraft ist constant. Sind aber Geschwindigkeit und Zeit ungleichmäßig wachsend, und also die Kraft stetig veränderlich, so wird es, um die momentane Kraft eines einzelnen Zeitpunkts zu berechnen, darauf ankommen, zu bestimmen, wie groß der Quotient der Zunahmen von Geschwindigkeit und Zeit sein würde, wenn die in einem Zeitpunkt vorhandene Stärke des Wachsens dieselbe bliebe. Da nun die Geschwindigkeit als Function der Zeit gegeben sein soll, so brauche ich, um die momentane Stärke des Wachsens dieser von einander abhängigen Veränderlichen zu finden, nur den Differentialquotient von Geschwindigkeit und Zeit darzustellen. Derselbe liefert mir einen Ausdruck der Kraft in ihrer Abhängigkeit von der Zeit oder als Function der Zeit. Wird also die Zeit durch t, die Geschwindigkeit, als die gegebene Function der Zeit durch c, und die Kraft durch v vorgestellt, so gilt die Differentialgleichung $\frac{dc}{dt} = v$.

Diese wenigen Beispiele werden hinreichen, um zu zeigen, daß die Bestimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zweier von einander abhängigen veränderlichen Größen, oder die Darstellung ihres Differentialquotienten Methoden der Auflösung umfassender und wichtiger Probleme darbietet, und daß das Differentiiren, selbst wenn man von allem Gebrauche desselben zur Auffindung der das Gesetz der Abhängigkeit veränderlicher Größen ausdrückenden Functionen absieht, und ein solches Gesetz vielmehr, wie bisher immer geschehen, als ein gegebenes voraussetzt, eine Operation von der größten Wichtigkeit ist. Der wesentliche Vorzug dieser die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens enthüllenden Operation liegt in der großen Allgemeinheit der Resultate. Denn man wird an diesen

Beispielen bemerkt haben, daß das Differentiiren uns die Mittel darbietet, höchst allgemeine Begriffszusammenhänge in analytische Ausdrücke zu fassen, und dadurch die arithmetischen Operationen auch auf dem Gebiet sehr allgemeiner Vorstellungen noch anwendbar und wirksam zu machen. Ohne diese Erhebung in die Sphäre großer Allgemeinheit wird aber die Forschung auf diesem wie auf jedem andern Gebiet des Wissens entweder hinken oder gar nicht von der Stelle kommen. Man braucht nicht viel von der Mathematik zu wissen, um einsehen zu können, daß nur durch solche allgemein dargestellte Größenzusammenhänge diejenigen Substitutionen und Umformungen vermittelt werden können, welche es möglich machen, von beliebigen Voraussetzungen auf die darin enthaltenen Folgen zu kommen. Und weiter ist alle Erkenntniß nichts, als diese Aufhellung des Zusammenhangs von Voraussetzung und Folge, und als solche ist sie reines Denkproduct. Die andere noch wichtigere Anwendung der Differentialrechnung zur Auffindung der das Gesetz der Abhängigkeit veränderlicher Größen darstellenden Functionen wird der Gegenstand des folgenden Capitels sein.

Drittes Capitel.

Vom Integriren im Allgemeinen.

§. 42.

Die Abhängigkeit der Größen als Folge der Stärke ihres Wachsens.

Wir wenden uns zu dem zweiten Haupttheil unserer allgemeinen Angabe des Begriffs und des Wesens der Differential- und Integralrechnung. In dem vorhergehenden Capitel ist nur gezeigt worden, wie man sich überhaupt einen Begriff bildet von einer momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, und wie man dieselbe berechnet für jeden Verflußpunkt zweier Veränderlichen, bei denen die das Gesetz ihrer Abhängigkeit angebende Function bekannt ist. Es fragt sich nun aber, ob nicht auch in dem Falle, als die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen allgemein durch ihren Differentialquotienten gegeben ist, die Function, welche die Art der Abhängigkeit dieser Veränderlichen angibt, daraus abgeleitet werden kann. Es würden dann die zusammengehörigen Werthe, welche die Veränderlichen durch gemeinschaftlich fortschreitendes Wachsen allgemein in jedem beliebigen Punkt erreicht haben, als eine Folge oder als ein Resultat der in dem ganzen Verlauf der Größen sich kundgebenden veränderlichen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens erscheinen.

Für gleichmäßig wachsende Veränderliche ist die Möglichkeit und die Art dieser Ableitung schon im ersten Capitel nachgewiesen. Bei denselben beruhte diese Ableitung auf sehr einfachen Schlüssen; denn ihre verhältnißmäßige Stärke des Wachsens ist unveränderlich. Ist nun ihr Differenzquotient = a, so ist jede Zunahme der abhängig

Veränderlichen a mal so groß als die zugehörige Zunahme der willkürlich Veränderlichen, und folglich ist, die willkürlich Veränderliche x genannt, die abhängig Veränderliche allgemein gleich ax, sobald die Veränderlichen zugleich in den Nullzustand übergehen. Behält die abhängig Veränderliche noch einen Werth C für den Nullzustand der willkürlich Veränderlichen, so ist sie gegeben durch die Function $ax + C$, wie früher schon gezeigt. Bei ungleichmäßig Wachsenden ist aber die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens selbst veränderlich, und nur durch eine Function der willkürlich Veränderlichen auszudrücken, und es fragt sich, ob und auf welche Weise daraus diejenige Function gefunden werden kann, welche die Art der Abhängigkeit der ungleichmäßig Wachsenden selbst ausdrückt. Daß die letztere Function von der ersteren überhaupt abhängig und durch dieselbe bestimmt ist, läßt sich im Allgemeinen schon daraus entnehmen, daß der Werth, den die abhängig Veränderliche für einen beliebigen Punkt der willkürlich Veränderlichen durch das gemeinschaftliche Wachsen beider erreicht hat, doch nur eine Folge und Wirkung sein kann von der im ganzen Verlauf der Größen vorhandenen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, wenn diese Stärke auch, weil sie in unendlich vielen verschiedenen Graden vorhanden gewesen ist, den Werth der abhängig Veränderlichen durch unendlich viele Effecte producirt hat. Durch den Differentialquotienten ist nun die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens für alle Punkte der willkürlich Veränderlichen genau bestimmt, mithin ist auch allgemein jeder Werth, den die abhängig Veränderliche für irgend einen Werth der willkürlich Veränderlichen wachsend erreicht hat, völlig bestimmt, wenigstens insofern völlig bestimmt, als er überhaupt von der willkürlich Veränderlichen und folglich auch vom Differentialquotienten abhängig ist, und nicht etwa einen von derselben unabhängigen constanten Bestandtheil hat. Und da der allgemein ausgedrückte Werth der abhängig Veränderlichen nichts Anderes ist, als die Function

der willkürlich Veränderlichen, welche die Art der Abhängigkeit der beiden Veränderlichen angibt, so ist diese Function, abgesehen von irgend einem constanten Bestandtheil derselben, durch den Differentialquotienten nothwendig bestimmt.

§. 43.

Eine Function als aus ihrem Differentialquotienten resultirend.

Man kann aus dem Vorhergehenden schließen, daß eine bestimmte Function einer Veränderlichen x, die als Differentialquotient gegeben ist, nicht aus mehreren verschiedenen Functionen von x durch Differentiation hervorgehen konnte, sondern nur aus Einer bestimmten. Kennt man also eine Function von x, aus welcher eine andere gegebene Function von x als Differentialquotient sich ableiten läßt, so ist jene erstere Function zugleich die Einzige, aus welcher die zweite durch Differentiation erhalten werden kann. Die Beschränkung, welche diese Regel erleidet, ist in dem Vorhergehenden schon enthalten, und ist dieselbe, die auch der Satz hat, aus welchem diese Regel abgeleitet ist. Sie wird dadurch herbeigeführt, daß aus dem Werth der willkürlich Veränderlichen und aus dem Differentialquotienten, als einer Function derselben, der Werth der abhängig Veränderlichen nur in soweit folgen kann, als er von der willkürlich Veränderlichen wirklich abhängig ist. Ein unveränderlicher Bestandtheil, der als solcher von der willkürlich Veränderlichen, und folglich auch von der Stärke des Wachsens ganz unabhängig ist, kann durch beide auch nicht bestimmt sein. Daraus folgt denn, daß zwei verschiedene Functionen, welche durch Differentiiren denselben Differentialquotienten hervorbringen, sich nur durch ein unveränderliches Glied von einander unterscheiden können.

Daß überhaupt zwei Functionen, welche sich nur durch einen constanten Bestandtheil unterscheiden, denselben Differentialquotienten liefern, kann leicht direct eingesehen werden; aber daß verschiedene Functionen, welche denselben

Differentialquotienten geben, sich nur durch ein constantes Glied unterscheiden können, folgt aus der Einsicht, daß der für jeden beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen erreichte Werth der abhängig Veränderlichen durch die allgemein gegebene verhältnißmäßige Stärke des Wachsens in der obigen Weise und mit der angegebenen Beschränkung völlig bestimmt ist. Wir haben schon früher (§. 33) gesehen, daß der Differentialquotient einer Potenzfunction von einem constanten Bestandtheil derselben unabhängig ist, und daß dieser Differentialquotient derselbe wird, ob die Potenzfunction $a x^m$ oder $a x^m + C$ ist. Dasselbe läßt sich leicht allgemein für alle beliebige Functionen erweisen. Ein solcher allgemeiner Beweis kann natürlich, insofern er durch die Zeichensprache der Analysis gegeben werden soll, nur in sehr abstracten Schemen sich darstellen. Hat man sich aber gewöhnt, dieselben überall mit bestimmten Vorstellungen zu begleiten, so wird man den Nerv des Beweises dadurch niemals geschwächt finden. Bedeute $f(x)$ eine beliebige Function von x. Der Werth, in welchen sie übergeht, indem man die Zahl x um die Zahl k wachsend denkt, und $x + k$ statt x in die Function setzt, sei vorgestellt durch die Form $f(x + k)$. Ziehen wir davon den vor dem Wachsen des x vorhandenen Werth der Function, nämlich $f(x)$, ab, so ist die Form $f(x+k) - f(x)$ ein Ausdruck der Zunahme der abhängig Veränderlichen, welche mit der Zunahme k der willkürlich Veränderlichen x verbunden ist. Dividiren wir die Zunahme der abhängig Veränderlichen, also den Ausdruck $f(x + k) - f(x)$, durch k, so haben wir in dem Ausdruck $\frac{f(x+k) - f(x)}{k}$ das allgemeine Schema des Differenzquotienten einer beliebigen durch $f(x)$ vorgestellten Function von x. Es enthalte nun die Function $f(x)$ noch ein constantes von x unabhängiges Glied, und sei $f(x) + C$. Wird $x + k$ statt x in die Function eingesetzt, so nimmt, indem wir für die Form $f(x + k)$ die obige Bedeutung beibehalten, die Function

einen durch $f(x+k)+C$ auszudrückenden Werth an. Hiervon den ersten Werth der Function, nämlich $f(x)+C$, abgezogen, gibt der Ausdruck $f(x+k)+C-(f(x)+C)$ oder $f(x+k)+C-f(x)-C$ oder $f(x+k)-f(x)$ die Zunahme der abhängig Veränderlichen an, welche mit der Zunahme k der willkürlich Veränderlichen x verbunden ist. Wir sehen also, daß die der Zunahme k der willkürlich Veränderlichen zugehörige Zunahme der abhängig Veränderlichen dieselbe bleibt, mag die abhängig Veränderliche durch $f(x)$ oder durch $f(x)+C$ ausgedrückt sein. Die Zunahme der abhängig Veränderlichen durch k dividirt, gibt den Differenzquotienten. Da nun dieser gleich ausfällt für die Function $f(x)$ und die Function $f(x)+C$, so ist auch der Differentialquotient beider Functionen derselbe.

Wenn also zwei durch einen constanten Bestandtheil verschiedene Functionen denselben Differentialquotienten geben können, aber zugleich auch nur zwei auf diese Weise verschiedene Functionen, so gibt der Schluß, welcher von der Function, die als der Differentialquotient zweier Veränderlichen gegeben ist, gemacht wird auf die andere Function, die das Gesetz der Abhängigkeit der Veränderlichen ausdrückt, zwar ein unbestimmtes Resultat, aber doch ein nur in Beziehung auf eine Constante unbestimmtes Resultat. Wenn man demnach weiß, daß eine gegebene Function von x, welche die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen ausdrückt, durch Differentiiren erhalten werden kann aus irgend einer andern Function von x, die $f(x)$ heißen möge, so ist man auch sicher, daß entweder die Function $f(x)$ oder die Function $f(x)+C$ diejenige ist, durch welche das Gesetz der Abhängigkeit dieser Veränderlichen ausgedrückt wird.

§. 44.

Erläuterung an dem Beispiel der Potenzfunction.

Eine beliebige Potenzfunction ax^m führt durch Differentiiren wieder auf eine Potenzfunction, indem, wie wir

wiſſen, die Function max^{m-1} der Differentialquotient der Function ax^m iſt. Zugleich kann die Potenzfunction max^{m-1} aus keiner andern Function als aus der Function ax^m oder $ax^m + C$ durch Differentiiren abgeleitet ſein. Betrachten wir nun die Veränderungen, welche man mit der abgeleiteten Function max^{m-1} vornehmen muß, um die urſprüngliche Function ax^m wieder zu erhalten, ſo ſehen wir, daß es folgende ſind: Man erhöhe den Exponent der abgeleiteten Function um die Zahl 1, und dividire die ſo erhaltene Function durch dieſen um 1 vermehrten Exponenten. Iſt alſo allgemein die Potenzfunction ax^n als Differentialquotient gegeben, ſo iſt $\frac{ax^{n+1}}{n+1}$ die urſprüngliche Function, aus welcher ax^n durch Differentiiren hervorgegangen iſt. Wäre z. B. $12x^2$ ein Differentialquotient, ſo wäre $\frac{12x^3}{3}$ oder $4x^3$ die urſprüngliche Function; ebenſo gehört zu $3x^{\frac{1}{2}}$ die Function $2x^{\frac{3}{2}}$, und zu $5x^{-3}$ die Function $-\frac{5}{2}.x^{-2}$ als urſprüngliche. Es verſteht ſich, daß überall auch noch eine Conſtante hinzugenommen werden kann.

Nun gibt diejenige Function, welche wir in Bezug auf ihren Differentialquotienten die urſprüngliche genannt haben, das Geſetz der Abhängigkeit derjenigen beiden Veränderlichen an, deren verhältnißmäßige Stärke des Wachſens durch den Differentialquotienten ausgedrückt wird. Iſt mir alſo die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens zweier Veränderlichen irgendwie bekannt, und durch eine Potenzfunction der willkürlich Veränderlichen x gegeben, ſo folgt diejenige Function von x, welche die Art der Abhängigkeit dieſer Veränderlichen darſtellt, auf die beſchriebene Weiſe aus dem Differentialquotienten. Wir ſehen an dieſem Beiſpiel der Potenzfunction, in welcher Art die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens zweier Veränderlichen dazu dienen kann, die Geſetze der Abhängigkeit dieſer Ver-

änderlichen zu finden. Diese Auffindung wird dadurch möglich, daß einer jeden Function einer Veränderlichen x, welche als Differentialquotient gegeben ist, eine bestimmte andere Function von x zugehört, aus welcher die Erstere durch Differentiation hervorgeht.

Aus einer gegebenen Differentialgleichung diejenige Gleichung herzuleiten, durch deren Differentiation sie entstanden ist, läuft auf dasselbe hinaus wie die Rückführung eines Differentialquotienten auf die ursprüngliche Function. Bezeichnen wir die unbekannte Function der willkürlich Veränderlichen x, welche den Werth einer von x abhängigen Veränderlichen ausdrückt, durch den Buchstaben y, und sei der Differentialquotient dieser beiden Veränderlichen gleich der Function $6x^3$, was man durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 6x^3$ darstellen würde, so folgt, daß die durch y vorgestellte unbekannte Function von x keine andere sein kann, als diejenige, aus welcher die Function $6x^3$ durch Differentiiren hervorgeht, also die Function $\frac{3x^4}{2}$. Aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 6x^3$ folgt also die andere Gleichung $y = \frac{3x^4}{2}$. Ebenso würde aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} . x^{-\frac{1}{2}}$ folgen die Gleichung $y = \frac{2}{3} . x^{\frac{1}{2}}$. Um ein angewandtes Beispiel zu haben, so mögen wir uns erinnern, daß eine Geschwindigkeit die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von Raum und Zeit angibt, oder daß sie durch den Differentialquotienten von Raum und Zeit dargestellt wird, also $c = \frac{ds}{dt}$ (siehe §. 41). Ist mir die Geschwindigkeit als Function der Zeit t gegeben, und heiße sie $f(t)$, so habe ich die Differentialgleichung $\frac{ds}{dt} = f(t)$, und kann dar-

aus die Function von t, welche den zurückgelegten Raum, oder s, ausdrückt, finden. Die Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers z. B. ist nach t Secunden gleich 30 t Fuß für Eine Secunde (s. §. 30). Man hat also die Differentialgleichung $\frac{ds}{dt} = 30t$. Da in diesem Falle der Differentialquotient $30t^1$ eine Potenzfunction der willkürlich Veränderlichen t ist, so folgt nach unserer obigen Regel die Gleichung $s = 15t^2$.

§. 45.

Das Integriren als Rückschluß von einem Differentialquotienten auf eine Function.

Wenn man auf diese Weise aus derjenigen Function einer Veränderlichen x, welche der Differentialquotient dieser Veränderlichen x und einer davon Abhängigen y ist, oder welche dem Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ gleich ist, die andere Function von x ableitet, durch welche der Werth der abhängigen Größe y selbst ausgedrückt wird, oder was dasselbe ist, wenn man aus einer Differentialgleichung die zugehörige ursprüngliche Gleichung, durch deren Differentiation sie entstanden sein könnte, herleitet, so nennt man diese Operation, oder vielmehr diese Substitution, das Integriren. Der Zweck des Integrirens ist kein anderer als das Gesetz der Abhängigkeit der Größen abzuleiten aus der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens derselben, und zwar abzuleiten aus dem Gesetz, welches die unendliche Folge von Wandlungen der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens für alle Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen bestimmt. Das Mittel aber, durch welches dies vollführt wird, ist ein Rückschluß von einer Function auf eine andere. Jede Regel des Differentiirens irgend einer Function gibt durch solchen Rückschluß eine Regel des Integrirens irgend einer Function. Stellt man jede Regel des Differentiirens einer Function durch eine analytische Differentialgleichung dar, wie z. B. bei der Potenzfunction

ax^m durch die Differentialgleichung $\frac{dax^m}{dx} = max^{m-1}$, so übersieht man die zusammengehörigen Functionen und die Regel des Fort- und Rückganges oder des Differentiirens und Integrirens sehr einfach. Ist mir also ein Differentialquotient von der Form max^{m-1} gegeben, oder habe ich ihn auch erst auf diese Form gebracht, und habe demnach die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$, so zeigt die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der obigen analytischen Differentialgleichung, daß man für y substituiren kann ax^m, und daß also $y = ax^m$. Hierdurch gewinnt der formelle oder rein operative Theil der Differentialrechnung, welcher sich nur damit beschäftigt, aus beliebigen Functionen einer Veränderlichen die Differentialquotienten abzuleiten, eine große Wichtigkeit. Durch denselben wird man mit einem Vorrath von analytischen Differentialgleichungen für die Hauptarten von Functionen versorgt, welche die Fundamentalregeln des Differentiirens und Integrirens zugleich aussprechen. Jede Function einer Veränderlichen, welche als Differentialquotient gegeben ist, und zu welcher die ursprüngliche Function gefunden werden soll, ist nun entweder ihrer allgemeinen Form nach unmittelbar übereinstimmend mit einem in dem formellen Theil der Differentialrechnung gefundenen Differentialquotienten irgend einer Function, und dann ist das Integriren ganz einfach, oder sie muß durch Umformung zu dieser Uebereinstimmung gebracht werden, welches dann allerdings oft nicht ohne Weitläufigkeiten thunlich ist. Wir nehmen das Integriren jetzt zunächst blos in der eben entwickelten Bedeutung, gemäß welcher es sich durch die Erinnerung an bekannte Zusammenhänge ursprünglicher und abgeleiteter Functionen, sei es mit oder ohne vorausgegangene Umformung, vollzieht, und werden von einer andern Bedeutung desselben, welcher auch das Wort Integriren seine Entstehung verdankt, weiter unten sprechen.

§. 46.

Nachtrag zur Integration der Potenzfunction.

Ueber die Integration einer Potenzfunction ſind noch einige Bemerkungen zuzufügen. Wir wiſſen, daß die allgemein ausgedrückte Potenzfunction ax^m zum Differentialquotienten die Potenzfunction max^{m-1} hat. Statt die Regel der Integration der Potenzfunction in der Weiſe, wie oben (§. 44) geſchehen, auszuſprechen, hätte man ſtrenger ſo ſagen ſollen: Jede Potenzfunction von der Form max^{m-1} geht durch Differentiiren aus der Function ax^m hervor. Hiernach kann zwar eine Potenzfunction der Differentialquotient einer andern Potenzfunction ſein, aber doch nur eine ſolche, welche auf die Form max^{m-1} gebracht werden kann. Die Form max^{m-1} beſteht aber weſentlich darin, daß die Zahl m, welche mit -1 verbunden den Exponenten des Differentialquotienten bildet, als Factor in dem Coefficienten von x enthalten iſt. Hat man z. B. die Function $2x^3$, ſo kann man ſie in der Form $4.\frac{1}{2}.x^{4-1}$ ſchreiben, und daraus erſehen, daß ſie aus der Function $\frac{1}{2}.x^4$ durch Differentiiren entſtanden ſein muß, wie auch die früher angegebene Regel der Integration lehrt. Hat aber eine Potenzfunction den Exponent -1, z. B. die Function bx^{-1}, ſo würde, wenn man dieſelbe auf die Form max^{m-1} bringen wollte, $m=0$ geſetzt werden müſſen, und folglich der Coefficient b den Factor Null enthalten, welches unmöglich iſt. Eine Potenz mit dem Exponent -1 kann alſo die verlangte Form nicht annehmen, und alſo auch nicht als Differentialquotient einer Potenzfunction betrachtet werden. Die für die Integration einer Potenzfunction angegebene Regel gibt daher auch, auf die Function bx^{-1} angewandt, etwas völlig Sinnloſes, indem man daraus $\frac{bx^0}{0}$ oder $\frac{b}{0}$ erhält, ein Ausdruck, der weder eine Function von x noch überhaupt eine Zahl iſt. Eine

Potenz mit dem Exponent — 1 bildet also nicht, wie man gewöhnlich sagt, einen Ausnahmefall für diese Integrationsregel, sondern sie gehört überhaupt gar nicht zu den Fällen dieser Regel, wie man sogleich erkennt, wenn man die Regel etwas vorsichtiger ausdrückt.

Trifft man auf eine Differentialgleichung, in welcher der Differentialquotient zweier Veränderlichen x und y constant ist, wie die Gleichung $\frac{dy}{dx} = a$, so kann die Herstellung der ihr zugehörigen ursprünglichen Gleichung gewissermaßen mit zur Regel der Integration der Potenzfunction gerechnet werden. Es ist erstens freilich leicht zu sehen, daß in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = a$ die Differentialzeichen ganz überflüssig sind, und daß diese Gleichung mit der Differenzengleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ gleichbedeutend ist, weil die Veränderlichen x und y, die eine constante Stärke des Wachsens haben, gleichmäßig Wachsende sind. Die Differenzgleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ führt aber (nach §. 18) auf die ursprüngliche Gleichung $y = ax$. Also gilt dasselbe auch von der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = a$. Uebrigens könnte man auch, da a so viel ist als ax^0, die Regel der Integration der Potenzfunction auf den Ausdruck ax^0 anwenden, und würde $\frac{ax^1}{1}$ oder ax erhalten, und folglich aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = a$ die ursprüngliche $y = ax$.

§. 47.

Vorläufige Bemerkungen über Constantenbestimmung.

Da jede aus einem Differentialquotienten durch Integration erhaltene Function, welche kurzweg Integral heißen möge, noch einen constanten Bestandtheil bei sich haben

kann, so folgt aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = ax^n$ als ursprüngliche Gleichung im Allgemeinen sowohl $y = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$ als auch $y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$. Die Constante C ist aber von dem gegebenen Differentialquotienten unabhängig. Soll sie also bestimmt werden, so müssen über die Größen, für welche blos die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens durch den Differentialquotienten vorgeschrieben ist, noch andere Bestimmungen vorliegen, aus denen sie gefolgert werden kann. Bei allgemeinen Untersuchungen über die Zusammenhänge ursprünglicher und abgeleiteter Functionen braucht man demnach auf die Constante, als eine blos unbestimmte Möglichkeit, weiter keine Rücksicht zu nehmen. Liegen aber bestimmte Größen vor, deren verhältnißmäßige Stärke des Wachsens gegeben ist, so soll das Integral allgemein den Werth der abhängig Veränderlichen ausdrücken, und dann kann wohl entschieden werden, ob dieser Werth mit einer Constanten behaftet ist oder nicht. Um hierüber zu entscheiden, braucht man nur den Zahlenwerth zu wissen, den die abhängig Veränderliche für irgend einen bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen hat. Stimmt derselbe mit dem Zahlenwerth überein, den das Integral für diesen bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt, so bedarf es natürlich nicht des Zusatzes einer Constanten. Stimmen aber diese Zahlenwerthe des Integrals und der durch dasselbe auszudrückenden abhängig Veränderlichen nicht überein, so ist aus dem Unterschied derselben sogleich zu entnehmen, welcher constante Zusatz gemacht werden muß, um diese Uebereinstimmung, die dann natürlich für alle Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen stattfindet, hervorzubringen, und somit die abhängig Veränderliche richtig auszudrücken. Am gewöhnlichsten ist der Fall, daß man den Zahlenwerth der abhängig Veränderlichen weiß für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen, und kann denselben also vergle-

Potenz mit dem Exponent — 1 bildet also nicht, wie man gewöhnlich sagt, einen Ausnahmefall für diese Integrationsregel, sondern sie gehört überhaupt gar nicht zu den Fällen dieser Regel, wie man sogleich erkennt, wenn man die Regel etwas vorsichtiger ausdrückt.

Trifft man auf eine Differentialgleichung, in welcher der Differentialquotient zweier Veränderlichen x und y constant ist, wie die Gleichung $\frac{dy}{dx} = a$, so kann die Herstellung der ihr zugehörigen ursprünglichen Gleichung gewissermaßen mit zur Regel der Integration der Potenzfunction gerechnet werden. Es ist erstens freilich leicht zu sehen, daß in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = a$ die Differentialzeichen ganz überflüssig sind, und daß diese Gleichung mit der Differenzengleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ gleichbedeutend ist, weil die Veränderlichen x und y, die eine constante Stärke des Wachsens haben, gleichmäßig Wachsende sind. Die Differenzgleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ führt aber (nach §. 18) auf die ursprüngliche Gleichung $y = ax$. Also gilt dasselbe auch von der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = a$. Uebrigens könnte man auch, da a so viel ist als ax^0, die Regel der Integration der Potenzfunction auf den Ausdruck ax^0 anwenden, und würde $\frac{ax^1}{1}$ oder ax erhalten, und folglich aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = a$ die ursprüngliche $y = ax$.

§. 47.

Vorläufige Bemerkungen über Constantenbestimmung.

Da jede aus einem Differentialquotienten durch Integration erhaltene Function, welche kurzweg Integral heißen möge, noch einen constanten Bestandtheil bei sich haben

kann, so folgt aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = ax^n$ als ursprüngliche Gleichung im Allgemeinen sowohl $y = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$ als auch $y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$. Die Constante C ist aber von dem gegebenen Differentialquotienten unabhängig. Soll sie also bestimmt werden, so müssen über die Größen, für welche blos die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens durch den Differentialquotienten vorgeschrieben ist, noch andere Bestimmungen vorliegen, aus denen sie gefolgert werden kann. Bei allgemeinen Untersuchungen über die Zusammenhänge ursprünglicher und abgeleiteter Functionen braucht man demnach auf die Constante, als eine blos unbestimmte Möglichkeit, weiter keine Rücksicht zu nehmen. Liegen aber bestimmte Größen vor, deren verhältnißmäßige Stärke des Wachsens gegeben ist, so soll das Integral allgemein den Werth der abhängig Veränderlichen ausdrücken, und dann kann wohl entschieden werden, ob dieser Werth mit einer Constanten behaftet ist oder nicht. Um hierüber zu entscheiden, braucht man nur den Zahlenwerth zu wissen, den die abhängig Veränderliche für irgend einen bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen hat. Stimmt derselbe mit dem Zahlenwerth überein, den das Integral für diesen bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt, so bedarf es natürlich nicht des Zusatzes einer Constanten. Stimmen aber diese Zahlenwerthe des Integrals und der durch dasselbe auszudrückenden abhängig Veränderlichen nicht überein, so ist aus dem Unterschied derselben sogleich zu entnehmen, welcher constante Zusatz gemacht werden muß, um diese Uebereinstimmung, die dann natürlich für alle Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen stattfindet, hervorzubringen, und somit die abhängig Veränderliche richtig auszudrücken. Am gewöhnlichsten ist der Fall, daß man den Zahlenwerth der abhängig Veränderlichen weiß für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen, und kann denselben also verglei-

chen mit dem Zahlenwerth, den das Integral für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt. So viel vorläufig zum Verständniß des Nächstfolgenden über die Constantenbestimmung, von welcher später noch ausführlicher zu handeln ist.

Ist insbesondere das Integral eine Potenzfunction von x mit positivem Exponenten, so wird dasselbe für $x = 0$ allemal selbst gleich Null. Ist nun zugleich auch die abhängig Veränderliche gleich Null für den Nullwerth des x, so darf keine Constante zugesetzt werden. Behält aber für den Nullwerth des x die abhängig Veränderliche noch einen gewissen Zahlenwerth, so ist dieser selbst dem Integral als Constante zuzufügen. In diesem Falle also, wo das Integral eine Potenz mit positivem Exponenten ist, verhält es sich mit der Constanten ebenso, wie es für gleichmäßig Wachsende (§. 19) gefunden worden ist. In den nächstfolgenden Beispielen werden wir uns auf Potenzfunctionen mit positiven Exponenten beschränken.

§. 48.

Nothwendigkeit einer directen Auffindung des Differentialquotienten.

Wenn man nun gleich zugeben wird, daß man durch Differentiationsregeln bestimmter Functionen in den Stand gesetzt sein kann, aus dem gegebenen Differentialquotienten zweier Veränderlichen das Gesetz der Abhängigkeit dieser Veränderlichen zu finden, so wird doch bei Jedem, der nicht schon anderweit Kenntniß der Differential- und Integralrechnung hat, gewiß das Bedenken entstehen, wie man doch überhaupt im Besitz des Differentialquotienten zweier Veränderlichen sein könne, wenn man denselben nicht erst aus der Function, welche die Art der Abhängigkeit dieser Veränderlichen ausdrückt, durch Differentiiren dieser Function erhalten hat. Allerdings ist ein solches Bedenken an dieser Stelle wohl begründet. Denn wir haben bisher den Differentialquotienten zweier Veränderlichen auf keinem andern Wege erhalten als dem des Differentiirens gegebener

Functionen. Ist dies die einzige Art, zu einem Differentialquotienten zu gelangen, so braucht aus dem Differentialquotienten nicht Etwas abgeleitet zu werden, ohne welches man ihn selbst gar nicht haben würde. Man könnte nie in die Lage kommen, integriren zu müssen, weil der Differentialquotient, wenn man ihn überhaupt hat, eben erst frisch aus dem Integral hervorgegangen wäre. Die ganze Kunst des Integrirens wäre umsonst, und die Weisheit, die Größen aus ihrer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens resultiren lassen zu wollen, eitel.

Aber so verhält es sich keineswegs. Man kann vielmehr auf unzählig vielfache Weise in den Stand gesetzt sein, die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier veränderlichen Größen direct zu finden, ohne im Besitz der Function zu sein, welche die Art der Abhängigkeit dieser Veränderlichen angibt. Sind überhaupt zwei veränderliche Größen durch irgend welche Annahmen, oder durch ihre Verbindung mit andern Veränderlichen, deren Abhängigkeit gegeben ist, in ihrem ganzen Verlaufe völlig bestimmt, so muß doch allgemein der Werth, den die Eine wachsend erreicht, durch den zugehörigen Werth der Andern bestimmbar sein, oder es muß irgend eine wenngleich unbekannte bestimmte Function der willkürlich Veränderlichen geben, welche den Werth der abhängig Veränderlichen ausdrückt. Aus dieser Function würde, wenn sie bekannt wäre, nur eine ganz bestimmte Function als Differentialquotient folgen, und demnach ist auch die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens für alle Punkte der willkürlich Veränderlichen völlig bestimmt. Durch die Coordinatengleichung einer krummen Linie z. B. ist dieselbe nach allen ihren wesentlichen Bestandtheilen genau vorgeschrieben. Die Abscisse der Curve und die Länge der Curve, oder die Abscisse und die Fläche würden Paare von ungleichmäßig wachsenden Größen darstellen, deren verhältnißmäßige Stärke des Wachsens nur unbekannt aber nicht unbestimmt wäre. Wenn man nun, was wir zunächst als

blos möglich setzen, den Differentialquotienten der Curvenlänge und der Abscisse aus der gegebenen Coordinatengleichung abzuleiten im Stande wäre, so würde man diesen Differentialquotienten, weil er nicht aus der die Curvenlänge angebenden Function durch Differentiiren erhalten worden ist, als einen direct gefundenen zu betrachten haben. Eine solche directe Auffindung des Differentialquotienten ist überall möglich, wo entweder die Natur bestimmter continuirlicher Größen es mit sich bringt, daß der Grenzwerth, welchem sich der Quotient zusammengehöriger Zunahmen bei fortgesetzter Verkleinerung derselben immer mehr nähert, unmittelbar ersichtlich ist, oder wo nachgewiesen werden kann, daß die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier ungleichmäßig Wachsenden identisch ist mit der constanten Stärke des Wachsens zweier gleichmäßig Wachsenden derselben Art. Es wäre nichts Unmögliches, die Methoden dieser directen Auffindung des Differentialquotienten auf gewisse Principien und auf eine Art System zu bringen. Doch liegt dies hier außerhalb unseres Zweckes. Es reicht zunächst hin, die Möglichkeit solcher Auffindung an Beispielen nachzuweisen. Man kann sagen, daß diese directe Auffindung des Differentialquotienten, welche überall auf eine Betrachtung der Natur und der Zusammenhänge bestimmter continuirlicher Größen basirt ist, die unterscheidendste Eigenthümlichkeit der Differential- und Integralrechnung ausmacht, weil dieselbe in dieser Hinsicht etwas von allen operativen Theilen der Analysis durchaus Verschiedenes ist. Da eine klare Einsicht in diese Eigenthümlichkeit, durch welche eine Integralrechnung überhaupt erst Sinn und Bedeutung erhält, von großer Wichtigkeit ist, so werden wir dieselbe zunächst an mehreren Beispielen ausführlicher erläutern.

§. 49.

Der Differentialquotient der Fläche und Abscisse bei Parallelcoordinaten.

Wird eine gerade Linie fortbewegt, jedoch so, daß die Richtung der Bewegung nicht mit der Richtung der Linie zusammenfällt, so wird durch diese Bewegung immer ein Flächenraum beschrieben. Die einfachsten Arten durch Bewegung einer Geraden einen Flächenraum in der Ebene zu beschreiben, sind die, daß entweder die Linie parallel mit sich selbst ohne alle Drehung fortbewegt wird, oder daß sie um einen festliegenden Punkt herumgedreht wird. Bewegt sich eine Gerade von unveränderlicher Länge in parallelen Lagen fort auf dem Weg einer geraden Linie, so wird die Fläche eines Parallelogramms beschrieben. Die fortbewegte Linie bildet die unveränderliche Seite des Parallelogramms, und die Nachbarseite derselben ist eben durch die Bewegung veränderlich und wachsend. Die veränderliche Seite des Parallelogramms und die Fläche desselben sind gleichmäßig wachsende Größen (s. §. 14) Ist das Parallelogramm rechtwinklig, so wird eine beliebige Zunahme b c h g (Fig. 4) der Fläche dividirt durch die zugehörige Zunahme b c der Seite, d. h. der Zahlenwerth des Differenzquotienten mit dem Zahlenwerth der unveränderlichen Seite zusammenfallen. Die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen, nämlich der Fläche und der Seite, ist also blos von der Größe der fortbewegten Linie abhängig.

Ist eine krumme Linie d e f (Fig. 14) durch senkrechte Parallelcoordinaten vorgeschrieben, so kann man sich die Curvenfläche dadurch entstanden denken, daß auf dem Wege der Abscissenlinie a b c sich eine Linie von veränderlicher Länge, nämlich die Ordinate, in parallelen Lagen fortbewegt. Die Curvenfläche und die Abscisse sind nun ungleichmäßig wachsende Größen. Ihre verhältnißmäßige Stärke des Wachsens ist zwar stetig veränderlich, jedoch muß sie in jedem Augenblick eine bestimmte, und folglich identisch sein mit der constanten Stärke des Wachsens der

Fläche und Seite irgend eines Parallelogramms. Daß aber für den Punkt b der Abscisse diese momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens identisch ist mit der eines rechtwinkligen Parallelogramms behg, dessen unveränderliche Seite gleich der Ordinate be ist, folgt schon ganz einfach daraus, daß überhaupt bei dieser Art der Flächenerzeugung die Stärke des Wachsens nur von der Größe der fortbewegten Linie abhängt, und hier also auch die momentane Stärke des Wachsens von der momentanen Größe der fortbewegten Linie.

Sehr evident und gewissermaßen handgreiflich kann dieser Satz dadurch gemacht werden, daß man auf die Art des Vorhandenseins eines momentanen Zustandes reflectirt. Innerhalb einer stetigen Veränderung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens ist ein bestimmter Größenzustand derselben nur dadurch möglich, daß mit fortgesetzter Verkleinerung der zusammengehörigen Zunahmen der Veränderlichen auch eine ohne Ende fortgehende Annäherung an eine constante Stärke des Wachsens stattfindet. Eine constante Stärke des Wachsens der Art, wie die vorliegende, wird gegeben durch ein Parallelogramm. Daß nun hier etwa im Punkte b mit Verkleinerung der Zunahmen der Veränderlichen eine Annäherung an ein bestimmtes Parallelogramm stattfindet, ist daraus zu ersehen, daß die Ordinaten sich der Gleichheit mit eb ohne Ende nähern; und daß also auch die Zunahme der Fläche sich ohne Ende einem Parallelogramm nähert, dessen unveränderliche Seite die Ordinate eb ist.

Die bei einer bestimmten Ordinate der Curve vorhandene momentane Stärke des Wachsens der Curvenfläche und der Abscisse erscheint demnach als zur Ausführung gekommen in dem Wachsen eines Parallelogramms, dessen unveränderliche Seite eben diese Ordinate der Curve ist. Nun drückt der Zahlenwerth der fortbewegten unveränderlichen Seite des Parallelogramms, da er mit dem Differenzquotienten der Fläche und Seite desselben zusammen-

fällt, die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens dieser Veränderlichen aus; folglich ist auch der allgemein als Function der Abscisse gegebene Werth der Ordinate Ausdruck der momentenen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der Curvenfläche und der Abscisse, oder ist dem Differentialquotienten dieser beiden Veränderlichen gleich. Oder man erläutere sich dies Resultat durch die isolirten Differentiale. Da die Differentiale, als wirkliche Zahlen betrachtet, nichts Anderes sind, als die Zahlenwerthe der zusammengehörigen Zunahmen, welche die ungleichmäßig Wachsenden unter der Voraussetzung, daß die momentane Stärke des Wachsens zur Ausführung käme, annehmen würden, so ist, wenn wir die Zunahme bg als Differential der Abscisse betrachten, das Parallelogramm behg das Differential der Curvenfläche. Das letztere Differential durch das erstere dividirt, oder der Differentialquotient der Curvenfläche und der Abscisse wird also dem Zahlenwerth der Ordinate be gleich.

Da nun die Function der Abscisse, welche bei senkrechten Parallelcoordinaten die Ordinate ausdrückt, der Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse ist, welche die Curvenfläche ausdrückt, so ist ersichtlich, daß man in dem Besitz des Differentialquotienten der letzteren Function sein kann, ohne sie selbst zu kennen, sobald nur die Coordinatengleichung der krummen Linie gegeben ist.

§. 50.

Beispiele von Flächenberechnungen.

Es mögen hier einige Beispiele von Berechnungen bestimmter Curvenflächen folgen. Für jede krumme Linie, deren Ordinate eine Potenzfunction der Abscisse ist, können wir den Flächeninhalt schon durch unsere obige Regel der Integration einer Potenzfunction finden. Die krumme Linie ab (Fig. 2) sei die gemeine Parabel, ihr Parameter habe den Zahlenwerth 1, und die Abscissenlinie bc falle mit der Axe der Parabel zusammen, und ihr Anfangspunkt

sei in b. Unter diesen Annahmen ist bekanntlich, wenn x und y zusammengehörige Werthe der Abscisse und Ordinate vorstellen, $y = x^{\frac{1}{2}}$. Bezeichnen wir die unbekannte Function von x, welche die Curvenfläche darstellt, durch den Buchstaben F, so ist in diesem Falle $\frac{dF}{dx} = x^{\frac{1}{2}}$. Aus dieser Differentialgleichung folgt die ursprüngliche $F = \frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}}$. Da für den Punkt b oder den Nullwerth der Abscisse die Fläche der Parabel auch Null ist, so ist keine Constante zuzufügen. Die Gleichung $F = \frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}}$ enthält also vollständig die Regel der Berechnung der paraboliſchen Fläche aus der zugehörigen Abscisse.

Schreiben wir $\frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}}$ in der Form $\frac{2}{3} . x . x^{\frac{1}{2}}$, so haben wir in derselben die Abscisse x und die zugehörige Ordinate $x^{\frac{1}{2}}$ als Factoren. Da nun das Product $x . x^{\frac{1}{2}}$ die Fläche des Parallelogramms ausdrückt, welches aus einer Abscisse x und der zugehörigen Ordinate gebildet wird, so beträgt gemäß unserer Gleichung die von denselben Coordinaten und der Curve eingeschlossene paraboliſche Fläche immer zwei Drittel von der Fläche dieses Parallelogramms. In dieser letzteren Form hat Archimedes die von ihm gefundene Regel der Quadratur der Parabel ausgesprochen.

Wäre für die krumme Linie a b c (Fig. 15), deren Abscissenlinie a e sei, $y = \frac{1}{4} x^3$, so hätte man $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{4} x^3$, und folglich $F = \frac{1}{16} x^4$. Da vermöge der angenommenen Coordinatengleichung in dem Nullpunkt der Abscisse

auch die Ordinate, und mithin auch die Fläche gleich Null ist, so kann dem Integral $\frac{1}{16} x^4$ keine Constante zugefügt werden. Schreiben wir, um auch hier in dem Flächenwerth die Abscisse und Ordinate als Factoren zu haben, $\frac{1}{16} x^4$ in der Form $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} x^3 . x$, so sehen wir, da $\frac{1}{4} x^3 . x$ den Flächeninhalt eines mit der Abscisse x und der zugehörigen Ordinate $\frac{1}{4} x^3$ beschriebenen Parallelogramms darstellt, daß die von denselben Coordinaten und der krummen Linie eingeschlossene Curvenfläche immer der vierte Theil dieses Parallelogramms ist.

Ist durch die Linie ac (Fig. 16) als Abscisse und ihre senkrechten Ordinaten die gerade Linie ad vorgeschrieben, so sind die Abscisse und die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ungleichmäßig wachsende Größen, und die Fläche des Dreiecks kann demnach durch Integration gefunden werden. Sei hier eine Ordinate halb so groß als die zugehörige Abscisse, also $y = \frac{1}{2} x$, so ist $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2} x$ und folglich $F = \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x . x$ und zwar, wie leicht zu sehen, ohne Constante. Da $\frac{1}{2} x . x$ das Product aus Ordinate und Abscisse, oder aus Höhe und Grundlinie des rechtwinkligen Dreiecks ist, so ist der Flächeninhalt desselben das halbe Product aus Grundlinie und Höhe.

Das eben entwickelte Verfahren, den Flächeninhalt eines jeden durch senkrechte Parallelcoordinaten gegebenen Raumgebildes in der Ebene zu berechnen, läßt uns schon die wesentlichsten Eigenthümlichkeiten der Integralrechnung erkennen, und ist in dieser Beziehung sehr lehrreich. Zuerst finden wir auch hier wieder die schon früher hervorgehobene große Allgemeinheit der Methode der Auflösung eines Pro-

blems, welche alle Methoden der Differential- und Integralrechnung so vortheilhaft auszeichnet, und welche eine natürliche Folge davon ist, daß man einen höchst allgemeinen, die Entstehungsweise aller Größen umfassenden Begriff, den Begriff der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, fruchtbar anzuwenden gelernt hat. Zugleich bemerken wir, daß nur die Berechnung der mit einer Linie gleichmäßig wachsenden Fläche, nämlich des Parallelogramms, nicht durch die Methode des Integrirens ausgeführt werden kann. Diese Berechnung beruht vielmehr auf Congruenz und Regel de tri. Alle denkbaren ebenen Flächen aber, die nicht Parallelogramme sind, fallen, insofern sie durch Fortbewegen einer geraden Linie in parallelen Lagen erzeugt angenommen werden, unter die Herrschaft der Differential- und Integralrechnung. Diese Rechnung braucht daher auch aus den Elementen der Mathematik überall nur Weniges vorauszusetzen, da sie selbst allumfassend ist. Die Berechnung aller Flächen wird auf die des Parallelogramms, als der einzigen, die in Bezug auf die angegebene Art der Flächenerzeugung gleichmäßig wachsend ist, zurückgeführt. Die Flächen werden dabei nicht als bestehend aus Parallelogrammen betrachtet, aber gewissermaßen als entstehend aus Parallelogrammen, indem ihre Bildung und Erzeugung durch unendlich viele Bestrebungen zur Parallelogrammenbildung vermittelt erscheint. Auf diese Weise sind überhaupt die gleichmäßig wachsenden Größen in den ungleichmäßig wachsenden nicht als mechanische oder atomistische Bestandtheile, sondern als dynamische, d. h. mit der bloßen Stärke ihres Wachsens, enthalten, sie sind nicht Elemente, sondern nur Momente der ungleichmäßig Wachsenden.

§. 51.

Der Differentialquotient der Fläche und Abscisse bei Polarcoordinaten.

Ein anderes ebenso einfaches Beispiel von directer Auffindung des Differentialquotienten zweier Veränderlichen bietet der Differentialquotient der Curvenfläche und der Abscissenlinie einer durch Polarcoordinaten gegebenen krummen Linie dar. Durch die Polarcoordinatengleichung ist der Radius Vector als Function der Abscissenkreislinie gegeben. Die Fläche, welche der Radius Vector bei seiner drehenden Bewegung beschreibt, ist mit der Abscissenlinie ungleichmäßig wachsend. Soll der durch Umdrehung einer Linie erzeugte Flächenraum gleichmäßig wachsen mit der Größe der Umdrehung oder mit der Abscissenkreislinie, so muß die gedrehte Linie eine unveränderliche Länge haben oder die durch Drehung erzeugte Fläche muß eine Kreisfläche sein. Daß im Kreis die Fläche und die Größe der aus einer gewissen Anfangsrichtung gemachten Umdrehung gleichmäßig wachsen, folgt aus der Congruenz der Kreisausschnitte, welche gleichen Kreisbogen angehören. Eine beliebige Zunahme der Kreisfläche dividirt durch die zugehörige Zunahme der Umdrehungsgröße, oder ihres Maßes des Abscissenkreisbogens, gibt also für denselben Kreis eine constante Zahl, oder der Kreis hat einen constanten Differenzquotienten dieser Veränderlichen. Es fragt sich, wie man diesen Differenzquotienten allgemein ausdrücken könne durch irgend eine den Kreis bestimmende Größe, etwa durch den Radius des Kreises. Es sei a b d (Fig. 17) die Abscissenkreislinie, oder der Kreis, dessen Radius den Zahlenwerth 1 hat, und der Punkt a der Anfangspunkt desselben. Um den Mittelpunkt c sei mit c f als Radius durch Drehung eine Kreisfläche beschrieben. Der Zahlenwerth des Radius c f sei durch r vorgestellt. Für diesen Kreis mit dem Radius r soll der constante Differenzquotient der Kreisfläche und des Abscissenkreisbogens ausgedrückt werden. Mit der Zunahme b d des Abscissenkreisbogens ist als Zunahme der Fläche der Ausschnitt c g h verbunden. Der

Zahlenwerth des Ausschnitts cgh dividirt durch den Zahlenwerth von bd gibt den constanten Differenzquotienten. Man kann, da auf die Größe der zusammengehörigen Zunahmen nichts ankommt, den Differenzquotienten am einfachsten erhalten, wenn man die Zunahme bd gleich 1 annimmt; denn in diesem Falle ist der Zahlenwerth des Ausschnittes cgh selbst der gesuchte Differenzquotient. Ist nun bd gleich 1 oder gleich dem Radius des Abscissenkreises, so ist auch der Bogen gh gleich r. Da nun der Flächeninhalt des Kreisausschnitts cgh gleich ist dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Bogen gh oder gleich r, und dessen Höhe gleich dem Radius gc oder auch gleich r ist, so ist derselbe gleich $\frac{r^2}{2}$. Die Zahl $\frac{r^2}{2}$ ist also allgemein der constante Differenzquotient unserer beiden Veränderlichen, nämlich der Fläche eines durch Umdrehung des Radius $= r$ beschriebenen Kreises und der mit einem Radius $= 1$ beschriebenen Kreislinie, und dienet als Maß der gleichbleibenden verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens dieser beiden Veränderlichen. Bezeichnen wir die durch Umdrehung eines Radius $= r$ beschriebene Fläche durch F und den Abscissenkreisbogen durch x, so haben wir die Gleichung $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{r^2}{2}$.

Wird nun durch Umdrehung eines veränderlichen Radius Vectors um einen festen Punkt a (Fig. 18) eine Fläche beschrieben, wie die von der krummen Linie abcde und der geraden ae eingeschlossene Fläche, so sind die Curvenfläche und die Abscissenkreislinie ungleichmäßig wachsend. Die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens dieser Veränderlichen muß in jedem Augenblick eine bestimmte und identisch sein mit der constanten Stärke des Wachsens derselben Veränderlichen in irgend einem Kreis. Hat der Radius Vector die Länge ad erreicht, so ist, wie leicht zu sehen, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens gleich derjenigen eines Kreises mit dem Radius ad, weil

die Radien, je näher sie an ad liegen, desto mehr sich der Gleichheit mit ad nähern, und folglich bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen eine unbegrenzte Annäherung an einen Kreis mit dem Radius ad stattfindet. Da nun die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens einer Kreisfläche vom Radius r und ihrer Abscissenkreislinie ausgedrückt wird durch $\frac{r^2}{2}$, so braucht man nur den allgemein als Function der Abscissenlinie gegebenen Radius Vector ins Quadrat zu erheben, und davon die Hälfte zu nehmen, um in diesem Ausdruck die momentane Stärke des Wachsens der Curvenfläche und der Abscissenlinie, oder den Differentialquotienten dieser Veränderlichen zu haben. Ist mir also durch eine Polarcoordinatengleichung der Radius Vector als Function der Abscissenlinie gegeben, so habe ich auch den Differentialquotienten der Curvenfläche und der Abscisse, ohne diejenige Function der Abscisse zu kennen, welche die Curvenfläche ausdrückt.

Es sei, um ein specielles Beispiel der Flächenberechnung einer Curve zu geben, ac (Fig. 19) der Radius des Abscissenkreises, und der Anfangspunkt desselben im Punkt a. Der Abscissenkreisbogen sei durch x und der Radius Vector durch z vorgestellt. Die krumme Linie cdefgh möge so beschaffen sein, daß der Radius Vector jedesmal die Hälfte des zugehörigen Abscissenkreisbogens ist, und also die Polarcoordinatengleichung $z = \frac{1}{2} x$ stattfindet. Stellen wir die unbekannte Function der Abscissenlinie, welche die Curvenfläche ausdrückt, durch F vor, so haben wir unserm eben gefundenen Satze gemäß die Differentialgleichung $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} x\right)^2 = \frac{1}{8} x^2$. Daraus folgt als ursprüngliche Gleichung $F = \frac{1}{24} x^3$. Die Fläche cde z. B. ist beschrieben worden, indem der Radius Vector sich aus der Anfangsrichtung ca um einen Viertelkreis gedreht hat.

Also hat für diesen Fall x den Zahlenwerth $\frac{\pi}{2}$. Mithin ist die Fläche cde $= \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi^3}{8}$. Beträgt für die Fläche cdefg die Drehung des Radius Vector einen Halbkreis, und ist also $x = \pi$, so ist diese Fläche $= \frac{1}{24} \cdot \pi^3$. Die Größe eines Flächenstücks unserer Curve läßt sich leicht auf ein Kreisflächenstück zurückführen, und dadurch mehr veranschaulichen. Ein beliebiges Curvenflächenstück cdef, welches durch den Radius Vector cf begrenzt ist, beträgt nämlich den dritten Theil des Kreisausschnittes fci, dessen Radius gleich dem begrenzenden Radius Vector cf, und dessen Bogen fi in seiner Gradanzahl mit dem zum Radius Vector cf gehörigen Abscissenbogen übereinstimmt. Denn habe der dem Radius Vector cf zugehörige Abscissenbogen den Zahlenwerth x, so ist $cf = \frac{1}{2} x$, und der Bogen $lf = \frac{1}{2} xx$. Da der Flächeninhalt des Kreisausschnitts fci gleich ist dem halben Product aus fi und fc, so ist er gleich $\frac{1}{8} x^3$. Das Curvenflächenstück cdef ist aber $\frac{1}{24} x^3$, und also der dritte Theil vom Kreisausschnitt fci.

§. 52.

Der Differentialquotient des Flächinhaltes und der Abscisse.

Wie durch Fortbewegen einer Linie von unveränderlicher oder veränderlicher Länge sowohl in rein fortschreitender als in drehender Bewegung eine Fläche beschrieben wird, so kann man durch Fortbewegen einer Fläche von unveränderlicher oder veränderlicher Größe einen körperlichen Raum beschreiben. Diese Entstehungsweise eines Körpers liefert uns ebenfalls ein leichtes Beispiel von directer Auffindung eines Differentialquotienten. Wird eine unverän-

derliche Fläche in parallelen Lagen fortbewegt auf dem Weg einer geraden Linie, so sind der erzeugte Körperraum und der Weg der Fortbewegung gleichmäßig wachsende Größen. Wir wollen, da es uns jetzt nicht auf ein allgemeines geometrisches Resultat ankommt, der Einfachheit wegen annehmen, daß die fortbewegte Fläche kreisförmig sei, und daß die Linie der Fortbewegung senkrecht auf der Kreisfläche stehe. Eine unveränderliche Kreisfläche auf diese Weise fortbewegt erzeugt einen senkrechten Cylinder. Der Radius habe den Zahlenwerth r. Der Weg, welchen der Mittelpunkt der bewegten Kreisfläche beschreibt, oder die Axe des Cylinders, soll als die willkürlich Veränderliche und der Cubikinhalt als die abhängig Veränderliche betrachtet werden. Der Differenzquotient dieser gleichmäßig Wachsenden ist wie bei allen gleichmäßig Wachsenden nichts Anderes, als der Zahlenwerth, den die Zunahme der abhängig Veränderlichen hat bei einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen = 1. Wächst also die Linie der Fortbewegung um den Werth 1, so wächst der veränderliche Cubikinhalt um einen Cylinder, dessen Grundfläche $= r^2 . \pi$ und dessen Höhe = 1 ist, und dessen Cubikinhalt also $= r^2 . \pi$ ist. Die Zahl $r^2 . \pi$ ist mithin der Differenzquotient der beiden Veränderlichen. Stellen wir den veränderlichen Cubikinhalt eines Cylinders mit dem Radius r durch C, und die Linie der Fortbewegung durch x vor, so haben wir die Differenzengleichung $\frac{\Delta C}{\Delta x} = r^2 . \pi$. Da die Zahl $r^2 . \pi$ mit dem Werth des Flächeninhalts des bewegten Kreises zusammenfällt, so kann auch die bewegte Kreisfläche selbst kurzweg als Ausdruck der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen, des Cubikinhalts eines Cylinders nämlich und der Axe desselben, gebraucht werden.

Ist die fortbewegte Kreisfläche veränderlich, wie wenn man sich einen Kegel oder eine Kugel und dergl. durch Fortbewegung einer veränderlichen Kreisfläche erzeugt denkt, so sind die Linie der Fortbewegung, welche wir hier auch

die Abſciſſe nennen wollen, und der Cubikinhalt ungleichmäßig wachſend. Die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens dieſer Veränderlichen iſt in jedem Augenblick identiſch mit der in irgend einem Cylinder vorhandenen conſtanten Stärke des Wachſens derſelben Veränderlichen. Es ſei der Körper a g e (Fig. 20) dadurch beſchrieben, daß der Mittelpunkt einer wachſenden Kreisfläche ſich auf der Linie a f fortbewegt. Hat nun die fortbewegte Kreisfläche in einem beliebigen Punkt b der Abſciſſe die Größe des Kreiſes d n c erreicht, ſo iſt die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens unſerer Veränderlichen ſo groß, als ſie in einem Cylinder c d h i iſt, deſſen Grundfläche ebenfalls der Kreis d n c iſt. Der Beweis dieſer Behauptung iſt den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Beweiſen ganz analog, und aus den Grundbegriffen überall leicht zu entnehmen. Da nun der Zahlenwerth der Grundfläche eines Cylinders die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens von Cubikinhalt und Abſciſſe ausdrückt, indem er mit dem Differenzquotient dieſer Veränderlichen zuſammenfällt, ſo iſt auch die in jedem Punkt der Abſciſſe vorhandene Größe der fortbewegten Kreisfläche Ausdruck der momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens von Cubikinhalt und Abſciſſe, und fällt mit dem Differentialquotient dieſer Veränderlichen zuſammen. Oder man kann auch ſo ſchließen: Der Differentialquotient zweier Veränderlichen iſt der Quotient derjenigen zuſammengehörigen Zunahmen, welche die Veränderlichen annehmen würden, wenn die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens unverändert bliebe; alſo hier der Quotient, den man erhält, wenn man den Werth des Cylinders c d h i durch den Werth der Linie b m dividirt. Da nun dieſer Quotient mit dem Werth der Kreisfläche d n c zuſammenfällt, ſo iſt dieſer Werth auch dem Differentialquotienten gleich, und der allgemein als Function der Abſciſſe ausgedrückte Werth der fortbewegten Kreisfläche gibt den Differentialquotienten der beiden ungleichmäßig Wachſenden, des Cubikinhalts und der Abſciſſe. Iſt

mir aber der Radius des fortbewegten Kreises als Function der Abscisse gegeben, so habe ich auch die Kreisfläche als Function der Abscisse. Man braucht also die Function der Abscisse, welche den Cubikinhalt eines auf diese Weise erzeugten Körpers ausdrückt, nicht zu wissen, und kann doch den Differentialquotient dieser Function haben, und dieselbe also durch Integration erhalten.

Nehmen wir einige Beispiele, in welchen der Differentialquotient eine bloße Potenzfunction ist. Es sei der senkrechte Kegel a c d (Fig. 21) durch Fortbewegen einer veränderlichen Kreisfläche erzeugt. Ist die Axe des Kegels die wachsende Abscissenlinie, x ihr Zahlenwerth und ihr Nullpunkt im Punkt a, in der Spitze des Kegels, so hat der Radius des fortbewegten Kreises, als mit x gleichmäßig wachsend, im Allgemeinen den Werth a x. Die veränderliche Kreisfläche ist also $a^2 . x^2 . \pi$. Die unbekannte Function der Abscisse, welche den Cubikinhalt des Kegels ausdrückt, heiße C. Man hat also die Differentialgleichung $\frac{dC}{dx} = a^2 . \pi . x^2$. Folglich $C = \frac{a^2 \pi . x^3}{3}$. Daß keine Constante zuzusetzen ist, leuchtet von selbst ein. Um das gefundene Resultat in Form bekannter Regeln auszudrücken, so braucht man nur zu beachten, daß für eine Höhe des Kegels = x die Grundfläche desselben = $a^2 . \pi . x^2$ ist. Und da das Product beider, nämlich $a^2 \pi . x^3$, den Cubikinhalt eines Cylinders ausdrückt, der mit dem Kegel gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so sieht man, daß der Cubikinhalt des Kegels der dritte Theil von dem des Cylinders ist.

Sei ferner die krumme Linie a d g (Fig. 20) die gemeine Parabel, und ihre Abscissenlinie x mit der Axe a f zusammenfallend, und ihr Nullpunkt in a oder dem Scheitel der Parabel. Geben wir dem Parameter der Parabel den Zahlenwerth 1, so ist der veränderliche Radius des fortbewegten Kreises, als Ordinate der Parabel, $= x^{\frac{1}{2}}$. Die

Fläche dieses Kreises ist $= x \cdot \pi$. Also haben wir die Differentialgleichung $\frac{dC}{dx} = \pi \cdot x$. Daraus die ursprüngliche $C = \frac{\pi \cdot x^2}{2}$, ohne Constante, wie ebenfalls leicht zu sehen. Der Cubikinhalt eines paraboliſchen Körpers a g e läßt ſich leicht mit dem eines Cylinders von derſelben Grundfläche g e und derſelben Höhe a f vergleichen. Denn ſei die Abſciſſe oder die Höhe des paraboliſchen Körpers allgemein x, ſo iſt die zugehörige Grundfläche $\pi \cdot x$. Da nun der Cubikinhalt eines Cylinders von derſelben Grundfläche und Höhe $= \pi \cdot x^2$ iſt, ſo iſt er doppelt ſo groß als der Cubikinhalt des paraboliſchen Körpers.

Wir haben hier als Beiſpiele der Berechnung eines Flächen- oder Cubikinhaltes nicht ohne Abſicht lauter ſolche Aufgaben gewählt, die auch auf andern Wegen, und zwar namentlich ſchon von Archimedes gelöſt ſind. Wenn man weiß, oder ſich die Mühe nehmen will nachzuſehen, welche vielfache verſchiedene Mittel Archimedes zur Löſung dieſer Aufgaben in Bewegung ſetzen mußte, wie künſtlich und mühſam die zu berechnenden Raumgebilde mit andern bekannten, die als Mittelglied der Vergleichung dienten, in Verbindung geſetzt werden mußten, und deswegen auch das Verfahren bei jeder dieſer Aufgaben ein eigenthümliches ſein mußte, und wenn man nun damit vergleicht, wie hier durch ein und daſſelbe Mittel der Beſtimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens, welches außerdem eine unbegrenzte Anwendbarkeit auf alle Größen hat, und durch die einfache Regel der Integration einer Potenzfunction, nicht nur dieſe, ſondern auch noch unzählig viele andere Aufgaben der Flächen- und Körperberechnung, die dem Archimedes unüberwindlich bleiben mußten, ſehr leicht löſbar ſind, ſo wird man erkennen, wie groß die Vorzüge einer Wiſſenſchaft ſind, die ſich auf einen allgemeinen Standpunkt der Betrachtnng erhoben hat, und wird ſich, wenn man es nicht ſchon aus andern Wiſſenſchaften weiß,

überzeugen, daß die Kraft der Allgemeinheit nie hoch genug angeschlagen werden kann.

§. 53.

Der Differentialquotient der Curvenlänge und der Abscisse.

Es mögen uns noch, ehe wir weiter gehen, die Abscisse einer durch Parallelcoordinaten vorgeschriebenen krummen Linie, und die Länge der krummen Linie ein Beispiel der directen Auffindung eines Differentialquotienten geben. Soll eine durch Parallelcoordinaten vorgeschriebene Linie mit der Abscisse gleichmäßig wachsen, so muß sie bekanntlich eine gerade Linie sein. Ist ae (Fig. 3) die Abscissenlinie als willkürlich Veränderliche, und ak die durch Parallelcoordinaten vorgeschriebene Grade als abhängig Veränderliche, so ist die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens derselben durch den Zahlenwerth des Quotienten $\frac{fg}{bc}$ oder $\frac{fg}{fm}$ gegeben. Man sieht, daß dieser Differenzquotient nur von dem Winkel abhängt, den die Gerade ak mit ihrer Abscisse macht, oder von der Richtung, welche die Gerade bezüglich auf ihre Abscisse einschlägt. Mit Vergrößerung dieses Winkels wird der Differenzquotient größer, und kann beliebig groß werden. Mit Verkleinerung dieses Winkels aber nähert er sich der Zahl 1 als Grenze, die er nie überschreiten kann.

Die Abscisse ac einer krummen Linie ade (Fig. 22) und die Länge der krummen Linie selbst sind ungleichmäßig wachsend. Ihre verhältnißmäßige Stärke des Wachsens fällt in jedem Augenblick zusammen mit der constanten Stärke des Wachsens, welche irgend eine Gerade und ihre Abscisse haben. Nun hängt aber die Stärke des Wachsens, welche eine Gerade verhältnißmäßig zu ihrer Abscisse hat, bei gegebener Lage der Abscisse nur von der Richtung dieser Geraden ab. Und da die krumme Linie selbst in jedem Punkt eine bestimmte Richtung hat, und

in ihrem Verlauf momentan immer mit einer Geraden, nämlich der Tangente, zusammenfällt, so muß auch in jedem Punkt die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der krummen Linie und ihrer Abscisse zusammenfallen mit der constanten Stärke des Wachsens der Tangente dieses Punktes und ihrer Abscisse. Ist also die Gerade dg die Tangente des Punktes d, so ist in dem Differenzquotient der Tangente und Abscisse, oder in dem Bruch $\frac{dg}{df}$, die Stärke des Wachsens als ausgeführte enthalten, welche für die Curve und ihre Abscisse im Punkte d momentan vorhanden ist. Es handelt sich also nur darum, den Quotient zusammengehöriger Zunahmen der Tangente und ihrer Abscisse, oder den Bruch $\frac{dg}{df}$, allgemein als Function der Abscisse auszudrücken, um in demselben den Differentialquotienten der Curve und ihrer Abscisse zu haben. Dies ist aber möglich, sobald die Coordinatengleichung der Curve gegeben ist. Heiße die Abscisse der Curve x, und die Function von x, welche die Ordinate ausdrückt, y. Da in den Coordinaten der Tangente dg die für den Punkt b der Abscisse vorhandene Stärke des Wachsens der Coordinaten der krummen Linie zur Ausführung kommt (s. §. 31), so ist allgemein der Quotient $\frac{gf}{df}$ dem Differentialquotienten von y und x, oder dem Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich. Nehmen wir nun, was uns frei steht, die Zunahme bc oder df der Abscisse so groß, daß sie den Zahlenwerth 1 hat, so wird gf dem Bruch $\frac{gf}{df}$, oder allgemein dem Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich. Ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck gdf die eine Kathete = 1 und die andere allgemein = $\frac{dy}{dx}$, so ist allgemein die Hypotenuse

$dg = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Dieser allgemeine Werth von dg fällt, da $df = 1$ ist, mit dem allgemeinen Werth des Bruches $\frac{dg}{df}$ zusammen. Folglich ist der allgemeine Werth von $\frac{dg}{df}$, oder der Differentialquotient der Curve und ihrer Abscisse $= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Stellen wir die unbekannte Function der Abscisse, welche die Curvenlänge ausdrückt, durch L vor, so haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Da $\frac{dy}{dx}$ als eine gegebene Function von x betrachtet werden kann, sobald man die Coordinatengleichung der Curve hat, so ist auch $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ eine durch die Coordinatengleichung gegebene Function von x. Man sieht, daß dieser Differentialquotient, da das Quadrat von $\frac{dy}{dx}$ immer positiv ist, nie kleiner als 1 werden kann, wie wir auch schon oben die Zahl 1 als die Grenze des entsprechenden Differenzquotienten für die gerade Linie fanden. Da der Differentialquotient der Curve und ihrer Abscisse, wie seine Zusammensetzung zeigt, niemals als einfache Potenzfunction erscheinen kann, so können wir das Verfahren, Curvenlängen durch Integration zu berechnen, an dieser Stelle noch nicht durch Beispiele erläutern.

§. 54.

Allgemeine Bemerkungen über directe Auffindung des Differentialquotienten.

Die in den vorhergehenden Paragraphen enthaltenen Resultate beweisen hinlänglich, daß es möglich ist, im Besitz des Differentialquotienten zweier Veränderlichen zu sein,

ohne die Function zu kennen, welche die Art der Abhängigkeit dieser Veränderlichen ausdrückt, und daß demnach auch das Integriren einer Function eine Operation von großer Wichtigkeit und vielversprechender Anwendung sein kann. Um die Nachweisung dieser Möglichkeit handelte es sich aber zunächst nur. Die hier betrachteten Fälle directer Auffindung eines Differentialquotienten gehören zwar zu den einfachsten, weil in ihnen allen die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens nur von Einem bestimmenden Element abhängig ist, wie z. B. bei den Flächen nur von der Größe der in fortschreitender oder drehender Bewegung begriffenen Linie; damit ist denn auch dies verbunden, daß die gleichmäßig Wachsenden derselben Art unmittelbar in die Augen fallen, und daß es äußerst einfach ist, nachzuweisen, mit welchen möglichen Gradverschiedenheiten der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens dieser gleichmäßig Wachsenden die ungleichmäßig Wachsenden momentan zusammentreffen. Aber wenn dies auch nicht der Fall ist, daß die Stärke des Wachsens sich von Einem Element abhängig zeigt, so kann man entweder die bestimmenden Elemente einzeln aufsuchen und sie zusammensetzen, und dann hat dies Verfahren die größte Aehnlichkeit mit der Zusammensetzung der Verhältnisse in der sogenannten zusammengesetzten Regel de tri, oder man kann, welches das gewöhnliche wenn auch nicht überall preiswürdige Verfahren ist, ohne Weiteres zusehen, wie sich aus der besonderen Natur der veränderlichen Continua der Grenzwerth bestimmen läßt, dem sich der Quotient zusammengehöriger Zunahmen bei fortgesetzter Verkleinerung derselben ohne Ende nähert. Dieser Grenzwerth allgemein als Function der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt, ist dann der Differentialquotient. Diese Verfahrungsweisen werden im weiteren Verlauf unserer Wissenschaft durch Beispiele hinlänglich einleuchtend werden, und eine ausführlichere Betrachtung derselben liegt, wie schon bemerkt, außerhalb des Zweckes dieses Buches.

§. 55.

Der Differentialquotient als willkürliche Voraussetzung.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Aufgabe der Integration uns auch dadurch entstehen kann, daß über eine veränderliche Größe, welche an sich nur eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen ausdrückt, eine willkürliche Voraussetzung gemacht, und nach den in dieser Voraussetzung enthaltenen Folgerungen gefragt wird. Eine Geschwindigkeit z. B. ist an sich nur eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von Raum und Zeit $\left(c = \frac{ds}{dt}\ \text{§. 41}\right)$, und eine Kraft nur eine Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit $\left(v = \frac{dc}{dt}\ \text{§. 41}\right)$, versteht sich, wenn die Kraft auf eine gewisse Masseneinheit bezogen oder unter Umständen betrachtet wird, in welchen zu ihrer Bestimmung auf die Masse nichts ankommt, wie bei der Schwerkraft, wo die Kraft in geradem Verhältniß mit der Masse wächst. Macht man nun etwa die willkürliche Annahme, daß eine Geschwindigkeit irgend eine bestimmte Function der Zeit sein solle, die durch $f(t)$ vorgestellt sein möge, so hat man in $\frac{ds}{dt} = f(t)$ eine Differentialgleichung von Raum und Zeit, und muß eine Integration vornehmen, um die Art der Abhängigkeit von Raum und Zeit, welche bei dem angenommenen Gesetz der Geschwindigkeit stattfindet, zu finden. Wenn auch hierbei der Differentialquotient nur in Gestalt einer ursprünglichen oder willkürlichen Voraussetzung erscheint, und nicht in Gestalt einer aus andern Voraussetzungen abgeleiteten Bestimmung, so wird man doch in Betreff des allgemeinen Zweckes der Mathematik keinen wesentlichen Unterschied hierin finden, weil die Mathematik sich die Aufgabe stellt, von jeder Voraussetzung auf die darin enthaltenen Folgen zu kommen, und ihr gan-

zer Inhalt im Allgemeinen kein anderer ist, als die allseitige Vermittelung von Voraussetzung und Folge.

Nehmen wir z. B. an, daß eine Kraft constant sei, so können die Fragen entstehen, wie hängt die Geschwindigkeit, die jedenfalls veränderlich ist, von der Zeit ab, und wie hängt ferner bei dieser ungleichförmigen Geschwindigkeit der Raum von der Zeit ab. Sei die constante Kraft $= a$, so hat man $\frac{dc}{dt} = a$, und daraus (§. 46) $c = at$, also die Geschwindigkeit gleichmäßig wachsend mit der Zeit. Setzt man nun $\frac{ds}{dt}$ statt c, und bildet die Differentialgleichung $\frac{ds}{dt} = at$, so folgt $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$. Gebraucht man als Beispiel der constanten Kraft die Schwerkraft, wie sie an der Oberfläche der Erde wirkt, so hat man, da diese Kraft so groß ist, daß vermöge derselben die Geschwindigkeit eines Körpers in Einer Secunde um 30 Fuß verändert wird, die Gleichung $\frac{dc}{dt} = 30$. Also $c = 30\,t$. Ferner $\frac{ds}{dt} = 30\,t$, und daraus $s = 15\,t^2$. Man vergleiche diese Ableitung der Fallgesetze mit denjenigen, welche sonst gegeben, und durch andere Mittel ohne Zuhülfenahme der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung zu Stande gebracht werden.

§. 56.

Uebergang zu Leibnitzens Ansicht des Integrirens.

Betrachten wir das bisher entwickelte Verfahren des Integrirens, welches auf einem durch Differentiationsregeln vermittelten und erkennbaren Zusammenhang von ursprünglichen und abgeleiteten Functionen, und auf einem Schluß von den Letzteren auf die Ersteren beruht, so läßt sich nicht leugnen, daß dasselbe, wenn auch nichts Unsicheres, doch etwas sehr Unanschauliches enthält. Weil diejenige Fun-

ction, durch deren Differentiation ein gegebener Differentialquotient zweier Veränderlichen entstanden sein kann, nothwendig auch die Weise der Abhängigkeit endlicher Werthe dieser Veränderlichen angeben muß, so ist zwar das Gesetz der Abhängigkeit der Veränderlichen aus der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens richtig erschlossen, aber man sieht dabei nicht eigentlich die im Wachsen erreichten Werthe der Veränderlichen durch das Wachsen selbst und die verhältnißmäßige Stärke desselben erzeugt. Denn die zusammengehörigen Werthe der Veränderlichen erscheinen nicht sowohl direct als eine Folge der Stärke ihres Wachsens, als vielmehr umgekehrt die Stärke des Wachsens der Veränderlichen oder ihr Differentialquotient wie eine Folge einer bestimmten Function betrachtet wird; und dabei wird nur aus dieser Folge auf die ihr zugehörige Voraussetzung geschlossen. Wenn man aber die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens nach ihrer Bedeutung für die durch fortschreitendes Wachsen hervorgehenden Werthe der von einander abhängigen Größen betrachten, und sich bei Herleitung dieser Werthe an den Begriff des Wachsens selbst und dessen Stärke halten wollte, so würde dies voraussetzen, daß man die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens nach ihrem ganzen wechselnden Laufe verfolgte, die einzelnen unzählig vielen Momente derselben zu einem Resultat zusammenzöge, und die im Wachsen erreichten endlichen Werthe der Veränderlichen als solche Resultate erscheinen ließe. Dadurch würde es dann klar und anschaulich werden, wie die verhältnißmäßige momentane Stärke des Wachsens als inneres erzeugendes Element in der Bildung und dem ganzen Verlauf der Größen immer wirksam und thätig ist. Eine auf diese Ansicht gegründete Methode der Integration versetzt sich in eine lebendige Anschauung des stetigen Flusses der Bildung und Entstehung der Größen, und vollbringt sich nicht blos durch die Erinnerung an bekannte Zusammenhänge von Formeln und Functionen. Diese Ansicht vom Integriren hat, wie sie

denn die am einfachsten und natürlichsten sich darbietende ist, zugleich bei der Entstehung der Differential- und Integralrechnung als die leitende und herrschende zu Grunde gelegen. Sie darf schon deswegen nicht mit Stillschweigen übergangen werden, weil erst aus ihr die für das Integriren eingeführten Benennungen und Bezeichnungen, die wir bis jetzt noch außer Acht gelassen haben, erklärlich werden.

Man wird bemerkt haben, daß nach der bis hier gegebenen Ansicht vom Integriren es keine ursprüngliche Methode des Integrirens, sondern nur eine des Differentürens giebt, und daß demnach auch das Integriren nicht weiter reichen kann, als es durch die Regeln der Differentiation zugänglich gemacht ist. Eine Art ursprünglicher Methode des Integrirens, welche die durch Wachsen erzeugten Größen als die Summen unzählig vieler Incremente betrachtet, deren Verhältnisse für alle Verflußpunkte vorgeschrieben sind durch die gegebene verhältnißmäßige Stärke des Wachsens, und die keine Bekanntschaft mit Differentiationsregeln voraussetzt, hatte Leibnitz im Sinne, als er die noch jetzt geltende Terminologie und Zeichensprache einführte. Warum diese Auffassung des Integrirens in den neueren Darstellungen der Differential- und Integralrechnung so sehr in den Hintergrund getreten oder vielmehr fast gänzlich verschwunden ist, dies hat seinen Grund wohl hauptsächlich darin, daß man mit der im Vorhergehenden entwickelten Methode des Integrirens bei dem jetzigen Standpunkt der Mathematik weiter kommt mit der andern, und die Letztere für die Praxis der Mathematik ganz überflüssig erscheint. Und da man es liebt, in mathematischen Darstellungen sich in Betreff allgemeiner Begriffserörterungen auf die äußerste Nothdurft zu beschränken, so hat man die ursprüngliche Vorstellung vom Integriren ganz fallen gelassen, obgleich sie, wenn man neben dem speciell mathematischen auch das allgemein wissenschaftliche Interesse im Auge behält, gerade höchst lehrreich und interessant ist.

Ein zweiter Grund der Zurücksetzung dieser Ansicht des Integrirens liegt darin, daß man sich mit derselben von Neuem auf das Eis einer schlüpfrigen Dialektik begibt, und die Meisten allen dialektischen Begriffsbestimmungen wie wahren Verdrießlichkeiten aus dem Wege gehen. Sieht man in der Operation des Integrirens nichts weiter, als eine nach bestimmten Regeln erfolgende Umkehrung von Formeln und Functionen, oder einen Rückschluß von einer Function auf eine andere, so fallen alle logischen Schwierigkeiten ganz allein auf die Differentialrechnung, und mit der Begründung der Integralrechnung hat es dann weiter gar keine Noth. Aber die Begriffe, denen man in der allgemeinen Exposition des Integrirens aus dem Wege geht, sind deswegen in der Praxis der Anwendung keineswegs verschwunden, sondern werden um so ungenirter gebraucht, je weniger sie durch Betrachtung ihrer allgemeinen Natur in bösen Verdacht gebracht worden sind. In der That erhält die Art, wie in den Fällen, wo es sich um eine directe Auffindung des Differentialquotienten handelt, gewöhnlich das Differential der abhängig Veränderlichen aufgestellt wird, nur durch die Leibnitzische Ansicht des Integrirens ihren einfachen natürlichen Sinn, und es ist deswegen ein Zurückgehen auf dieselbe auch für das Verständniß der üblichen directen Differentialbestimmung nicht ohne Bedeutung.

§. 57.

Das Integral als Summenformel einer unendlichen Reihe.

Wenn man zwei von einander abhängige ungleichmäßig wachsende Größen hat, und man will für einen gewissen Werth der Einen den zugehörigen Werth der Andern berechnen, so ist der am nächsten liegende Gedanke, auf welchen als erstes Aushülfsmittel gewöhnlich Jeder von selbst verfällt, der, daß man die ungleichmäßig wachsenden Größen innerhalb kleiner Strecken oder innerhalb der Grenzen kleiner Zunahmen gleichmäßig wachsend denkt, und die den kleinen Theilen, in welche man die willkürlich Verän-

derliche zerfällt hat, unter dieſer Vorausſetzung zugehörigen Theile der abhängig Veränderlichen berechnet, und dann die Summen der ſo erhaltenen Theile einer jeden einzelnen Veränderlichen als die zuſammengehörigen Werthe der Veränderlichen betrachtet. Angenommen, es ſollte z. B. die Curvenfläche adec (Fig. 23) berechnet werden aus dem gegebenen Differentialquotient der Curvenfläche und der Abſciſſe ac, und mithin als Function der Abſciſſe dargeſtellt werden. Der Differentialquotient der Curvenfläche und der Abſciſſe iſt mir gegeben, wenn ich nur die Parallelcoordinatengleichung der Curve habe, weil die Function der Abſciſſe, welche die Ordinate ausdrückt, zugleich dieſen Differentialquotienten angibt (ſ. §. 49). Wenn man nun das der Abſciſſe ac zugehörige Flächenſtück abced berechnen wollte, ſo bleibt, da jede endliche Zunahme der Abſciſſe und die zugehörige Zunahme der Fläche als ungleichmäßig Wachſende keine unmittelbare Vergleichung geſtatten, wie es ſcheint nichts Anderes übrig, als den krummlinigt begrenzten Flächenraum in ſolche Flächenformen zu zerlegen, welche mit der Abſciſſe, alſo überhaupt mit einer geraden Linie gleichmäßig wachſen. Eine ſolche Flächenform iſt aber nur das Parallelogramm. Wenn man nun die Abſciſſe ac in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theil theilt, und innerhalb eines jeden ſolchen Theiles die Curvenfläche mit der Abſciſſe gleichmäßig wachſend denkt, und zwar mit der Stärke des Wachſens, welche im Anfangspunkt eines jeden Abſciſſentheiles vorhanden war, ſo erhält man ſtatt der Curvenfläche eine Reihe Parallelogramme, deren Nachbarſeiten ein kleines Abſciſſenſtück und die dem Anfangspunkt dieſes Abſciſſenſtücks zugehörige Ordinate ſind. Durch den gegebenen Differentialquotienten der Curvenfläche und der Abſciſſe kann das einer jeden Zunahme der Abſciſſe zugehörige Parallelogramm berechnet werden. Die Abſciſſe und die Curvenfläche haben nun ſtatt einer ſtetigen Veränderung ihrer Stärke des Wachſens eine in kleinen Abſätzen ſprungweis vor ſich gehende. Mit Verkleinerung der glei-

chen Theile der Abscisse und mit der zugleich erfolgenden Vermehrung der Anzahl der Parallelogramme, werden die Flächenstücke, welche zur Curvenfläche gehören, aber außerhalb der Parallelogramme liegen bleiben, immer mehr und mehr in die Parallelogramme eingeschlossen werden. Mithin wird die Summe aller Parallelogramme den Flächenraum der Curve um so genauer angeben, je kleiner man die gleichen Theile der Abscisse und damit zugleich die Breite der Parallelogramme macht. Es scheint nun, daß man auf diesem Wege den wahren Werth der Fläche niemals finden werde, und daß man immer noch einen in die Parallelogramme nicht einschließbaren Raum übrig behalten muß, der wie der schädliche Raum der Luftpumpe unvertilgbar ist. Aber es ist zu bedenken, daß der nicht in die Parallelogramme aufgenommene Flächenraum durch fortgesetzte Verkleinerung der Theile der Abscisse zu jedem beliebigen Grad von Kleinheit heruntergebracht werden kann, und bei einer endlos gedachten Verkleinerung der Abscissentheile völlig verschwindet. Ist nun die Curve durch irgend ein Coordinatengesetz gegeben, und die Abscisse in lauter gleiche Theile getheilt, so bilden die diesen gleichen Abscissentheilen zugehörigen Parallelogramme eine gesetzmäßige Reihe. Es muß also auch eine Summenformel dieser gesetzmäßigen Reihe geben, gleichviel ob wir dieselbe durch die bisherigen Hülfsmittel der Mathematik finden können oder nicht. Ist nun in dieser Summenformel eine Grenze erkennbar, welcher sich dieselbe bei endlos fortgesetzter Vermehrung der Anzahl der Glieder der Reihe, und der zugleich erfolgenden Verkleinerung der Größe der Glieder ohne Ende nähert, so gibt diese Grenze der Summenformel ohne Zweifel den wahren Werth der abhängig Veränderlichen, wie hier der Curvenfläche, an. Die gemachte falsche Voraussetzung einer sprungweis vor sich gehenden Veränderung der Stärke des Wachsens wird, indem man zur Grenze der Summenformel übergeht, in dem Resultate wieder aufgehoben, und die als gleichmäßig wachsend angenommenen Theile der ab-

hängig Veränderlichen erscheinen blos als ein Gerüste oder ein Unterbau discreter Theile, welche nur zur Herstellung einer gesetzmäßigen Reihe gebraucht werden, und welche in dem Grenzwerth der Summenformel dieser Reihe wieder continuirlich in einander überfließen. Die aus dem Differentialquotienten auf diese Weise für den Werth der abhängig Veränderlichen erhaltene Function, oder das Integral erscheint dabei als die Grenze der Summenformel einer endlichen Reihe, oder was hier dasselbe ist als die Summenformel einer unendlichen Reihe.

Auf ähnliche Weise, wie in dem angenommenen Beispiel von der Curvenfläche und der Abscisse, wird es sich mit allen ungleichmäßig Wachsenden verhalten. Man kann sie innerhalb kleiner Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleichmäßig wachsend denken. Durch den gegebenen Differentialquotienten läßt sich die Zunahme der abhängig Veränderlichen, welche unter dieser Annahme mit einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen verbunden sein müßte, berechnen. Die Summe aller dieser Zunahmen der abhängig Veränderlichen wird einen um so genaueren Näherungswerth derselben geben, je kleiner die gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen angenommen werden. Die Abweichung vom wahren Werth der abhängig Veränderlichen kann durch fortgesetzte Verkleinerung der Zunahmen bis zu jedem beliebigen Grad von Kleinheit heruntergebracht werden, und hat keine Grenze ihrer Verkleinerung. Sollte diese Behauptung in ihrer Allgemeinheit streng bewiesen werden, so würden dazu Sätze erfordert, welche wir erst bei Gelegenheit des zweiten Differentialquotienten in näheren Betracht nehmen werden, und deren Aufstellung uns hier zu weit von unserm Gegenstand abführen würde. Es kann uns aber auch auf diesen Beweis an dieser Stelle um so weniger etwas ankommen, da wir die hier zu erklärende Ansicht vom Integriren nicht zur Grundlage weiterer Untersuchungen nehmen, sondern dieselbe nur gebrauchen, um die Entstehung der Terminologie

und Zeichensprache und eine übliche Art directer Aufstellung des Differentials einer abhängig Veränderlichen nachzuweisen. Erhält man nun durch fortgesetzte Verkleinerung der gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer genauere Näherungswerthe der abhängig Veränderlichen, und hat die Abweichung von dem wahren Werth derselben keine Grenze ihrer Verkleinerung, so wird auch allgemein, wenn man den Differentialquotienten in der oben angegebenen Weise zur Aufstellung einer Reihe benutzt, und die Summenformel dieser Reihe bildet, der Grenzwerth, welchem sich diese Summenformel bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen nähert, den Werth der abhängig Veränderlichen mit absoluter Genauigkeit enthalten.

§. 58.

Beispiel von der Flächenberechnung des Dreiecks.

Es soll die Regel der Berechnung des Flächeninhalts eines rechtwinkligen Dreiecks abc (Fig. 24) gefunden werden. Die Kathete ab sei die Abscisse. Die Fläche soll beschrieben gedacht werden durch die Fortbewegung der auf ab senkrechten wachsenden Ordinate. Nehmen wir an, daß der Nullpunkt der Abscisse x auf den Punkt a falle, so ist die Ordinate der geraden Linie ac im Allgemeinen ax. Da die senkrechte Ordinate, als Function der Abscisse ausgedrückt, dem Differentialquotienten der Fläche und der Abscisse gleich ist, so erhalten wir, wenn wir den Flächeninhalt des Dreiecks durch F vorstellen, die Differentialgleichung $\frac{dF}{dx} = ax$, oder $dF = ax.dx$. Das Differential der abhängig Veränderlichen, hier dF, stellt bekanntlich die Zunahme vor, welche die abhängig Veränderliche annehmen würde bei einer beliebigen Zunahme dx der willkürlich Veränderlichen unter der Voraussetzung, daß die Stärke des Wachsens innerhalb dieser Zunahme dx unver-

ändert bliebe, das heißt in unserm Falle, daß die Ordinate innerhalb der Zunahme dx ihre Größe nicht veränderte, und durch ihre Fortbewegung ein Parallelogramm beschriebe. Die so entstehenden Parallelogramme, welche als die successiven Flächenzunahmen betrachtet werden, und den veränderlichen Werthen von dF entsprechen, stellen, sobald die Zunahmen der Abscisse alle gleich angenommen werden, eine durch den gegebenen Differentialquotienten bestimmte gesetzmäßige Reihe dar. Wenn wir nun dasjenige Stück der Abscisse ab, welches nach dem beliebig anzunehmenden Längenmaß den Zahlenwerth 1 erhält, in n gleiche Theile theilen, und diese als die successiven Zunahmen der Abscisse betrachten, so wächst die Abscisse fortwährend um einen Theil von dem Zahlenwerth $\frac{1}{n}$. Hat nun die Abscisse den Zahlenwerth $\frac{1}{n}$ erreicht, so hat das mit der nächsten Zunahme der Abscisse $= \frac{1}{n}$ verbundene Parallelogramm den Werth $\frac{a.1}{n}.\frac{1}{n}$. Wächst die Abscisse von dem Punkt, wo sie den Werth $\frac{2}{n}$ hat, um $\frac{1}{n}$, so ist das damit verbundene Parallelogramm $= a.\frac{2}{n}.\frac{1}{n}$. Für den Werth der Abscisse $= \frac{n}{n}$ oder 1, ist der des Parallelogramms $= a.\frac{n}{n}.\frac{1}{n}$. Für den Werth $\frac{2n}{n}$ oder 2 der Abscisse ist der des Parallelogramms $= a.\frac{2n}{n}.\frac{1}{n}$. Allgemein für den Werth $x.\frac{n}{n}$ oder x der Abscisse ist der Werth des Parallelogramms $= a.\frac{xn}{n}.\frac{1}{n}$. Lassen wir also die Abscisse durch lauter gleiche Zunahmen $= \frac{1}{n}$ wachsen, von

dem Zahlenwerth $\frac{1}{n}$ bis zu dem allgemeinen Zahlenwerth x, so ſtellen ſich die Werthe der dieſen Zunahmen zugehörigen Parallelogramme in folgender Reihe dar:

$$a.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}, a.\frac{2}{n}.\frac{1}{n}, a.\frac{3}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{n}{n}.\frac{1}{n},$$

$$a.\frac{(n+1)}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{2n}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{3n}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{xn}{n}.\frac{1}{n}.$$

Durch Abſonderung des gemeinſchaftlichen Factors $a.\frac{1}{n}$ und Addition der Glieder erhalten wir die Reihe

$$a.\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n}{n}+\frac{n+1}{n}+\ldots+\frac{2n}{n}+\ldots.\right.$$
$$\left.+\frac{3n}{n}+\ldots+\frac{xn}{n}\right).$$

Die in Klammern ſtehende Reihe iſt eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung; die Summenformel einer ſolchen Reihe iſt bekanntlich nichts weiter als die Summe des erſten und letzten Gliedes der Reihe multiplicirt mit der halben Anzahl der Glieder der Reihe. Da die Anzahl der Glieder der Reihe gleich xn iſt, ſo iſt die Summe der in den Klammern ſtehenden Reihe $= \left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{xn}{2}$. Nach Hinzuſetzung des Factors $\frac{a}{n}$ ſtellt der Ausdruck $\left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{xn}{2}.\frac{a}{n}$, oder $\left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{xa}{2}$ die Summe der Parallelogramme vor, aus denen näherungsweiſe der Flächeninhalt des Dreiecks zuſammengeſetzt gedacht wird. Dieſer Flächeninhalt des Dreiecks iſt nun gleich dem Grenzwerth, welchem ſich dieſe Summenformel bei endlos fortgeſetzter Verkleinerung der gleichen Zunahmen der Abſciſſe, alſo hier der Zahl $\frac{1}{n}$, nähert, oder $F = \text{Lim}\left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{ax}{2}$. Für ein ins Unend-

liche verkleinertes d. h. annullirtes $\frac{1}{n}$ geht diese Summenformel über in $x \cdot \frac{ax}{2}$, und folglich ist $F = x \cdot \frac{ax}{2}$. Nennt man die Abscisse x die Grundlinie, und die zugehörige senkrechte Ordinate ax die Höhe, so hat man den Flächeninhalt in Form des bekannten Satzes, daß er nämlich das halbe Product aus Grundlinie und Höhe ist. Aus der der Bildung unserer Reihe zu Grunde gelegten Differentialgleichung $\frac{dF}{dx} = ax$ hätten wir nach der oben gegebenen Regel der Integration einer Potenzfunction ebenfalls erhalten $F = \frac{ax^2}{2}$.

§. 59.

Entstehung und ursprüngliche Bedeutung des Integralzeichens.

Setzt man in der ersten Reihe des vorhergehenden Paragraphen, deren Glieder die Werthe der einzelnen Parallelogramme angeben, statt der Zahl $\frac{1}{n}$, da dieselbe eine Zunahme der Abscisse x vorstellt, den Ausdruck dx, und statt $\frac{n}{n}$ überall die Zahl 1, so erhält man folgende Reihe

$$a.dx.dx + a(2dx)dx + a(3dx)dx \ldots + a.dx + a(1+dx)dx \ldots + a.2dx \ldots + a.3dx \ldots + a.xdx$$

und in derselben einen Näherungswerth des Flächeninhalts des Dreiecks. Das allgemeine und letzte Glied der Reihe, das Glied $axdx$, enthält das ganze Bildungsgesetz der Reihe. Aus demselben ist die Reihe auch ursprünglich abgeleitet worden, und man hat die Glieder der Reihe erhalten, indem man statt des allgemeinen Zahlenwerthes x der Abscisse successive alle um ein dx verschiedene Zahlenwerthe von dx an bis zu x setzte, oder indem man dem x nach und nach die Zahlenwerthe

$$dx, 2dx, 3dx \ldots . 1, (1+dx), \ldots 2 \ldots . 3 \ldots . x$$

dem Zahlenwerth $\frac{1}{n}$ bis zu dem allgemeinen Zahlenwerth x, so stellen sich die Werthe der diesen Zunahmen zugehörigen Parallelogramme in folgender Reihe dar:

$$a.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}, a.\frac{2}{n}.\frac{1}{n}, a.\frac{3}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{n}{n}.\frac{1}{n},$$

$$a.\frac{(n+1)}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{2n}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{3n}{n}.\frac{1}{n}, \ldots a.\frac{xn}{n}.\frac{1}{n}.$$

Durch Absonderung des gemeinschaftlichen Factors $a.\frac{1}{n}$ und Addition der Glieder erhalten wir die Reihe

$$a.\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n}{n}+\frac{n+1}{n}+\ldots+\frac{2n}{n}+\ldots.\right.$$
$$\left.+\frac{3n}{n}+\ldots+\frac{xn}{n}\right).$$

Die in Klammern stehende Reihe ist eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung; die Summenformel einer solchen Reihe ist bekanntlich nichts weiter als die Summe des ersten und letzten Gliedes der Reihe multiplicirt mit der halben Anzahl der Glieder der Reihe. Da die Anzahl der Glieder der Reihe gleich xn ist, so ist die Summe der in den Klammern stehenden Reihe $= \left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{xn}{2}$. Nach Hinzusetzung des Factors $\frac{a}{n}$ stellt der Ausdruck $\left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{xn}{2}.\frac{a}{n}$, oder $\left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{xa}{2}$ die Summe der Parallelogramme vor, aus denen näherungsweise der Flächeninhalt des Dreiecks zusammengesetzt gedacht wird. Dieser Flächeninhalt des Dreiecks ist nun gleich dem Grenzwerth, welchem sich diese Summenformel bei endlos fortgesetzter Verkleinerung der gleichen Zunahmen der Abscisse, also hier der Zahl $\frac{1}{n}$, nähert, oder $F = \text{Lim}\left(\frac{1}{n}+x\right)\frac{ax}{2}$. Für ein ins Unend-

Grenzwerth der Summenformel oder durch die Annullirung des dx wieder zum Continuum zurück, dessen Werth man suchte, und welches in der Reihe selbst zersplittert und zertheilt erschien. In Beziehung auf diese in der Aufstellung der Reihe vorausgegangene Zertheilung der Größe, die in dem Uebergang zum Grenzwerth der Summenformel wieder ganz gemacht wird, nannte man die Operation das Integriren.

In der Differentialgleichung $dF = axdx$ mit isolirten Differentialen, hat man, wenn sie nicht in das Sinnlose und Undenkbare übergehen soll, unter dx irgend eine beliebige Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu denken, und unter dF oder axdx die dem dx zugehörige Zunahme der abhängig Veränderlichen, welche diese Letztere annehmen würde unter der Voraussetzung, daß die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens, welche an der Stelle, wo man die Zunahme dx gesetzt denkt, vorhanden ist, unverändert bliebe. In so fern aber das Differential axdx der abhängig Veränderlichen unter dem Integralzeichen steht, wie in der Gleichung $F = \int axdx$, so ist es als verschwindendes Glied einer unendlichen stetigen Reihe für sich betrachtet unendlichklein oder gleich Null, weil diese Gleichung nur für ein annullirtes dx richtig sein kann, und für ein nicht annullirtes dx vielmehr $F = \text{Lim} \int axdx$ heißen müßte. Die Annullirung des Differentials axdx gibt hier nichts Sinnloses, weil es nicht wie in der obigen Differentialgleichung ein isolirt zu denkendes Differential ist, sondern Bestandtheil, man könnte mit einem Doppelsinn sagen, integrirender Bestandtheil einer unendlichen Reihe mit verschmolzenen Uebergängen und verschwindender Größe ihrer Glieder. Das Fürsichbestehen und folglich auch Undenkbare einer verschwindenden Größe ist eben durch das Integralzeichen aufgehoben.

Was hier an dem Beispiel der Function ax, welche als Differentialquotient einer Flächenform und der Abscisse gegeben war, gezeigt worden ist, läßt sich ohne Weiteres

auf alle Functionen einer Veränderlichen übertragen. Durch einen jeden gegebenen Differentialquotient wird man in den Stand gesetzt, eine endliche Reihe aufzustellen, deren Summe den Werth der abhängig Veränderlichen um so genauer angibt, je kleiner man die successiven Zunahmen dx der willkürlich Veränderlichen x setzt. Man braucht nur, um die einzelnen Glieder der Reihe zu bilden, statt des im Differentialquotient enthaltenen allgemeinen Zahlenwerths x nach und nach Zahlen zu setzen, die um dx verschieden sind. Wäre man im Besitz der allgemeinen Summenformel einer solchen Reihe, so brauchte man nur zu dem Grenzwerth derselben für ein annullirtes dx überzugehen, um in demselben den Werth der abhängig Veränderlichen als Function der willkürlich Veränderlichen zu erhalten. Dies Verfahren der Integration setzt nicht voraus, daß man die Function, aus welcher der gegebene Differentialquotient durch Differentiation entstanden ist, schon kenne, und kann in so fern als eine ursprüngliche Methode der Integration betrachtet werden. Dieselbe wäre in jeder Weise vortrefflich, und würde das Integriren, welches sonst abgesehen von den Umformungen nur durch Erinnerung an bekannte Zusammenhänge ursprünglicher und abgeleiteter Functionen zu Stande gebracht wird, weder zu einer bloßen Gedächtnißsache, noch überhaupt von den Differentiationsregeln abhängig machen, wenn es so leicht wäre, die Summenformel einer gesetzmäßigen Reihe zu finden, und wenn man eine allgemeine Methode zur Auffindung derselben hätte. Aber daran fehlt es gerade am allermeisten bei dem jetzigen Stande der Mathematik. Man kann zwar die Summenformeln mancher Arten von Reihen aufstellen, und dadurch gewisse Functionen integriren, wie z. B. durch die Summenformeln der arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen die einfachen Potenzfunctionen mit ganzem positiven Exponenten; aber im Ganzen ist dies Mittel doch bis jetzt von sehr beschränkter Anwendbarkeit, und es wird uns daher noch lange hin nichts Anderes übrig bleiben, als darauf zu achten, aus

welchen Functionen andere durch Differentiation hervorgehen, und demgemäß das Integral einer Function zu bestimmen.

Ist daher allgemein y irgend eine Function von x, f(x) der Differentialquotient der Veränderlichen x und y, und hat man demgemäß die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ oder $dy = f(x)\,dx$, so denkt man, wenn man aus derselben die andere Gleichung $y = \int f(x).\,dx$ bildet, gewöhnlich unter $\int f(x).\,dx$ nichts weiter, als diejenige Function von x, deren Differentialquotient f(x) ist, und die daher der durch y vorgestellten Function von x gleich sein muß, oder sich von derselben höchstens durch den Mangel einer Constanten unterscheiden kann. Wenn man so bei dem Integralzeichen nur an eine gewisse bestimmte Veränderung der Function, und nicht an die Summe einer Reihe denkt, so könnte man freilich dasselbe, da es nun ein ganz bedeutungsloses Zeichen ist, ebenso gut auch vor den bloßen Differentialquotient setzen, und aus $\frac{dy}{dx} = fx$ die Gleichung $y = \int f(x)$ bilden; doch ist dies nicht üblich, und man setzt das Integralzeichen allemal nur vor den mit dx multiplicirten Differentialquotienten. Der Grund davon ist aus der ursprünglichen Bedeutung des Integralzeichens leicht ersichtlich, indem nicht der Differentialquotient selbst, sondern der mit dx multiplicirte Differentialquotient das allgemeine Glied einer die Zunahmen der abhängig Veränderlichen ausdrückenden Reihe sein kann.

Diese Ansicht vom Integriren, welche den Werth der abhängig Veränderlichen als die Summe einer Reihe erscheinen läßt, die durch den Uebergang zum Grenzwerth der Summenformel als Reihe wieder aufgehoben und zum Continuum zurückgeführt ist, gibt erst eine deutliche Anschauung davon, wie die im Wachsen erreichten zusammengehörigen Werthe der Veränderlichen ein Resultat der in dem ganzen Verlauf der Größen stattfindenden veränder-

lichen momentanen Stärke des Wachsens sind. Denn der Differentialquotient selbst oder die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens bestimmt, wie wir gesehen haben, die Natur der Reihe, deren einzelne Glieder die successiven Incremente der abhängig Veränderlichen, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbunden sind, darstellen, und deren Summe einen Näherungswerth der abhängig Veränderlichen gibt. Indem man zum Grenzwerth der Summenformel übergeht, und damit die Zunahmen dx der willkürlich Veränderlichen unendlichklein macht, werden auch die durch den Differentialquotienten vorgeschriebenen Incremente der abhängig Veränderlichen unendlichklein oder gleich Null, und sinken zu bloßen momentanen Bestrebungen des Wachsens herunter. Da aber diese unendlichvielen nicht zur Wirklichkeit kommenden Incremente, oder diese Bestrebungen zu wachsen zusammengenommen die im Wachsen erreichten Werthe der Veränderlichen völlig genau darstellen, so sieht man hierbei die Größen durch die in ihrem ganzen Verlauf sich kundgebende Stärke des Wachsens direct erzeugt. Die Größen erscheinen dabei nicht atomistisch aus Bestandtheilen zusammengesetzt, sondern gewissermaßen dynamisch durch Kräfte und Triebe gebildet.

§. 60.

Erläuterung gangbarer Vorstellungen vom Differential.

Faßt man die Bedeutung ins Auge, welche der mit dx multiplicirte Differentialquotient, oder das Differential der abhängig Veränderlichen unter dem Integralzeichen annimmt, in so fern man den ursprünglichen Sinn dieses Zeichens festhält, wo das Differential Glied einer zum Continuum zusammengeschmolzenen Reihe wird, so hat man in derselben das, was in den meisten Darstellungen der Differential- und Integralrechnung der Vorstellung vom Differential, als einer unendlichkleinen Größe, zu Grunde liegt, wenn es auch nicht so deutlich ausgesprochen wird. Das Differential ist dann ein zum bloßen Entstehungsmo-

ment aufgehobener Bestandtheil. Als solches ist es aber in der That schon ein sehr abgeleiteter Begriff, und setzt zu seinem Verständniß erstens eine Vorstellung von der momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens, dann von der hierauf gegründeten Incrementenreihe, und endlich von einer Aufhebung der Reihe zum zerfließenden Continuum voraus. Man sollte daher den so gefaßten Begriff des Differentials nicht an die Spitze der Differential- und Integralrechnung stellen, und dieselbe durch ihn begründen wollen. Das Differential in dieser Bedeutung genommen und doch außerhalb des Integralzeichens betrachtet und für sich isolirt gedacht, schwankt durchaus haltungslos zwischen Etwas und Nichts, und muß nothwendig alle die Halbheiten, Zweideutigkeiten und Unsicherheiten der Begriffsbestimmungen hervorbringen, welche der Differential- und Integralrechnung so oft und nicht mit Unrecht zum Vorwurf gemacht worden sind. Nach dieser wenigstens im Hintergrund liegenden Vorstellung vom Differential hat man sich manche übliche Ausdrucksweisen zu erklären und zu Rechte zu legen, z. B. wenn gesagt wird, das Differential einer durch senkrechte Parallelcoordinaten vorgeschriebenen Fläche ist ein unendlich schmales, oder ein der Linie, nämlich der jedesmaligen Ordinate, unendlich angenähertes Parallelogramm, d. h. ein Parallelogramm, dessen eine Seite die Ordinate und dessen andere die unendlichkleine Zunahme dx der Abscisse ist, womit man dann wieder in die Schwankung kommt, ob es ein Etwas von Fläche oder ein Nichts von Fläche, eine bloße Linie ist. Die Sache, um die es sich bei diesen Erklärungen handelt, nämlich die directe Aufstellung der Differentialgleichung zwischen Fläche und Abscisse, beruht, wie wir aus dem Früheren wissen, ganz einfach darauf, daß die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens einer durch parallele Fortbewegung einer Linie erzeugten Fläche und der Abscisse, als des Weges der Fortbewegung, gegeben ist durch ein Parallelogramm, dessen unveränderliche Seite die jedesmalige Ordinate ist. Drücke ich

durch eine Reihe schmaler Parallelogramme, deren Eine Seite eine kleine Zunahme dx der Abscisse x ist, näherungsweise die Fläche aus, so nähern sich diese Parallelogramme durch Verkleinerung des dx freilich ohne Ende dem Bild einer Linie. Gehe ich aber durch Annullirung des dx zum Grenzwerth der supponirten Summenformel über, so hört jedes Parallelogramm auf, eine Fläche und ein Bestandtheil der Fläche zu sein, und wird als Moment der zum Continuum aufgelösten Reihe ein bloßer Entstehungsact der Fläche, und ist, da die Fläche durch Fortbewegung einer Linie erzeugt gedacht wird, von einem momentanen Zustand dieses erzeugenden Elementes, von der Linie nicht zu unterscheiden. Das Unklare, Schwankende und Unbestimmte hierbei wird überall dadurch hereingebracht, daß man zu fixiren sucht, was flüssig ist, und daß man insbesondere Begriffe als feste und fertige aufstellen will, welche ihrer wahren Bedeutung nach nur Folge einer Umbildung von Begriffen, eines Setzens und Wiederaufhebens von Bestimmungen sein können, und die nur Sinn haben, indem sie auch als Resultate zugleich den Proceß ihrer Bildung in sich enthalten, wie denn das Differential in der eben erwähnten Bedeutung nur als Glied einer zum Continuum aufgehobenen discreten Reihe einen deutlichen Sinn haben kann.

Die Verfahrungsweise, welche man zur directen Bestimmung des Differentials einer ihrer Function nach noch unbekannten abhängig Veränderlichen so oft angewendet findet, hat eigentlich in dieser letzt erwähnten Bedeutung des Differentials ihre Grundlage, und findet in derselben ihre Erklärung. Da nämlich eine durch veränderliche Stärke des Wachsens gebildete Größe betrachtet werden kann als die Summe einer stetigen Reihe, so kann auch umgekehrt, wenn man aus der besondern Beschaffenheit dieser Größe sich unmittelbar eine Vorstellung von der Art und Zusammensetzung dieser Reihe und einen Ausdruck für ein allgemeines Glied derselben bilden kann, dieser ohne Weiteres als das Differential der abhängig Veränderlichen

betrachtet werden. Es läßt sich nicht leugnen, daß diese Weise einer directen Differentialbestimmung, so fern nur dabei die Vorstellung einer Reihe festgehalten wird, in der Regel etwas sehr Anschauliches und Einfaches hat. Wir wollen aber, da wir schon mehrfache Beispiele directer Bestimmung des Differentialquottenten gegeben haben, uns jetzt nicht damit aufhalten, diese Weise durch Beispiele zu erläutern. Darin nun, daß man diese aus der Praxis der Anwendung mitgebrachte Vorstellung des Differentials als eine geläufige vor Augen hat, ist der Grund zu suchen, daß man eine derselben angepaßte Erklärung des Differentials gewöhnlich an die Spitze der Differential- und Integralrechnung, und somit an eine Stelle setzt, wo sie freilich ziemlich haltungslos und unfaßlich erscheinen muß.

§. 61.

Schlußbetrachtung über das Differentiiren und Integriren im Allgemeinen.

In dem Vorhergehenden haben wir nun die allgemeinen Eigenthümlichkeiten der Differential- und Integralrechnung angegeben und erläutert. Diese Angabe so weit wie hier geschehen durchzuführen scheint erforderlich, sowohl um die einzelnen Regeln zur Ausführung der Operationen des Differentiirens und Integrirens völlig zu verstehen, als auch insbesondere, um dieselben mit dem gehörigen Interesse aufzufassen, da man nun Zweck und Bedeutung derselben kennt. Die wesentlichste Eigenthümlichkeit dieser Wissenschaft besteht darin, daß die Größen nicht als fertige und daseiende, sondern als wachsende und werdende betrachtet werden, daß man das Gewordene aus den Gesetzen des Werdens, das Daseiende aus den Momenten seiner Bildung begreift. Die Größen erscheinen dabei nicht sowohl aus Elementen als aus Entstehungsmomenten zusammengesetzt, und nicht sowohl aus Theilen als gewissermaßen aus Bestrebungen gebildet. Dies ist auch der einzig richtige Weg zur Erfassung der Größen, bei denen man auf eine stetige Veränderung geführt wird. Denn in diesem

Falle führt jede Zerlegung in endliche Elementartheile und die Zusammensetzung aus solchen Theilen nicht zum Ziele. Die sonst ewig entfliehenden Gesetze der Stetigkeit liegen in der Differential- und Integralrechnung klar und faßbar vor Augen. Durch dieselbe erhält man einen Blick in den innersten Bau und in die wahre Elementarstructur der Größen, da man nicht bis zu kleinen Elementartheilen vordringt, sondern bis zu absolut letzten, zu unendlichkleinen Theilen. Die Differential- und Integralrechnung ist das wahre Mikroskop, das Mikroskop des Geistes, dessen Auge von unendlicher Schärfe ist, und welches sich nicht an der Oberfläche von Theilen stößt, die, wie klein auch immer, doch noch eine Unendlichkeit von Gestaltenbildung in sich schließen.

Der Weg, auf dem dies erreicht wird, ist für beide Theile unserer Wissenschaft für die Differentialrechnung wie für die Integralrechnung derselbe. Die Voraussetzung endlicher Zunahmen und Theile, welche der wahren Natur des Problems unangemessen ist, dient nur zur Aufstellung einer arithmetisch zusammengesetzten Form, wird aber in dem Uebergang zu dem für annullirte Theile oder Zunahmen geltenden Grenzwerth dieser Form wieder aufgehoben. In der Differentialrechnung enthält der Differenzquotient die dem zu suchenden Resultat widerstrebende Voraussetzung, die in dem Grenzwerth desselben aufgehoben wird, und in der Integralrechnung die Summenformel einer wirklichen Incrementenreihe, die in dem Grenzwerth dieser Summenformel ebenfalls verschwindet. Daß das Integral meistens auf anderem und leichter zugänglichem Wege gefunden wird durch den Hinblick auf analytische Differentialgleichungen, thut hier nichts zur Sache, da jedes Integral als der Grenzwerth der Summenformel einer aus dem Differentialquotient ableitbaren Incrementenreihe betrachtet werden kann. Die Begriffe des Differentials und Integrals erscheinen als Begriffe, die den Proceß ihrer Bildung in sich schließen, oder die ihre Voraussetzungen als aufgehobene noch in sich enthalten. Dieser Natur der Begriffe ist auch

die Leibnitzische Bezeichnung derselben außerordentlich sinnvoll und schön angepaßt, indem der Differentialquotient als ein Quotient von Zunahmen erscheint, die doch keine Zunahmen sind, und das Integral als Summe einer Reihe, die keine Reihe mehr ist nach dem Uebergang zum Stetigen. Daß diese Zeichen so oft zu leeren und bedeutungslosen Formen ausgehöhlt worden sind, hat der Erfinder derselben nicht zu verantworten.

Diese wesentlichste Eigenthümlichkeit der Methode der Differential- und Integralrechnung, nämlich die auf die Voraussetzung endlicher Zunahmen basirten arithmetischen Formeln durch Ueberführung zu ihrem Grenzwerth zu Ausdrücken der Gesetze des Stetigen zu machen, ließe sich auch so bezeichnen, daß man sagt, die Differential- und Integralrechnung besteht in der Aufeinanderbeziehung und innern Vereinigung der beiden absolut entgegengesetzten Arten der Größen, der discreten und der continuirlichen, der gedachten und der anschaulichen. Denn arithmetisch zusammengesetzte und aus discreten Theilen aufgebaute Formeln werden durch Aufhebung des Zahlenwerthes dieser Theile zu Ausdrücken der Gesetze continuirlicher Größen. Man kann die Differential- und Integralrechnung in methodischer Hinsicht kurzweg die Lehre von der arithmetischen oder analytischen Behandlung des Continuums nennen. Die Welt des Anschaulichen in den Größen ist in die Welt des Vorstellbaren, das Sein in das Denken aufgenommen. Wir wollen uns nicht in philosophische Excurse verlieren, obgleich man an dieser Stelle schwer der Versuchung widersteht, von der Methode der Differential- und Integralrechnung aus einen Blick auf die allgemeine Wissenschaftslehre zu werfen. Durch die Differential- und Integralrechnung steigt man zählend in die unendliche Tiefe des Continuums hinab bis zum absolut ausdehnungslosen Verflußpunkt, und erhebt sich aus derselben durch einen Act, der in seinem Resultat dem Zusammenzählen einer Unendlichkeit von Verflußpunkten gleichkommt, wieder zur Herstellung des Continuums. Die

Größen werden, damit sie sich zu einem Gesetz ihrer Abhängigkeit verbinden, nicht in endliche Theile und nicht mechanisch getheilt, sondern völlig aufgelöst und in dem Feuer der Dialektik geschmolzen. Bei jeder mechanischen und endlichen Theilung sperren sie sich gegen ihre Verbindung und ihren gesetzmäßigen Zusammenhang, wie corpora non agunt nisi fluida; wenn sie sich aber im Unendlichkleinen berühren und völlig zusammenfließen, so erwachen ihre Verwandtschaftskräfte, und sie schießen zum durchsichtigen Krystall eines algebraischen Gesetzes zusammen.

Wenn gesagt worden ist, daß in dem Vorhergehenden das allgemeine Wesen der Differential- und Integralrechnung angegeben sei, so ist dies nur in so fern richtig, als man dabei blos die einfache Bestimmung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen, oder den sogenannten ersten Differentialquotienten, und das aus demselben abzuleitende Gesetz der Abhängigkeit der Veränderlichen im Auge hat. Da aber die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier ungleichmäßig Wachsenden selbst veränderlich und eine Function der willkürlich Veränderlichen ist, so kann gefragt werden, welche verhältnißmäßige Stärke des Wachsens überall stattfindet zwischen der willkürlich Veränderlichen und der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der ursprünglich gegebenen ungleichmäßig Wachsenden, oder welches der Differentialquotient der willkürlich Veränderlichen und des Differentialquotienten ist, insbesondere aber welche Eigenschaft der ursprünglich gegebenen ungleichmäßig Wachsenden durch den Differentialquotienten der willkürlich Veränderlichen und des Differentialquotienten ausgesprochen ist. Diese weitere Vertiefung in den Begriff des Wachsens läuft nicht, wie es scheinen möchte, auf eine blos wiederholte Anwendung der bisher gewonnenen Begriffe hinaus, sondern verlangt eine neue allgemeine Grundlage, welche dem zweiten Theile unserer Schrift aufbehalten ist. Zunächst aber wollen wir, auf dem bisherigen Standpunkt bleibend, die Regeln des Dif-

schien, ist selbst das Pflaster. Nehmen wir noch dazu, daß jede Function derjenigen Folge von Operationen, welche durch irgend eine bestimmte Function einer Veränderlichen für diese Veränderliche vorgeschrieben sind, unterworfen werden kann, und dann als Function einer Function erscheint, und daß hierin wieder eine beliebige Wiederholung möglich ist, so haben wir alle die Formen, auf welche jede denkbare Zusammensetzung von Functionen zurückgebracht werden kann. Die nach allen Richtungen gehende Unendlichkeit wird durch einfache in der Natur der arithmetischen Operationen liegende Regeln umspannt.

Das wichtigste Geschäft bei der Aufstellung der Regeln des Differentiirens besteht daher darin, anzugeben, wie man die Arbeit des Differentiirens zusammengesetzter Functionen theilen, und auf die Differentiation derjenigen Functionen zurückführen könne, welche als Bestandtheile in der zusammengesetzten Function enthalten sind, wobei die Regel der Differentiation dieser Theilfunctionen als bekannt vorausgesetzt wird. Wir wollen in diesem Capitel zunächst nachweisen, wie man zu verfahren hat, um solche Functionen zu differentiiren, in welchen entweder andere Functionen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sind, oder welche als Functionen einer Function erscheinen, schließen aber den Fall noch aus, in welchem eine Function so zusammengesetzt ist, daß in ihr andere Functionen durch die Operation des Potenzirens verbunden sind, oder in welchem zwei verschiedene Functionen als Grundzahl und Exponent verknüpft sind.

Da bei Aufstellung dieser Regeln die Functionen selbst, welche durch bestimmte arithmetische Operationen verbunden sind, ganz unbestimmt bleiben, so muß man, wenn die Regeln in der Zeichensprache entwickelt und ausgedrückt werden sollen, ein allgemeines Schema des Differenzquotienten einer Function haben. Sei $f(x)$ eine beliebige Function von x, und denke man sich die Zahl x um die Zahl k oder Δx wachsend. Stellt man den Werth, in welchen

die Function f(x) durch dieſes Wachſen des x übergeht, durch f(x+k) oder f(x+Δx) vor, ſo ſind die Ausdrücke f(x+k) — f(x) oder f(x+Δx) — f(x) Zeichen für die mit der Zunahme k oder Δx der willkürlich Veränderlichen verbundene Zunahme der Function f(x). Werden dieſe Zunahmen der Function durch die Zunahme des x dividirt, ſo ſind die Ausdrücke

$$\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \text{ und } \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

allgemeine Zeichen des Differenzquotienten der Function f(x). Setzen wir einen ſolchen Ausdruck der einfachen Form des Differenzquotienten der Function f(x), nämlich der Form $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ oder $\frac{\Delta f(x)}{k}$ gleich, und bilden die Gleichung $\frac{f(x+k)-f(x)}{k} = \frac{\Delta f(x)}{k}$, ſo erhalten wir daraus die Gleichung $f(x+k) = \frac{\Delta f(x)}{k} . k + f(x)$. Für die Form f(x+k) oder die Function einer zweitheiligen Größe x+k können wir demnach auch überall die Form $\frac{\Delta f(x)}{k} . k + f(x)$ ſubſtituiren.

Die Fundamentalfunctionen, deren Differentiationsregel wir ſchon kennen, ſind nur diejenigen, in welchen die Veränderliche x entweder mit einem conſtanten Beſtandtheil, wie in x+a, oder mit einem conſtanten Factor, wie in ax, oder mit einem conſtanten Exponenten, wie in x^a, verbunden iſt. Da man x ſelbſt, in der Form x^1 zu den Potenzfunctionen von x rechnen kann, ſo haben wir eigentlich nur die Differentiationsregel der Potenzfunction. Wir werden daher in dem Nächſtfolgenden, um die Differentiationsregeln zuſammengeſetzter Functionen durch Beiſpiele zu erläutern, uns nur der Potenzfunction bedienen können.

§. 63.

Eine Function als Summe zweier Functionen.

Wir fragen zuerst, wie findet man den Differentialquotienten einer Function von x, welche sich als die Summe zweier Functionen von x darstellt, vorausgesetzt, daß man die Regel des Differentiirens dieser letzteren Functionen einzeln schon wisse, oder wie kann der Differentialquotient einer Summe von zwei Functionen durch die Differentialquotienten der Theilfunctionen dargestellt werden. Die beiden Theilfunctionen mögen $f(x)$ und $\varphi(x)$ heißen, und die gegebene Function ist demnach $f(x)+\varphi(x)$. Denken wir die Zahl x um die Zahl k wachsend, so geht die Function $f(x)+\varphi(x)$ über in den Werth $f(x+k)+\varphi(x+k)$. Ziehen wir hiervon die ursprüngliche Function $f(x)+\varphi(x)$ ab, so haben wir in dem Ausdruck $f(x+k)+\varphi(x+k)-[f(x)+\varphi(x)]$ die mit der Zunahme k der willkürlich Veränderlichen verbundene Zunahme der Function. Folglich ist der Ausdruck $\frac{f(x+k)+\varphi(x+k)-[f(x)+\varphi(x)]}{k}$ der Differenzquotient der Function $f(x)+\varphi(x)$. Da derselbe auch in der Form $\frac{f(x+k)-f(x)+\varphi(x+k)-\varphi(x)}{k}$ oder in der Form $\frac{f(x+k)-f(x)}{k}+\frac{\varphi(x+k)-\varphi(x)}{k}$ geschrieben werden kann, so sehen wir, daß $\frac{f(x+k)-f(x)}{k}$ der Differenzquotient von $f(x)$ und $\frac{\varphi(x+k)-\varphi(x)}{k}$ der von $\varphi(x)$ ist, daß der Differenzquotient einer Function von x, welche als die Summe zweier Functionen von x erscheint, gleich ist der Summe der Differenzquotienten dieser einzelnen Functionen. Diejenige Function von x, in welche mit der Annullirung der Zunahme k der Differenzquotient der Function $f(x)+\varphi(x)$ übergeht, ist der Differentialquotient der Function $f(x)+\varphi(x)$. Da aber

zugleich mit Annullirung von k der Theil $\frac{f(x+k)-f(x)}{k}$ in den Differentialquotienten der Function $f(x)$, und der andere Theil $\frac{\varphi(x+k)-\varphi(x)}{k}$ in den Differentialquotienten der Function $\varphi(x)$ übergeht, so sieht man, daß der Differentialquotient einer Function, welche als Summe zweier andern Functionen erscheint, nichts weiter ist, als die Summe der Differentialquotienten der einzelnen addirten Functionen. Wir können diese Regel aussprechen durch die analytische Differentialgleichung

$$\frac{d[f(x)+\varphi(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Der Differentialquotient der Function ax^3+4x^2 z. B. ist demnach $3ax^2+8x$, und wir haben die analytische Differentialgleichung $\frac{d(ax^3+4x^2)}{dx} = 3ax^2+8x$. Wäre die Function noch einem einfachen Zeichen gleich gesetzt, so folgte aus der unbestimmten Gleichung $y=ax^3+4x^2$ die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 3ax^2+8x$. Betrachtet man die Differentiale dy und dx in dem oben (§. 37) erläuterten Sinne als wirkliche Zahlen, so kann die letzte Differentialgleichung auch geschrieben werden $dy = 3ax^2.dx + 8x\,dx$. Diese letztere Form gibt man meistens der aus einer unbestimmten Gleichung abgeleiteten Differentialgleichung.

Daß auch der Differentialquotient einer Function, welche die Summe von mehr als zwei Functionen ist, nichts Anderes enthält als die Summe der Differentialquotienten der einzelnen Functionen, ist leicht zu erweisen, indem man entweder die Function durch Zusammennehmen mehrerer Glieder successive als aus zweien Functionen bestehend ansieht, oder die vorher gegebene Beweisart auf eine Verbindung von mehreren Functionen ausdehnt. Aus der Gleichung $y=ax^3+bx^2+cx+x^3$

würde also folgen $\frac{dy}{dx} = 5ax^4 + 2bx + c + 3x^2$, oder $dy = 5ax^4dx + 2bxdx + cdx + 3x^2dx$. Da ein constanter Bestandtheil einer Function keinen Einfluß auf den Differentialquotienten derselben hat, und in demselben wegfällt, so sagt man auch, in Bezug auf diese Zusammensetzung der Differentialquotienten der Theilfunctionen, der Differentialquotient einer Constanten ist $= 0$. Aus der Gleichung $y = a + bx^3 + cx$ folgt $\frac{dy}{dx} = 2bx + c$.

§. 64.

Eine Function als Unterschied zweier Functionen.

Es sei eine Function $\varphi(x)$ von einer andern Function $f(x)$ abgezogen, und es soll der Differentialquotient der Function $f(x) - \varphi(x)$, welche sich als der Unterschied zweier Functionen darstellt, durch die Differentialquotienten der Theilfunctionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ ausgedrückt werden. Lassen wir die Zahl x um k wachsen, so stellt sich der Differenzquotient der Function $f(x) - \varphi(x)$ dar in der Form

$$\frac{f(x+k) - \varphi(x+k) - [f(x) - \varphi(x)]}{k}.$$

Diese Form ist

$$= \frac{f(x+k) - \varphi(x+k) - f(x) + \varphi(x)}{k}$$

$$= \frac{f(x+k) - f(x) - [\varphi(x+k) - \varphi(x)]}{k}$$

$$= \frac{f(x+k) - (fx)}{k} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k}.$$

Die Function, in welche dieser Differenzquotient der Function $f(x) - \varphi(x)$ übergeht mit Annullirung des k, ist der Differentialquotient der Function $f(x) - \varphi(x)$. Zugleich aber gehen die einzelnen Theile des Differenzquotienten, nämlich $\frac{f(x+k) - f(x)}{k}$ und $\frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k}$, in die Differentialquotienten der einzelnen Functionen $f(x)$ und

$\varphi(x)$ über. Es folgt daraus folgende Regel: Man erhält den Differentialquotienten einer durch Abziehung zweier Functionen gebildeten Function, indem man die entsprechenden Differentialquotienten der einzelnen Functionen von einander abzieht.

$$\frac{d[f(x) - \varphi(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Besteht eine Function aus mehr als zwei Functionen, die mit beliebigen Vorzeichen verbunden sind, wie die Function $f(x) - \varphi(x) - F(x) + \psi(x)$, so kann man, indem man alle mit dem Minuszeichen behaftete Functionen zusammennimmt, wie wenn man hier die Form $f(x) + \psi(x) - [\varphi(x) + F(x)]$ setzt, die ganze Function als den Unterschied zweier Functionen betrachten. Man hätte also, um den Differentialquotienten der ganzen Function zu erhalten, den Differentialquotienten der Function $\varphi(x) + F(x)$ von dem der Function $f(x) + \psi(x)$ abzuziehen. Und da der Differentialquotient der Function $\varphi(x) + F(x)$ nichts weiter ist als die Summe der Differentialquotienten der Functionen $\varphi(x)$ und $F(x)$, so müßte man die Differentialquotienten der Functionen $\varphi(x)$ und $F(x)$ einzeln abziehen, oder überhaupt die Differentialquotienten derjenigen Functionen, die als abzuziehende in der Gesammtfunction enthalten sind, ebenfalls abziehen. Besteht also eine Function aus beliebig vielen mit verschiedenen Vorzeichen behafteten Functionen, so erhält man den Differentialquotienten der ganzen Function, indem man die Differentialquotienten der einzelnen Theilfunctionen mit denjenigen Vorzeichen, welche diese Theilfunctionen selbst haben, zusammenstellt. Aus der Gleichung

$$y = -ax + bx^3 - cx^2 - x^{\frac{1}{2}} \text{ folgt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -a + 3bx^2 - 2cx - \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Oder $y = 3x^2 + 2x^{-3} - x^{-2} - x$

gibt $\frac{dy}{dx} = +6x + (-6x^{-4}) - (-2x^{-3}) - 1$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 6x^{-4} + 2x^{-3} - 1$$

§. 65.

Eine Function als Product zweier Functionen.

Eine Function von x sei das Product zweier Functionen von x, und ausgedrückt durch $f(x) . \varphi(x)$. Es soll der Differentialquotient dieser Function durch die Differentialquotienten der einzelnen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ dargestellt werden. Wächst x um k, so stellt sich der Differenzquotient der Function $f(x) . \varphi(x)$ dar unter der Form

$$\frac{f(x+k) . \varphi(x+k) - [f(x) . \varphi(x)]}{k}.$$

Um denselben so umzuformen, daß die Differenzquotienten der einzelnen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ sich darin scheiden, braucht man nur nach §. 62 statt $f(x+k)$ und $\varphi(x+k)$ die Formen $\frac{\Delta f(x)}{k} . k + f(x)$ und $\frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k + \varphi(x)$ zu substituiren. Der Differenzquotient von $f(x) . \varphi(x)$ wird demnach

$$= \frac{\left(f(x) + \frac{\Delta f(x)}{k} . k\right)\left(\varphi(x) + \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k\right) - f(x) . \varphi(x)}{k}$$

$$= \frac{f(x).\varphi(x) + \varphi(x) . \frac{\Delta f(x)}{k} . k + f(x) . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k + \frac{\Delta f(x)}{k} . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k^2 - fx . \varphi x}{k}$$

$$= \varphi(x) . \frac{\Delta f(x)}{k} + f(x) . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} + \frac{\Delta f(x)}{k} . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k.$$

Wird die Zunahme k wieder annullirt, so gehen die Formen $\frac{\Delta f(x)}{k}$ und $\frac{\Delta \varphi(x)}{k}$ über in die Formen $\frac{df(x)}{dx}$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, und damit zugleich der Differenzquotient der Function $f(x) . \varphi(x)$ in den Differentialquotienten derselben. Die beiden ersten Glieder des Differenzquotienten verwandeln

sich in $\varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$ und in $f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$, und das letzte Glied, welches sich in $\frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot k$ verwandelt, fällt, als den Factor k oder Null enthaltend, weg. Demnach ist

$$\frac{d[f(x) \cdot \varphi(x)]}{dx} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Oder man erhält den Differentialquotient einer Function, welche als Product zweier Functionen erscheint, wenn man jede einzelne der letzteren Functionen mit dem Differentialquotienten der andern multiplicirt, und die so erhaltenen Producte addirt.

Läßt man die Function $ax^3 \cdot bx^4$ in dieser Form, als Product zweier Potenzfunctionen stehen, ohne sie in die einfache Potenzfunction abx^7 zusammenzuziehen, so erhält man nach der eben aufgestellten Regel

$$\frac{d(ax^3 \cdot bx^4)}{dx} = ax^3 \cdot 4bx^3 + bx^4 \cdot 3ax^2$$
$$= 4abx^6 + 3abx^6$$
$$= 7abx^6.$$

Hätte man die Function $ax^3 \cdot bx^4$ erst in die einfache Potenzfunction abx^7 umgeformt, und dann den Differentialquotienten derselben gebildet, so hätte man sogleich $7abx^6$ erhalten.

Ist eine Function ein Product von mehr als zwei Functionen, so kann der Differentialquotient derselben durch wiederholte Anwendung dieser Regel gefunden werden. Man betrachtet zuerst die Function nur als ein Product von zwei Functionen, indem man das Product von mehreren Functionen zusammengenommen als Eine Function ansieht. In dem dadurch erhaltenen Differentialquotienten erscheinen dann unentwickelte Differentialquotienten von solchen Functionen, die selbst noch ein Product von mehreren Functionen sind. Auf diese wendet man ebenfalls das Verfahren der Zerlegung in zwei Factoren an, und fährt damit fort, bis man die Differentialquotienten der einfachen

Factoren erhält. Man kann auf dieſe Weiſe ohne Schwierigkeit folgende Regel ableiten: Der Differentialquotient einer Function, die ſich als ein Product von beliebig vielen Functionen darſtellt, wird gefunden, indem man den Differentialquotienten jeder einzelnen Function mit dem Product aller übrigen Functionen multiplicirt, und die ſo erhaltenen Producte ſämmtlich addirt.

Iſt eine Function $f(x)$ mit einem conſtanten Factor a verbunden, wie in der Function $af(x)$, und betrachtet man den Factor a in der Form von ax^0 als eine Potenzfunction von x, ſo wird man, indem man die obige Regel der Differentiation des Productes zweier Functionen auf die Function $ax^0 . f(x)$ anwendet, finden, daß der Differentialquotient von $af(x)$ nichts Anderes iſt als der Differentialquotient von $f(x)$ multiplicirt mit der conſtanten Zahl a. Man kann dies auch ohne Benutzung der Differentiationsregel eines Productes auf urſprüngliche Weiſe durch den Differenzquotienten der Function $af(x)$ beweiſen. Der Differenzquotient von $af(x)$ iſt

$$= \frac{af(x+k) - af(x)}{k} = a . \frac{f(x+k) - f(x)}{k}.$$

Die Form, in welche dieſer Ausdruck für ein annullirtes k übergeht, nämlich die Form $a . \frac{df(x)}{dx}$, iſt der Differentialquotient der Function $af(x)$. Allgemein alſo iſt

$$\frac{d\,af(x)}{dx} = a . \frac{df(x)}{dx}.$$

§. 66.

Eine Function als Quotient zweier Functionen.

Eine Function von x ſei der Quotient zweier Functionen von x, und es ſoll der Differentialquotient des Quotienten durch die Differentialquotienten des Zählers und Nenners ausgedrückt werden. Stelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ die gegebene Function vor. Wächſt x um die Zahl k, ſo iſt der

Differenzquotient dieſer Function $\frac{\frac{f(x+k)}{\varphi(x+k)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{k}$. Subſtituiren wir (nach §. 62) ſtatt $f(x+k)$ und $\varphi(x+k)$ die Formen $\frac{\Delta f(x)}{k} . k + f(x)$ und $\frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k + \varphi(x)$, ſo iſt der Differenzquotient von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$

$$= \frac{\frac{\left(\frac{\Delta f(x)}{k} . k + f(x)\right)}{\left(\frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k + \varphi(x)\right)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{k}$$

und nach Gleichnamigmachung der Brüche

$$= \frac{\frac{\varphi(x) . \frac{\Delta f(x)}{k} . k + \varphi(x) . f(x) - f(x) . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k - f(x) . \varphi(x)}{\varphi(x) . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k + [\varphi(x)]^2}}{k}$$

$$= \frac{\varphi(x) . \frac{\Delta f(x)}{k} - f(x) . \frac{\Delta \varphi(x)}{k}}{\varphi(x) . \frac{\Delta \varphi(x)}{k} . k + [\varphi(x)]^2} .$$

Für ein annullirtes k hat man ſtatt der Formen $\frac{\Delta f(x)}{k}$ und $\frac{\Delta \varphi(x)}{k}$ zu ſetzen die Formen $\frac{d f(x)}{dx}$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, und erhält den Differentialquotienten der Function $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ oder

$$\frac{d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]}{dx} = \frac{\varphi(x) . \frac{d f(x)}{dx} - f(x) . \frac{d \varphi(x)}{dx}}{\varphi(x) . \frac{d \varphi(x)}{dx} . 0 + [\varphi(x)]^2}$$

$$= \frac{\varphi(x) . \frac{d f(x)}{dx} - f(x) . \frac{d \varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2} .$$

Man erhält also den Differentialquotienten einer Function, welche als der Quotient zweier Functionen gegeben ist, wenn man den Nenner mit dem Differentialquotienten des Zählers multiplicirt, davon abzieht den Zähler multiplicirt mit dem Differentialquotienten des Nenners, und den Rest durch die zweite Potenz des Nenners dividirt.

Lassen wir die Function $\frac{ax^5}{x^2}$ in Form eines Quotienten stehen, ohne sie in die Form ax^3 umzuwandeln, und wenden unsere Differentiationsregel darauf an, so erhalten wir

$$\frac{d\left(\frac{ax^5}{x^2}\right)}{dx} = \frac{x^2.5ax^4 - ax^5.2x}{x^4}$$
$$= \frac{5ax^6 - 2ax^6}{x^4}$$
$$= \frac{3ax^6}{x^4} = 3ax^2,$$

also denselben Differentialquotienten, den die zusammengezogene Form ax^3 unmittelbar gegeben hätte.

Es sei die Function $\frac{ax + 3x^2}{1 - x^3}$ zu differentiiren. Die Differentialquotienten der einzelnen Functionen nämlich des Zählers $ax + 3x^2$ und des Nenners $1 - x^3$ kennt man aus §. 63 und 64, und zwar ist der Differentialquotient der ersteren Function gleich $a + 6x$ und der der zweiten gleich $-2x$. Folglich ist gemäß der eben gegebenen Regel

$$\frac{d\left(\frac{ax + 3x^2}{1 - x^3}\right)}{dx} = \frac{(1-x^3)(a+6x) - (ax+3x^2)(-2x)}{(1-x^3)^2}$$

Ist in einer Bruchfunction nur der Nenner eine Function von x, und der Zähler eine constante Zahl a, so betrachte man die Zahl a in der Form von ax^0 als eine Potenzfunction von x, und wende dieselbe Differentiationsregel auf diese Bruchfunction an. So ist z. B. der Differentialquotient der Function

$\frac{a}{x^m}$ gleich $\frac{x^m \cdot 0 - amx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{amx^{m-1}}{x^{2m}} = -amx^{-m-1}$, welches Resultat wir, da hier der Nenner eine bloße Potenzfunction von x ist, auch schon dadurch hätten erhalten können, daß wir die Function $\frac{a}{x^m}$ in der Form ax^{-m} geschrieben hätten.

§. 67.

Eine Function als Function einer Function.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, in welchem eine Function von x als Function einer Function von x erscheint. Wir wollen diesen Fall erst an dem Beispiel einer Potenzfunction erläutern. Die Function $(ax+bx^2)^5$ kann als eine Potenzfunction der Function $ax+bx^2$ betrachtet werden. Es ist gestattet, die Function $ax+bx^2$, da sie mit x zugleich veränderlich ist, zunächst überhaupt als eine Veränderliche anzusehen, und sie durch ein einfaches Zeichen einer Veränderlichen, z. B. durch den Buchstaben z auszudrücken, und man hat alsdann blos die Potenzfunction z^5. Für diese gilt die Differentialgleichung $\frac{dz^5}{dz} = 5z^4$. Setzt man nun statt z wieder seinen Werth, so erhält man $\frac{d(ax+bx^2)^5}{d(ax+bx^2)} = 5(ax+bx^2)^4$. Nun sind aber die beiden Veränderlichen, deren Differentialquotient man haben will, nicht die Größen $(ax+bx^2)^5$ und $ax+bx^2$, sondern die Größen $(ax+bx^2)^5$ und x, und man will demnach auch nicht den Werth des Differentialquotienten $\frac{d(ax+bx^2)^5}{d(ax+bx^2)}$, sondern den des Differentialquotienten $\frac{d(ax+bx^2)^5}{dx}$ haben. Da aber $d(ax+bx^2)$ nichts Anderes ist als der Differentialquotient der Function $ax+bx^2$ multiplicirt mit dx, oder als der Ausdruck $(a+2bx)dx$, so erhält man, indem man $(a+2bx).dx$ statt $d(ax+bx^2)$

in der obigen Differentialgleichung substituirt, die Gleichung $\frac{d(ax+bx^2)^5}{(a+2bx).dx} = 5(ax+bx^2)^4$, und folglich für die beiden Veränderlichen $(ax+bx^2)^5$ und x die Differentialgleichung $\frac{d(ax+bx^2)^5}{dx} = 5(ax+bx^2)^4.(a+2bx)$.

Das Wesentliche dieses Verfahrens, welches sich in derselben Weise auf alle Functionen anwenden läßt, besteht wie man sieht darin, daß die Function von x, welche den durch eine andere Function vorgeschriebenen Operationen unterworfen ist, vorerst als eine willkürlich Veränderliche, die man durch ein einfaches Zeichen einer Veränderlichen vorstellt, betrachtet wird, und der Differentialquotient in Bezug auf diese angenommene Veränderliche gebildet wird. Wenn man nun in dem so erhaltenen Differentialquotienten die als willkürlich Veränderliche betrachtete Function statt des für dieselbe angenommenen einfachen Zeichens wieder einführt, und dann statt des Differentials dieser Function den Differentialquotienten derselben, mit dx multiplicirt, setzt, so erhält man nach Wegschaffung des mit dx verbundenen Factors den Differentialquotienten der Function einer Function von x. Es ist einleuchtend, daß dies Verfahren allgemeingültig sein muß, und man kann die daraus resultirende Regel sehr einfach durch die Zeichensprache entwickeln. Sei $f[\varphi(x)]$ eine Function einer Function von x. Der Differentialquotient derselben wird ausgedrückt durch $\frac{df[\varphi(x)]}{dx}$. Wird Zähler und Nenner desselben mit $d\varphi(x)$ multiplicirt, so erhält man $\frac{df[\varphi(x)].d\varphi(x)}{d\varphi(x).dx}$ oder $\frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$ als eine andere Form des Differentialquotienten der Function $f[\varphi(x)]$. Nun ist $\frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)}$ der Differentialquotient der beiden Veränderlichen $f[\varphi(x)]$ und $\varphi(x)$, wobei $\varphi(x)$ als die willkürlich Veränderliche

genommen ist, und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ ist der Differentialquotient der Veränderlichen $\varphi(x)$ und x, wobei x als willkürlich Veränderliche gilt. Man hat also folgende Regel: Der Differentialquotient irgend einer Function von der Function $\varphi(x)$, oder der Function $f[\varphi(x)]$, wird erhalten, indem man den Differentialquotienten von $f[\varphi(x)]$ in Bezug auf $\varphi(x)$ als willkürlich Veränderliche bildet, und denselben mit dem Differentialquotienten der Function $\varphi(x)$ multiplicirt.

Die Function $\left[ax^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right]^3$ würde geben die Differentialgleichung

$$\frac{d\left[ax^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right]^3}{dx} = 3\left[ax^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right]^2 \cdot \left[-2ax^{-3} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Aus der Gleichung

$$y = \left(a + 5x^2 - x^{-1}\right)^{\frac{1}{4}}$$

folgt die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\left[a + 5x^2 - x^{-3}\right]^{-\frac{3}{4}} \cdot \left[10x + 3x^{-4}\right].$$

§. 68.

Combination bestimmter Functionen mit unbestimmten.

Hat man eine bestimmte Function irgend einer unbestimmten und allgemein ausgedrückten Function von x, so gilt natürlich dieselbe Regel der Bildung ihres Differentialquotienten, welcher dann nur in Bezug auf die bestimmte Function entwickelbar ist, und in Bezug auf die unbestimmte in allgemeiner Bezeichnung dargestellt wird. Die Function $[f(x)]^m$ z. B. ist als Potenzfunction eine bestimmte Function der unbestimmten Function $f(x)$. Der Differentialquotient derselben ist nach obiger Regel $m[f(x)]^{m-1} \cdot \frac{df(x)}{dx}$. Stellt y irgend eine Function von x dar, so wird, wenn wir die Potenzfunction y^m setzen, für die Veränderlichen x und y^m gelten die Differentialgleichung

Es sei zuerst der Differentialquotient der Function $x^{\frac{m}{n}}$ zu finden, wobei m und n als ganze Zahlen gelten. Erheben wir $x^{\frac{m}{n}}$ auf die nte Potenz, so kann, da $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^m$ ist, der Ausdruck $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n$ auf doppelte Weise als eine Potenz mit ganzem positivem Exponenten betrachtet werden, entweder als die nte Potenz der Function $x^{\frac{m}{n}}$ oder als die mte Potenz von x. Wenden wir auf den Ausdruck $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n$, als Function der Function $x^{\frac{m}{n}}$ betrachtet, die Regel des §. 68 an, so ist der Differentialquotient desselben $= n\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1} \cdot \frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = n\left(x^{m-\frac{m}{n}}\right) \cdot \frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx}$.

Da aber, wenn die Function $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n$ in der Form x^m genommen wird, der Differentialquotient derselben gleich mx^{m-1} ist, und diese beiden Differentialquotienten gleich sind, so erhalten wir

$$n\left(x^{m-\frac{m}{n}}\right) \cdot \frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m \cdot x^{m-1}}{n\left(x^{m-\frac{m}{n}}\right)} = \frac{m}{n} \cdot x^{m-1-\left(m-\frac{m}{n}\right)}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Indem wir in dieser Gleichung den Differentialquotienten der Function $x^{\frac{m}{n}}$ erhalten haben, sehen wir, daß bei der Bildung desselben mit dem gebrochenen Exponenten $\frac{m}{n}$ ganz auf dieselbe Weise zu verfahren ist, wie mit dem ganzen Exponenten m in der Function x^m.

Wäre zweitens die Function x^{-m} zu differentiiren, so kann sie ebenfalls als zusammengesetzte Function mit positivem Exponenten betrachtet werden, indem man sie in der Form $\frac{1}{x^m}$ oder $\frac{x^0}{x^m}$ schreibt. Da nun nach §. 66 der Differentialquotient von $\frac{x^0}{x^m}$, als eines Quotienten zweier Functionen gleich

$$\frac{x^m \cdot 0 - m x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} \text{ ist,}$$

so ist

$$\frac{dx^{-m}}{dx} = -m x^{-m-1}$$

und folglich für negative Exponenten dieselbe Differentiationsregel wie für positive.

§. 70.

Differentiation aller algebraischen Functionen.

Die Differentiationsregeln, welche in dem Vorhergehenden gegeben sind für solche Functionen, in denen andere Functionen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sind, oder welche als Functionen von Functionen erscheinen, sind von der allgemeinsten Geltung, indem sie sich auf alle denkbaren Arten von Functionen beziehen, und sind in allen folgenden Theilen der Differential- und Integralrechnung von der ausgebreitetsten Anwendung. Wir können sie zunächst anwenden auf alle Fälle, in welchen Potenzfunctionen Einer Veränderlichen durch die genannten Rechnungsoperationen verknüpft sind. Nun nennt man alle Functionen, die entweder nur eine einfache Potenzfunction sind, oder in denen Potenzfunctionen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sind, oder in welchen solche Zusammensetzungen von Potenzfunctionen entweder wieder durch dieselben Operationen verbunden sind, oder auf die Potenz eines constanten Exponenten erhoben sind, oder in denen auch solche Potenzen zusammengesetzter Potenzfunctionen

wieder durch dieſelben Operationen verbunden ſind, mit beliebiger Wiederholung derſelben Zuſammenſetzungsweiſen, im Allgemeinen algebraiſche Functionen. In Bezug auf die Beliebigkeit der Wiederholung ſolcher Operationen findet keine rechte Gleichförmigkeit ſtatt bei dem Gebrauch des Wortes algebraiſche Function, indem Manche nur an eine endliche Anzahl von Wiederholungen dabei denken, Andere dieſe Endlichkeit nicht unter die Kennzeichen der algebraiſchen Function aufnehmen, und demnach auch eine unvollendbare oder in einer unendlichen Reihe von Potenzen ſich darſtellende Function zu den algebraiſchen rechnen müßten, und doch auch wieder beſtimmte unendliche Potenzenreihen, wie z. B. die Entwickelungen von Sinus und Coſinus und dergl. davon ausſchließen. Bei der Aeußerlichkeit, mit der die Unterſchiede algebraiſcher und nicht algebraiſcher Functionen gefaßt ſind, iſt an keine große Gleichförmigkeit zu denken, und bei der Geringfügigkeit der Conſequenzen, welche an dieſe Unterſcheidung geknüpft zu werden pflegen, auch an dieſen Schwankungen nicht viel gelegen. Auf das Wort ſoll uns nichts ankommen. Faſſen wir die oben bezeichneten Zuſammenſetzungen von Potenzfunctionen, die algebraiſche Functionen genannt worden ſind, ins Auge, von welchen alle Fälle, in denen die Potenzfunctionen als Exponent und Grundzahl verbunden ſind und überhaupt alle Functionen mit veränderlichem Exponent ausgeſchloſſen ſind, ſo iſt es klar, daß die bisherigen Differentiationsregeln hinreichen, alle ſolche Zuſammenſetzungen von Potenzfunctionen zu differentiiren, mögen ſie nun aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern beſtehen. Denn indem man einen beliebigen Complex von Potenzfunctionen als eine Function überhaupt betrachtet, ſo kann man jede gegebene Function, wenn ihre einzelnen Glieder nicht ſchon einfache Potenzfunctionen ſind, zunächſt in zwei zerlegen, die entweder durch eine der genannten Operationen zuſammengeſetzt ſind, oder die als Function einer Function erſcheinen. In dem unter dieſer Annahme gebildeten

Wäre zweitens die Function x^{-m} zu differentiiren, so kann sie ebenfalls als zusammengesetzte Function mit positivem Exponenten betrachtet werden, indem man sie in der Form $\frac{1}{x^m}$ oder $\frac{x^0}{x^m}$ schreibt. Da nun nach §. 66 der Differentialquotient von $\frac{x^0}{x^m}$ als eines Quotienten zweier Functionen gleich

$$\frac{x^m \cdot 0 - m x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} \text{ ist,}$$

so ist $$\frac{dx^{-m}}{dx} = -m x^{-m-1}$$

und folglich für negative Exponenten dieselbe Differentiationsregel wie für positive.

§. 70.

Differentiation aller algebraischen Functionen.

Die Differentiationsregeln, welche in dem Vorhergehenden gegeben sind für solche Functionen, in denen andere Functionen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sind, oder welche als Functionen von Functionen erscheinen, sind von der allgemeinsten Geltung, indem sie sich auf alle denkbaren Arten von Functionen beziehen, und sind in allen folgenden Theilen der Differential- und Integralrechnung von der ausgebreitetsten Anwendung. Wir können sie zunächst anwenden auf alle Fälle, in welchen Potenzfunctionen Einer Veränderlichen durch die genannten Rechnungsoperationen verknüpft sind. Nun nennt man alle Functionen, die entweder nur eine einfache Potenzfunction sind, oder in denen Potenzfunctionen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sind, oder in welchen solche Zusammensetzungen von Potenzfunctionen entweder wieder durch dieselben Operationen verbunden sind, oder auf die Potenz eines constanten Exponenten erhoben sind, oder in denen auch solche Potenzen zusammengesetzter Potenzfunctionen

wieder durch dieſelben Operationen verbunden ſind, mit beliebiger Wiederholung derſelben Zuſammenſetzungsweiſen, im Allgemeinen algebraiſche Functionen. In Bezug auf die Beliebigkeit der Wiederholung ſolcher Operationen findet keine rechte Gleichförmigkeit ſtatt bei dem Gebrauch des Wortes algebraiſche Function, indem Manche nur an eine endliche Anzahl von Wiederholungen dabei denken, Andere dieſe Endlichkeit nicht unter die Kennzeichen der algebraiſchen Function aufnehmen, und demnach auch eine unvollendbare oder in einer unendlichen Reihe von Potenzen ſich darſtellende Function zu den algebraiſchen rechnen müßten, und doch auch wieder beſtimmte unendliche Potenzenreihen, wie z. B. die Entwickelungen von Sinus und Cosinus und dergl. davon ausſchließen. Bei der Aeußerlichkeit, mit der die Unterſchiede algebraiſcher und nicht algebraiſcher Functionen gefaßt ſind, iſt an keine große Gleichförmigkeit zu denken, und bei der Geringfügigkeit der Conſequenzen, welche an dieſe Unterſcheidung geknüpft zu werden pflegen, auch an dieſen Schwankungen nicht viel gelegen. Auf das Wort ſoll uns nichts ankommen. Faſſen wir die oben bezeichneten Zuſammenſetzungen von Potenzfunctionen, die algebraiſche Functionen genannt worden ſind, ins Auge, von welchen alle Fälle, in denen die Potenzfunctionen als Exponent und Grundzahl verbunden ſind und überhaupt alle Functionen mit veränderlichem Exponent ausgeſchloſſen ſind, ſo iſt es klar, daß die bisherigen Differentiationsregeln hinreichen, alle ſolche Zuſammenſetzungen von Potenzfunctionen zu differentiiren, mögen ſie nun aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern beſtehen. Denn indem man einen beliebigen Complex von Potenzfunctionen als eine Function überhaupt betrachtet, ſo kann man jede gegebene Function, wenn ihre einzelnen Glieder nicht ſchon einfache Potenzfunctionen ſind, zunächſt in zwei zerlegen, die entweder durch eine der genannten Operationen zuſammengeſetzt ſind, oder die als Function einer Function erſcheinen. In dem unter dieſer Annahme gebildeten

§. 71.

Integrationsregeln, die aus dem Vorhergehenden folgen.

Aus den allgemeinen über zusammengesetzte Functionen gegebenen Differentiationsregeln können wir einige wichtige Integrationsregeln ableiten wobei wir uns auf diejenigen beschränken, welche sich durch bloßen Hinblick auf die analytischen Differentialgleichungen ergeben.

1) Da nach §. 64 der Differentialquotient einer Function, welche aus mehreren durch Plus- und Minuszeichen verbundenen Functionen als ihren Gliedern besteht, nichts weiter ist, als eine durch dieselben Vorzeichen zusammengesetzte Verbindung der Differentialquotienten der einzelnen Glieder, so folgt umgekehrt, daß zu einem gegebenen Differentialquotienten, der aus mehreren durch Plus- und Minuszeichen verbundenen Functionen besteht, die ursprüngliche Function oder das Integral gefunden wird, wenn man die Integrale der einzelnen Functionen mit ungeändertem Vorzeichen nimmt. Wenden wir dies zunächst auf Potenzfunctionen an. Ist y eine unbekannte Function von x, deren Differentialquotient eine Reihe von einfachen Potenzfunctionen von x ist, so daß man habe

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-2}$$

so folgt $y = \int 2x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int 4x^{-2} dx$

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-1}.$$

Kommt unter den Theilen des Differentialquotienten ein constantes Glied a vor, so wird, weil a der Differentialquotient von ax ist, $\int a dx = ax$ zu setzen sein. Es konnte auch a in der Form ax^0 als Potenzfunction von x angesehen, und der Integrationsregel dieser Function unterworfen werden, wodurch man ebenfalls $\int ax^0 dx = ax$ erhält. Diese Regel der Integration einer Function, welche als Summe mehrerer Functionen erscheint, ist, wie einfach auch immer, doch die wichtigste der ganzen Integral-

rechnung, indem zur Bewerkſtelligung einer vorgeſchriebenen Integration in unzähligen Fällen kein anderes Mittel übrig bleibt, als den gegebenen Differentialquotienten in eine Reihe von Functionen und insbeſondere in eine Potenzenreihe der Veränderlichen x zu verwandeln, und die Glieder der Reihe einzeln zu integriren.

2) Bei den in den §. 65 und 66 erhaltenen analytiſchen Differentialgleichungen haben die Differentialquotienten der Functionen, welche ein Product oder ein Quotient mehrerer Functionen ſind, eine zu ſpecielle Formirung, als daß die Fälle, in welchen gegebene Differentialquotienten unmittelbar dieſe Form an ſich trügen, und dieſen Differentialgleichungen angepaßt werden könnten, gerade häufig ſein könnten. Wie in einem ſolchen Falle die urſprüngliche Function aus dem Differentialquotienten zu bilden iſt, leuchtet von ſelbſt ein. Die analytiſche Differentialgleichung des §. 65 iſt übrigens in anderer Beziehung als eine ſogenannte Recurſionsformel von vielfältiger Anwendung in der Integralrechnung, aber von dieſer Anwendung kann hier zunächſt nicht die Rede ſein. Nur der Satz des §. 65 daß ein in einer Function enthaltener conſtanter Factor zum Differentialquotienten der ohne Rückſicht auf dieſen Factor differentirten Function unverändert als Factor zugeſetzt wird, gibt für das Integriren die Vorſchrift, daß man in jedem gegebenen Differentialquotienten die conſtanten Factoren abſondert, die übrigbleibende Function für ſich der Integration unterwirft, und zu dem gefundenen Integral die conſtanten Factoren wieder unverändert zuſetzt. Iſt demnach $f(x)$ der Differentialquotient irgend einer Function von x, ſo iſt $\int ab . f(x) dx = ab . \int f(x) dx$. Für Potenzfunctionen iſt dieſe Regel ſchon früher (§. 44) angegeben worden, gemäß welcher z. B. $\int 4\pi . x^{\frac{2}{3}} dx = 4\pi . \int x^{\frac{2}{3}} dx = 4\pi . \frac{3}{5} . x^{\frac{5}{3}}$.

3) Wenn wir die in den §§. 67 u. 68 gegebenen Regeln

der Differentiation einer solchen Function, welche als Function einer Function erscheint, zunächst auf Potenzfunctionen anwenden, so erhalten wir die Regel der Integration für eine Potenz irgend einer durch f(x) oder y vorgestellten unbestimmten oder noch unbekannten Function von x. Denn da $d[f(x)]^m = m[f(x)]^{m-1} . df(x)$, so folgt, wenn man die Veränderungen beachtet, welche mit dem auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Differential vorzunehmen sind, um die ursprüngliche Function $[f(x)]^m$ zu erhalten, daß $\int [f(x)]^n . df(x) = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$ oder daß $\int y^n . dy = \frac{y^{n+1}}{n+1}$.

4) Da ferner aus $z = x^m + y^n$ die Differentialgleichung $dz = mx^{m-1} dx + ny^{n-1} . dy$ hervorging, so folgt umgekehrt aus

$$dz = x^m . dx + y^n . dy$$

die Gleichung

$$z = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Eine solche Gleichung gibt uns freilich nicht den Werth von z als eine bekannte Function von x, weil y noch eine unbestimmte Function von x ist, und ebenso wenig den Werth von y, weil z eine unbestimmte Function von x ist. Wäre aber z oder die Summe der beiden Potenzen von x und y gleich einer Constante C gewesen, und folglich der Differentialquotient und ebenso das Differential von z gleich Null, so folgte aus der Gleichung

$$0 = x^m dx + y^n dy$$

oder aus

$$dC = x^m dx + y^n dy$$

$$C = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

und mithin eine Gleichung zwischen x und der durch y ausgedrückten unbekannten Function von x, welche Letztere demnach durch Auflösung der Gleichung in Bezug auf y

als Unbekannte, in Form einer bestimmten Function von x erhalten werden kann.

5) Man wird leicht bemerken, daß, wenn auch die Differentiation beliebiger algebraischer Functionen leicht ausführbar ist, und nach einer ganz allgemeingültigen Methode bewerkstelligt werden kann, es sich mit der Integration beliebiger algebraischer Functionen nicht ebenso verhält. Dies ist auch nicht zu verwundern, da man ja überhaupt hierbei keine ursprüngliche Methode der Integration in Anwendung bringt, sondern die gegebenen Differentialquotienten nur den Formen bekannter analytischer Differentialgleichungen anzupassen sucht. Das hauptsächlichste Geschäft der Integralrechnung besteht daher darin, die gegebenen Differentialquotienten so umzuformen, daß sie unter eine bekannte analytische Differentialgleichung subsumirt werden können. Nun kann wie bekannt jede beliebige algebraische Function Einer Veränderlichen x in eine endliche oder unendliche Reihe umgeformt werden, deren Glieder lauter einfache Potenzen von x sind; und mithin kann auch durch Integration der einzelnen Glieder der Reihe das Integral der Function leicht erhalten werden. Man nennt dies Verfahren eine Integration durch Reihen. In vielen Fällen freilich liefert dies Verfahren ein unbequemes und weitläufiges Resultat. Man ist daher, um die Entwickelung einer Function in eine Reihe zu vermeiden, auch auf andere in gewissen Fällen anwendbare Umformungen bedacht gewesen. So hat man insbesondere bei denjenigen gebrochenen Functionen, deren Nenner aus mehreren Potenzen der Veränderlichen zusammengesetzt ist, ein besonderes Verfahren der Umformung, welches darin besteht, die gebrochene Function in mehrere Partialbrüche zu zerlegen, deren Zähler constante Zahlen sind, und deren Nenner diejenigen Formen des ersten Grades sind, aus welchen der Nenner der gegebenen Function durch Multiplication zusammengesetzt ist. Diese Partialbrüche werden dann einzeln integrirt. Abgesehen davon, daß unter diesen Partialbrüchen sich For-

nen finden, deren Integration erst in einem folgenden Capitel gelehrt wird, und dies Verfahren also nicht hierher gehört, so verliert sich doch auch diese ganze Umformung in rein analytisch operative und zum Theil algebraische Untersuchungen, die, als zur niedern Analysis und Algebra gehörig, zur Einsicht in die Grundbegriffe und die eigenthümliche Methode der Differential- und Integralrechnung gar nichts beitragen, und daher aus einer Einleitung in diese Wissenschaft jedenfalls ausgeschlossen bleiben müssen. Hat man sich mit dem eigenthümlichen Wesen dieser Wissenschaft erst vertraut gemacht, so sind diese einzelnen rein operativen Regeln leicht nachzuholen, und in allen Lehrbüchern zum Ueberfluß zu finden.

§. 72.

Integration der Potenz eines besonderen Binoms.

Als Anhang zu den Integrationsregeln einer Potenz einer Function von x mag noch erwähnt werden der Differentialquotient einer Potenz einer solchen zweitheiligen Function von x, in welcher der eine Theil constant und der andere die erste Potenz von x ist, und die darauf zu gründende Integrationsregel. Ist $a + bx$ die zweitheilige Function von x, und bilden wir nach den bekannten Regeln den Differentialquotienten von $(a + bx)^m$ so ist

$$\frac{d(a + bx)^m}{dx} = m(a + bx)^{m-1} . b.$$

Dieser Differentialquotient ist im Wesentlichen ganz so gebildet wie die ursprüngliche Function selbst, indem er eine Potenz derselben zweitheiligen Größe $a + bx$ ist, nur noch mit einem constanten Factor verbunden. Jede beliebige Potenz der zweitheiligen Größe $a + bx$ kann also unter die Form $mb.(a + bx)^{m-1}$ subsumirt werden, mit Ausnahme des einzigen Falles, in welchem der Exponent von $a + bx$ gleich -1 ist, weil in diesem Falle m gleich Null gesetzt werden müßte, und dadurch die ganze Potenz von $a + bx$ sich annullirte. Beachten wir, daß aus dem Dif-

ferentialquotienten $mb.(a+bx)^{m-1}$ die ursprüngliche Function $(a+bx)^m$ erhalten wird, wenn wir den Exponenten um eine Einheit erhöhen, und diese Potenz dividiren durch das Product des um 1 vermehrten Exponenten und des Coefficienten von x, so können wir, wenn uns ein Differentialquotient von der Form $(a+bx)^n$ gegeben ist, aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = (a+bx)^n$ ableiten

$$y = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}, \text{ oder es ist}$$

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}.$$

Wäre z. B. $\frac{dy}{dx} = \left(5+\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{3}}$, so erhielte man

$$y = \frac{\left(5+\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}\left(5+\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Dieser Satz kann als ein specieller Fall eines leicht darzustellenden allgemeineren Satzes angesehen werden. Denn wäre die in der Klammer enthaltene Veränderliche x selbst noch auf eine Potenz erhoben, und differentiirte man die Function $(a+bx^n)^m$, so erhielte man

$$\frac{d(a+bx^n)^m}{dx} = m(a+bx^n)^{m-1}.bnx^{n-1}.$$

Sehen wir ab von dem constanten Factor mbn, so haben wir in diesem Differentialquotienten das Product einer Potenz von $a+bx^n$ und einer Potenz von x, welche Letztere um eine Einheit niedriger ist, als der Potenzgrad des in der Klammer enthaltenen x. Ueberall, wo ein Product zweier Potenzfunctionen von der beschriebenen Form, nämlich von der Form $(a+bx^n)^{m-1}.x^{n-1}$, mit oder ohne constante Factoren gegeben ist, kann dasselbe demnach leicht integrirt werden. Durch Beachtung der Veränderungen, welche mit $mbn.(a+bx^n)^{m-1}.x^{n-1}$ vorgenommen werden

müſſen, um $(a + bx^e)^m$ zu erhalten, finden wir, daß zu einem Differentialquotienten von der Form $(a + bx^p)^q . x^{p-1}$ als urſprüngliche Function gehört $\frac{(a + bx^p)^{q+1}}{bp(q+1)}$ oder daß

$$\int (a + bx^p)^q . x^{p-1} . dx = \frac{(a + bx^p)^{q+1}}{b . p(q+1)}.$$

§. 73.

Beiſpiele, in welchen geſchloſſene Potenzfunctionen zu integriren ſind.

Ehe wir zu den Regeln des Differentiirens anderer Functionen übergehen, wollen wir nicht unterlaſſen, durch einige auf den Gebrauch der eben gefundenen Integrationsregeln geſtützte Beiſpiele die Methoden der Differential- und Integralrechnung weiterhin anſchaulich zu erläutern. Um dabei auf das Umfaſſende und die Allgemeinheit der Methoden nochmals hinzuweiſen, werden wir die Beiſpiele ſo wählen, daß unter denſelben gleicherweiſe Sätze vorkommen, welche in den Elementen der Mathematik bewieſen werden, und ſolche, welche für die Hülfsmittel der Elementarmathematik abſolut unzugänglich ſind.

1) Es ſoll der Flächeninhalt des Paralleltrapezes bcde (Fig. 25) durch ſeine beſtimmenden Stücke, die beiden parallelen Seiten und den ſenkrechten Abſtand derſelben oder die Höhe des Paralleltrapezes ausgedrückt werden. Wir denken uns den Flächeninhalt dadurch beſchrieben, daß eine auf der Höhe fg ſenkrecht ſtehende Linie von veränderlicher Länge ſich fortbewegt. Der Fortſchritt auf fg vom Anfangspunkt f aus ſei die willkürlich Veränderliche, deren fließender Zahlenwerth x heißt. Die anfängliche Länge eb der fortbewegten Linie heiße a. Ein beliebiger Werth in der fortbewegten Linie beſteht aus einem Stück mi = eb oder = a, und aus einem Stück mn, welches, als mit x gleichmäßig wachſend, im Allgemeinen cx heißen kann. Der allgemeine Werth der fortbewegten Linie iſt alſo $a + cx$. Dieſer Werth fällt nach §. 49 mit dem Differentialquotienten der Fläche und der Abſciſſe, als des Weges der Fortbewe-

gung zusammen. Heißt also die veränderliche Fläche des Paralleltrapezes F, so haben wir die Gleichung

$$\frac{dF}{dx} = a + cx$$

und folglich

$$F = ax + \frac{cx^2}{2}.$$

Oder nach gewöhnlicher Bezeichnungsweise

$$dF = a\,dx + c\,x\,dx$$
$$F = a\int dx + c\int x\,dx$$
$$F = ax + \frac{cx^2}{2}.$$

Da die für den Flächeninhalt gefundene Formel bei dem Nullwerth von x gleich Null wird, und die Fläche selbst im Punkt f oder dem Nullpunkte von x ebenfalls gleich Null ist, so ist keine Constante zuzufügen. Schreiben wir den gefundenen Ausdruck $ax + \frac{cx^2}{2}$ in der Form $\frac{a + a + cx}{2}.x$, so haben wir, da für eine Höhe = x die beiden parallelen Seiten durch a und a + cx auszudrücken sind, in dieser Form den bekannten Satz, daß der Flächeninhalt der Paralleltrapezes gleich ist dem Product aus der Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.

2) Es soll der Cubikinhalt eines Kugelabschnittes und der ganzen Kugel gefunden werden. Wir können uns den Cubikinhalt der Kugel dadurch beschrieben denken, daß ein veränderlicher Kreis sich mit seinem Mittelpunkt auf der Linie ab (Fig. 26), als dem Durchmesser der Kugel, senkrecht fortbewegt. Die beiden von einander abhängigen Veränderlichen sind der Cubikinhalt und der Weg, den der Mittelpunkt des fortbewegten Kreises beschreibt. Der Differentialquotient des so erzeugten Cubikinhalts und des Weges der Fortbewegung fällt nach §. 52 zusammen mit dem jedesmaligen Werthe der fortbewegten Kreisfläche. Diese Kreisfläche haben wir also auszudrücken durch eine Function des Weges der Fortbewegung als der willkürlich Veränderlichen. Der Radius der Kugel heiße r. Der An-

fangspunkt des Weges der Fortbewegung falle in den Endpunkt des Durchmessers, in den Punkt a. Ein beliebiger auf dem Durchmesser zurückgelegter Weg am heiße x. Der Radius mn des dem Weg x zugehörigen Kreises ist nach bekannten Sätzen der Kreislehre $= \sqrt{x(2r-x)} = [2rx-x^2]^{\frac{1}{2}}$. Die Fläche dieses Kreises ist also $(2rx - x^2).\pi$. Wenn wir den veränderlichen Cubikinhalt des durch Fortbewegung der Kreisfläche beschriebenen Kugelabschnittes durch C vorstellen, so erhalten wir demnach die Differentialgleichung

$$\frac{dC}{dx} = 2r\pi x - \pi x^2$$

$$dC = 2r\pi x\,dx - \pi x^2.dx$$

folglich $$C = 2r\pi \int x\,dx - \pi \int x^2 dx$$

$$C = r\pi.x^2 - \pi.\frac{x^3}{3}.$$

Daß hier keine Constante zuzufügen ist, erhellt leicht aus schon öfter angegebenen Gründen. Dieses ist also für eine Kugel mit dem Radius r der Werth eines Kugelabschnitts, durch welchen auf dem Durchmesser ein Stück $= x$ abgeschnitten wird. Denken wir die bewegte Kreisfläche bis zum Mittelpunkt der Kugel fortgerückt, so wird, da nun $x = r$ ist, für die Halbkugel $C = \pi.r^3 - \pi.\frac{r^3}{3} = \frac{2}{3}.r^3\pi$.

Folglich ist der Cubikinhalt der ganzen Kugel $\frac{4}{3}.r^3.\pi$, wie aus den Elementen bekannt.

3) Es sei durch Umdrehung einer Ellipse bde (Fig. 27) um ihre große Axe bd ein elliptisches Sphäroid beschrieben, dessen Cubikinhalt berechnet werden soll. Wir denken uns den Cubikinhalt wieder dadurch erzeugt, daß ein veränderlicher Kreis mit seinem Mittelpunkt auf der großen Axe senkrecht gegen dieselbe fortbewegt wird. Der Anfangspunkt des Weges der Fortbewegung falle in den Mittelpunkt des Sphäroids, in den Punkt g, und die Fortbewegung geschehe von g nach d. Ein beliebiges Stück gm

dieſes Wegs heiße x. Der Radius m n des dem Wege x zugehörigen Kreiſes iſt nach der bekannten Mittelpunktsgleichung der Ellipſe $\frac{c}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, wenn unter a die halbe große und unter c die halbe kleine Axe der Ellipſe verſtanden wird. Die Fläche des Kreiſes mit dem Radius m n iſt demnach $\frac{c^2}{a^2}.(a^2 - x^2).\pi$. Heißt C der Cubikinhalt eines vom Mittelpunkt aus beſchriebenen Stückes des Sphäroids, ſo haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{dC}{dx} = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2)\pi$$

$$= c^2\pi - \frac{c^2}{a^2}.x^2\pi$$

$$\text{alſo } C = c^2\pi x - \frac{c^2}{a^2}.\pi.\frac{x^3}{3}.$$

Hat man bei dieſer Formel nur das vom Mittelpunkt aus beſchriebene Stück im Sinn ohne die hinter ihm liegende Hälfte des Sphäroids, ſo iſt, wie leicht zu ſehen, keine Conſtante zuzuſetzen. Denkt man die Kreisfläche bis zum Endpunkt der halben großen Axe fortgerückt, ſo nimmt x den Werth a an, und es iſt für den Cubikinhalt des halben Sphäroids $C = \pi c^2 a - \frac{\pi c^2 a}{3} = \frac{2}{3}.\pi c^2 a$. Der Cubikinhalt des ganzen Sphäroids iſt alſo $= \frac{4}{3}.\pi c^2 a$.

Denkt man ſich das elliptiſche Sphäroid von einem Cylinder umſchloſſen, deſſen Grundfläche die halbe kleine Axe c zum Radius hat, und folglich gleich $c^2\pi$ iſt, und deſſen Höhe gleich der großen Axe, oder gleich 2a iſt, ſo ſieht man, da der Cubikinhalt dieſes Cylinders gleich $2ac^2\pi$ iſt, daß das Sphäroid $\frac{2}{3}$ dieſes Cylinders beträgt.

Ein elliptiſches Sphäroid ſei ferner beſchrieben, indem die Ellipſe b e d f (Fig. 28) ſich um die kleine Axe b d dreht. Bewegt ſich der veränderliche Kreis vom Mittelpunkt g

auf der kleinen Axe fort, so ist, wenn der Weg gm gleich x gesetzt, und die Bedeutung der Buchstaben a und c beibehalten wird, der Radius mn bekanntlich gleich $\frac{a}{c}(c^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, und die Kreisfläche mit dem Radius mn gleich $\frac{a^2}{c^2}(c^2-x^2)\pi$.

Folglich $$\frac{dC}{dx} = a^2\pi - \frac{a^2}{c^2} \cdot x^2\pi$$

$$C = a^2\pi x - \frac{a^2}{c^2} \cdot \pi \cdot \frac{x^3}{3}.$$

Für das halbe Sphäroid wird $x = c$ und folglich

$$C = a^2c\pi - \frac{a^2\pi c}{3} = \frac{2}{3} \cdot a^2c\pi,$$

und für das ganze Sphäroid $C = \frac{4}{3} \cdot a^2c\pi$. Betrachten wir z. B. das Erdsphäroid als ein durch Drehung um die kleine Axe beschriebenes elliptisches Sphäroid, welcher Form die Erde sehr nahe kommt, so ist, da die halbe große Axe 860 und die halbe kleine 857 Meilen beträgt, der Cubikinhalt der Erde $= \frac{4}{3} \cdot 860^2 \cdot 857 \cdot \pi = 2655010000$ Cubikmeilen.

Vergleichen wir die körperlichen Inhalte der beiden elliptischen Sphäroide, welche durch Drehung um die große und um die kleine Axe der Ellipse erzeugt werden, so sehen wir, daß der Cubikinhalt des Ersteren $= \frac{4}{3} a c^2 \pi$ und der des Letztern $= \frac{4}{3} \cdot a^2c\pi$ ist, daß folglich beide sich zu einander verhalten wie c zu a oder wie die kleine Axe zur großen.

4) Es sei ferner noch der Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels (Fig. 29) durch Fortbewegung eines veränderlichen Kreises auf der Axe ab beschrieben. Der Radius ad der kleineren Grundfläche heiße r. Stellen wir durch x ein beliebiges Stück am des Weges der Fortbewegung

vor, so besteht der Radius mn des zugehörigen Kreises aus einem Stück gleich r und einem andern, welches als mit x gleichmäßig wachsend cx heißen kann, und ist also dieser Radius gleich $r + cx$. Mithin ist die Fläche des Kreises $(r + cx)^2\pi$. Wir erhalten also, den veränderlichen durch Fortbewegung der Kreisfläche erzeugten Cubikinhalt durch C ausgedrückt, die Gleichung

$$\frac{dC}{dx} = (r + cx)^2\pi$$

$$\frac{dC}{dx} = r^2\pi + 2rcx\pi + c^2\pi x^2$$

$$C = r^2\pi x + 2rc\pi \cdot \frac{x^2}{2} + c^2\pi \cdot \frac{x^3}{3},$$

Für den Nullwerth von x wird die Formel gleich Null; und da der Nullpunkt von x in den Punkt a gesetzt worden ist, und in demselben auch der Cubikinhalt gleich Null ist, so gibt es keine Constante. Will man den Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels durch r und R, oder die Radien der beiden ebenen Grenzflächen, und durch den senkrechten Abstand derselben oder die Höhe h des Kegels als die bestimmenden Stücke ausdrücken, so setze man $x = h$, welches zugleich $= ab$ sein möge. Der constante Factor c, welcher, wenn df mit ab parallel ist, gleich $\frac{ef}{df}$ zu setzen ist, wird demnach in Bezug auf die bestimmenden Stücke r, R und h auszudrücken sein durch $\frac{R - r}{h}$. Diese Werthe von x und c in die obige Formel eingeschoben erhalten wir

$$C = r^2\pi h + 2r\left(\frac{R-r}{h}\right)\pi \cdot \frac{h^2}{2} + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2\pi \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$C = \frac{h}{3}\pi\left(3r^2 + 3Rr - 3r^2 + R^2 - 2Rr + r^2\right)$$

$$C = \frac{h}{3} \cdot \pi\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

$$C = \frac{h}{3} \cdot \pi\left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right),$$

welches die gewöhnliche Formel für den Cubikinhalt des abgekürzten Kegels ist.

§. 74.

Nachtrag über Constantenbestimmung.

Wir wollen die Berechnung des Cubikinhalts eines abgekürzten Kegels als Beispiel gebrauchen, um an demselben noch einen bisher außer Acht gelassenen wichtigen Punkt in Betreff der Constantenbestimmung zu erläutern, und bei dieser Gelegenheit noch einige allgemeine Bemerkungen über Constantenbestimmung zufügen. In allen unseren bisherigen Beispielen waren die durch Integration erhaltenen Functionen oder die Integrale, da sie sich nur als Verbindungen einfacher Potenzfunctionen mit positiven Exponenten darstellten, von der Art, daß für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen die ganze Function sich annullirte. Eine in diesem Falle noch nöthige Constante kann nichts weiter sein, als der Werth, welchen die abhängig veränderliche Größe etwa schon hat für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen, und welcher vor dem Wachsen der Letzteren, und unabhängig von demselben vorhanden war. Diese Constante kann also immer dadurch bestimmt werden, daß man in den Nullpunkt der willkürlich Veränderlichen zurückgeht, und zusieht, ob die abhängig Veränderliche, deren allgemeiner Werth durch die Integration gefunden werden sollte, für diesen Punkt noch einen gewissen Werth hat, und welchen. Hierzu bedarf es keiner weitern Erklärungen. Aber oft ist das Integral von der Art, daß es für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen sich nicht annullirt, und dieser Fall soll noch besonders in Untersuchung genommen werden.

Wir wollen denselben zuerst an unserm Beispiel vom Cubikinhalt des abgekürzten Kegels betrachten. Der Differentialquotient des Cubikinhalts und der Abscisse, als des Weges der fortbewegten Kreisfläche, war gegeben durch die Function $(r + cx)^2\pi$. Dieselbe integrirten wir, indem wir

sie durch Ausführung der vorgeschriebenen Quadrirung in eine Reihe von einfachen Potenzfunctionen verwandelten. Diese Verwandlung war aber nicht nöthig, weil der Differentialquotient $(r+cx)^2\pi$ nach Anleitung des §. 72 unmittelbar in dieser Gestalt integrirt werden kann, da er mit der Form $(a+bx)^m$, deren Integration dort nachgewiesen ist, zusammenfällt. Wenden wir also die Regel jenes Paragraphen auf unseren Differentialquotienten an, so erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\frac{dC}{dx} = (r+cx)^2\pi$$

$$C = \frac{(r+cx)^3.\pi}{3c}.$$

Die so erhaltene Function der Abscisse x, welche den Cubikinhalt C des abgekürzten Kegels angeben soll, kann, wie leicht zu sehen, nicht richtig sein. Denn da gemäß des in unserer Differentialgleichung gegebenen Ausdrucks des Radius des fortbewegten Kreises der Anfangs- oder Nullpunkt der Abscisse in einen Punkt fällt, in welchem der Radius des fortbewegten Kreises den Werth r hat, also in den Punkt a (Fig. 29) fällt, wo auch der Cubikinhalt zu entstehen anfängt, so müßte, wenn die Formel $\frac{(r+cx)^3.\pi}{3c}$ den Cubikinhalt richtig angeben sollte, durch fortgesetzte Verkleinerung der Abscisse auch der Werth des Cubikinhalts zu jedem beliebigen Grad von Kleinheit heruntergebracht werden können, und für den Nullwerth der Abscisse selbst gleich Null werden. Dies zeigt aber unsere Formel $\frac{(r+cx)^3.\pi}{3c}$ nicht. Dieselbe nähert sich mit kleiner gesetztem x nicht dem Nullwerth, und geht für ein annullirtes x über in den Werth $\frac{r^3}{3c}.\pi$. Nun ist aber doch die Function $(r+cx)^2\pi$ der Differentialquotient derjenigen unbekannten Function der Abscisse x, welche den Cubikinhalt des Kegels angibt, und welche durch den Buchstaben C

vorgestellt worden ist, und zugleich der richtige Differentialquotient der bekannten Function $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$. Da nun diese beiden Functionen, nämlich die unbekannte C und die bekannte $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ denselben Differentialquotienten haben, so können sie sich nur durch eine Constante unterscheiden. So lange diese Constante fehlt, kann für keinen Werth von x der Werth der Function $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ mit dem Werthe des Cubikinhalts zusammentreffen. Umgekehrt aber wird, wenn die Function $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ durch den Zusatz einer Constanten so verändert worden ist, daß für irgend einen einzelnen Zahlenwerth des x der Werth dieser veränderten Function mit dem Werthe des Cubikinhalts zusammentrifft, alsdann die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe nothwendig für alle Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen stattfinden. Diese Uebereinstimmung ist nun hier leicht zu bewerkstelligen, da man weiß, daß für den Nullwerth des x der Werth des Cubikinhaltes auch gleich Null werden muß. Ich brauche also die Formel $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ nur so zu verändern durch einen Zusatz, daß sie für den Nullwerth von x selbst gleich Null wird. Da sie nun für ein annullirtes x übergeht in $\frac{r^3\pi}{3c}$, so muß $\frac{r^3\pi}{3c}$ von ihr abgezogen werden, und die Formel $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c} - \frac{r^3\pi}{3c}$ hat die Eigenschaft, für ein annullirtes x selbst gleich Null zu werden. Es ist also $-\frac{r^3\pi}{3c}$ die zuzusetzende Constante, und wir erhalten mithin für den Cubikinhalt des abgekürzten Kegel die Gleichung

$$C = \frac{(r+cx)^3\pi}{3c} - \frac{r^3\pi}{3c}.$$

sie durch Ausführung der vorgeschriebenen Quadrirung in eine Reihe von einfachen Potenzfunctionen verwandelten. Diese Verwandlung war aber nicht nöthig, weil der Differentialquotient $(r+cx)^2\pi$ nach Anleitung des §. 72 unmittelbar in dieser Gestalt integrirt werden kann, da er mit der Form $(a+bx)^m$, deren Integration dort nachgewiesen ist, zusammenfällt. Wenden wir also die Regel jenes Paragraphen auf unseren Differentialquotienten an, so erhalten wir aus der Differentialgleichung

$$\frac{dC}{dx} = (r+cx)^2\pi$$

$$C = \frac{(r+cx)^3.\pi}{3c}.$$

Die so erhaltene Function der Abscisse x, welche den Cubikinhalt C des abgekürzten Kegels angeben soll, kann, wie leicht zu sehen, nicht richtig sein. Denn da gemäß des in unserer Differentialgleichung gegebenen Ausdrucks des Radius des fortbewegten Kreises der Anfangs- oder Nullpunkt der Abscisse in einen Punkt fällt, in welchem der Radius des fortbewegten Kreises den Werth r hat, also in den Punkt a (Fig. 29) fällt, wo auch der Cubikinhalt zu entstehen anfängt, so müßte, wenn die Formel $\frac{(r+cx)^3.\pi}{3c}$ den Cubikinhalt richtig angeben sollte, durch fortgesetzte Verkleinerung der Abscisse auch der Werth des Cubikinhalts zu jedem beliebigen Grad von Kleinheit heruntergebracht werden können, und für den Nullwerth der Abscisse selbst gleich Null werden. Dies zeigt aber unsere Formel $\frac{(r+cx)^3.\pi}{3c}$ nicht. Dieselbe nähert sich mit kleiner gesetztem x nicht dem Nullwerth, und geht für ein annullirtes x über in den Werth $\frac{r^3}{3c}.\pi$. Nun ist aber doch die Function $(r+cx)^2\pi$ der Differentialquotient derjenigen unbekannten Function der Abscisse x, welche den Cubikinhalt des Kegels angibt, und welche durch den Buchstaben C

vorgestellt worden ist, und zugleich der richtige Differentialquotient der bekannten Function $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$. Da nun diese beiden Functionen, nämlich die unbekannte C und die bekannte $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ denselben Differentialquotienten haben, so können sie sich nur durch eine Constante unterscheiden. So lange diese Constante fehlt, kann für keinen Werth von x der Werth der Function $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ mit dem Werthe des Cubikinhalts zusammentreffen. Umgekehrt aber wird, wenn die Function $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ durch den Zusatz einer Constanten so verändert worden ist, daß für irgend einen einzelnen Zahlenwerth des x der Werth dieser veränderten Function mit dem Werthe des Cubikinhalts zusammentrifft, alsdann die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe nothwendig für alle Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen stattfinden. Diese Uebereinstimmung ist nun hier leicht zu bewerkstelligen, da man weiß, daß für den Nullwerth des x der Werth des Cubikinhaltes auch gleich Null werden muß. Ich brauche also die Formel $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ nur so zu verändern durch einen Zusatz, daß sie für den Nullwerth von x selbst gleich Null wird. Da sie nun für ein annullirtes x übergeht in $\frac{r^3\pi}{3c}$, so muß $\frac{r^3\pi}{3c}$ von ihr abgezogen werden, und die Formel $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c} - \frac{r^3\pi}{3c}$ hat die Eigenschaft, für ein annullirtes x selbst gleich Null zu werden. Es ist also $-\frac{r^3\pi}{3c}$ die zuzusetzende Constante, und wir erhalten mithin für den Cubikinhalt des abgekürzten Kegel die Gleichung

$$C = \frac{(r+cx)^3\pi}{3c} - \frac{r^3\pi}{3c}.$$

Diese für den Cubikinhalt des abgekürzten Kegels aufgefundene Function ist, wie leicht nachzuweisen, nur der Form nach von der im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Function, wo $C = r^2\pi x + rc\pi x^2 + \frac{c^2\pi x^3}{3}$ gefunden wurde, verschieden, indem beide Functionen als Seiten einer analytischen Gleichung dargestellt werden können. Denn führen wir in dem Ausdruck $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c}$ die Erhebung zur dritten Potenz aus, so erhalten wir

$$\frac{(r+cx)^3\pi}{3c} = \frac{r^3\pi}{3c} + \frac{3r^2cx\pi}{3c} + \frac{3rc^2x^2\pi}{3c} + \frac{c^3x^3\pi}{3c}.$$

Indem wir das constante Glied $\frac{r^3\pi}{3c}$ auf die andere Seite der Gleichung setzen, und in den übrigen Gliedern die gleichen Factoren im Zähler und Nenner wegstreichen, haben wir $\frac{(r+cx)^3\pi}{3c} - \frac{r^3\pi}{3c} = r^2\pi x + rc\pi x^2 + \frac{c^2\pi x^3}{3}$, und mithin in den beiden Seiten dieser analytischen Gleichung die zwei Formen, welche als Ausdrücke für den Cubikinhalt des abgekürzten Kegels gefunden worden sind.

Es mögen hier noch einige allgemeine Bemerkungen über Constantenbestimmung ihre Stelle finden. So lange nur vom Zusammenhang ursprünglicher und anderer aus denselben durch Differentiation abgeleiteter Functionen die Rede ist, und man also z. B. sagt, die Function $(a+bx)^m$ ist entstanden durch Differentiation der Function $\frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}$, oder eine solche Abhängigkeit der Functionen ausspricht durch eine analytische Integralgleichung, wie $\int (a+bx)^m\,dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}$, braucht man natürlich nach der Constanten gar nicht zu fragen, weil man durch eine solche Gleichung nur ausspricht, daß die eine Function in die andere übergeht durch eine bestimmte Operation, und dies allemal

richtig ist mit und ohne Constante, und bei jeder beliebigen Constanten. Wenn man nichts desto weniger auch bei analytischen Integralgleichungen oft ein allgemeines Zeichen einer Constanten zusetzt, so ist dies, da eine völlig willkürliche Größe weder bestimmt werden kann noch bestimmt zu werden braucht, ganz überflüssig, es müßte denn sein, daß man durch diese leere Figur der Constanten dem Leser fortwährend den Satz einschärfen wollte, daß ein in einer Function enthaltenes constantes Glied bei der Differentiation derselben wegfällt. Genauer betrachtet hat aber das Zusetzen einer Constanten in diesem Falle eigentlich keinen Sinn, weil eine analytische Integralgleichung wie jede analytische Gleichung nur einen Zusammenhang der Operationen und keinen Zusammenhang von Größen darstellt, und bei einer Function, die nur nach ihrer allgemeinen Natur als abstracte Function und nicht als Ausdruck des Werthes einer veränderlichen Größe betrachtet wird, die Frage nach der Uebereinstimmung des Werthes der Function mit dem Werth einer veränderlichen Größe gar nicht entstehen kann. Ganz anders ist es, wenn ich durch Integration ein Gesetz der Abhängigkeit von Größen bestimmen will. Leite ich z. B. aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ab $y = \int 3x^2 dx = x^3$, so habe ich keine analytische Integralgleichung, weil ich von der durch y vorgestellten Function nur weiß, daß ihr Differentialquotient gleich $3x^2$ ist, und dieselbe, wenn sie überhaupt etwas bedeutet, nur Ausdruck des Werthes irgend einer von x abhängigen Größe sein kann. Und diese von x abhängige Größe kann sehr wohl von der Art sein, daß sie nur durch Verbindung von x^3 mit irgend einer Constanten richtig ausgedrückt wird.

Man hat bei der Constantenbestimmung demnach zu unterscheiden, die durch Integration erhaltene Function oder das Integral, und die abhängig veränderliche Größe, deren Werth durch eine Function der willkürlich Veränderlichen

allgemein ausgedrückt werden soll. Hat man allgemein die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$, und sei $f(x)$ eine gegebene Function, so stellt y eine unbekannte Function von x vor, deren Differentialquotient $f(x)$ ist, und welche zugleich den Werth einer von x abhängigen Größe ausdrückt. Bedeutet nun $F(x)$ das Integral, welches man aus $f(x)$ durch Integration erhalten hat, so können die beiden Functionen, die unbekannte y und die bekannte $F(x)$, die denselben Differentialquotienten $f(x)$ haben, wenn sie sich überhaupt unterscheiden, sich nur durch eine Constante unterscheiden. Man kann also setzen $y = F(x) + C$. Aus der Natur der Function $F(x)$ als solcher könnte die Constante natürlich nicht folgen, wenn man von y sonst gar nichts wüßte. Man muß vielmehr irgend einen Werth der abhängig veränderlichen Größe, den sie für einen einzelnen bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt, schon sonstwie wissen. Substituirt man dann in der gegebenen Function $F(x)$ statt x diesen bestimmten Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen, so braucht man nur zuzusehen, ob der so erhaltene bestimmte Werth des Integrals und der bekannte einzelne Werth der abhängig veränderlichen Größe übereinstimmen. Sind beide Werthe gleich, so ist keine Constante zuzusetzen. Zeigen sie sich aber ungleich, so ist es von selbst klar, welche positive oder negative Zahl zu dem bestimmten Werthe des Integrals zugesetzt werden muß, um diese Uebereinstimmung hervorzubringen. Diese zuzusetzende Zahl ist dann allgemein die Constante. Denn wenn die Constante so gewählt wird, daß der Werth des Integrals und der Werth der abhängig veränderlichen Größe für irgend einen einzelnen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen zusammenfallen, so fallen sie dann auch nothwendig für alle Verflußpunkte derselben zusammen, weil die Functionen y und $F(x)$ abgesehen von der Constanten identisch sind, und sie also nach Hinzufügung einer Constanten entweder für alle Verflußpunkte der willkürlich Ver-

änderlichen zusammenfallen müssen, oder für gar keinen zusammenfallen können.

Für irgend einen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x muß man also den Werth der durch y vorgestellten abhängig Veränderlichen wissen, und wir wollen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen, bei welchem dies stattfindet, allgemein a nennen. Den bekannten Werth, den die abhängig veränderliche Größe y hat bei dem Zahlenwerth a der willkürlich Veränderlichen, wollen wir in Ermangelung einer andern Bezeichnung darstellen durch $\overset{x=a}{y}$. Der Werth, in welchen das Integral F(x) übergeht, indem man in demselben a statt x substituirt, wird ausgedrückt durch F(a). Diese beiden bekannten Werthe $\overset{x=a}{y}$ und F(a) können, wenn sie nicht schon gleich sind, durch eine dem Werth F(a) zugesetzte Constante C gleich gemacht werden, und die so bestimmte Constante C ist dann allgemein die der Function F(x) zuzusetzende Constante. Man hat also die Gleichung $\overset{x=a}{y} = F(a) + C$, und folglich $\overset{x=a}{y} - F(a) = C$. Die etwa zuzusetzende Constante ist hiernach nie etwas Anderes, als der Werth, den die abhängig veränderliche Größe für einen bestimmten Zahlenwerth a der willkürlich Veränderlichen annimmt, weniger dem Werth, den das Integral für denselben Werth der willkürlich Veränderlichen annimmt. Man kann also bei jeder Integration die dem Integral zuzusetzende Constante auch gleich in bestimmter Gestalt einführen; und wenn F(x) das einer Function f(x) zugehörige Integral bedeutet, oder man die analytische Integralgleichung $\int f(x)\,dx = F(x)$ hat, so kann man aus der Differentialgleichung $dy = f(x)\,dx$ bilden

$$y = F(x) + \overset{x=a}{y} - F(a)$$

und alsdann ist die Constante allemal richtig bestimmt.

Am gewöhnlichsten kommt der Fall vor, daß man den Werth kennt, welchen die abhängig veränderliche Größe

für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt, oder wo unser $a = o$ ist, wie dies auch in dem Beispiel vom abgekürzten Kegel eintraf, wo man wußte, daß der Cubikinhalt des Kegels für den Nullwerth von x gleich Null war. In vielen Fällen trifft es sich aber auch, daß man für einen andern Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen den Werth der abhängig veränderlichen Größe aus der Natur dieser Größe unmittelbar bestimmen kann.

Es möge, um die Regel der Constantenbestimmung noch in einem Beispiel zur Anwendung zu bringen, hier die Auflösung einer der Rectification krummer Linien angehörigen Aufgabe folgen. Es sei die Curve afghl (Fig. 30) durch senkrechte Parallelcoordinaten nach der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ gebildet, wobei der Nullpunkt der Abscisse auf den Punkt a fallen muß, und das Abscissenstück $ab = 1$ gesetzt ist. Es soll die Länge eines beliebigen Stückes dieser krummen Linie durch die ihm zugehörige Abscisse ausgedrückt werden. Aus §. 53 wissen wir, daß der Differentialquotient der Curvenlänge und der Abscisse gegeben ist durch die Function $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ der Abscisse, wobei also, damit $\frac{dy}{dx}$ eine bekannte Function sei, die Coordinatengleichung der Curve gegeben sein muß. Da wir hier die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ haben, und also $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{9}{16}x$ ist, so erscheint die allgemeine Function $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ in unserm Falle in der Gestalt $\left(1+\frac{9}{16}x\right)^{\frac{1}{2}}$. Stellen wir nun durch L die unbekannte Function der Abscisse vor, welche die Curvenlänge angibt, so haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{dL}{dx} = \left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Function $\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{1}{2}}$ fällt ihrer Form nach zusammen mit der §. 72 integrirten Function $(a + bx)^m$, und es ist jener Regel gemäß

$$\int\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{16}} = \frac{32}{27} \cdot \left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Das Integral $\frac{32}{27}\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}}$ gibt, wie leicht zu sehen, die Curvenlänge nicht richtig an, weil es sich nicht bei fortgesetzter Verkleinerung der Zahl x der Null nähert, wie doch offenbar die Curvenlänge thut. Hier ist nun der Werth der abhängig veränderlichen Größe oder der Curvenlänge bekannt für den Nullwerth von x, und zwar ist er für diesen Werth von x selbst $= 0$. Das Integral $\frac{32}{27}\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}}$ wird für denselben Werth von x gleich $\frac{32}{27}$. Da nun die Constante gleich ist dem Werth der abhängig veränderlichen Größe weniger dem Werth des Integrals, beide für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen genommen, so ist sie in diesem Falle $= 0 - \frac{32}{27}$. Es folgt also aus der obigen Differentialgleichung

$$\frac{dL}{dx} = \left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \frac{32}{27}\left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{27}.$$

Im Punkte b z. B. ist der Zahlenwerth x der Abscisse $= 1$, und es ist also die zugehörige Curvenlänge

$$af = \frac{32}{27}\left(1 + \frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{27} = \frac{32}{27} \cdot \frac{125}{64} - \frac{32}{27} = 1\frac{7}{54}.$$

Hat im Punkt e die Abscisse den Zahlenwerth $3\frac{2}{3}$, so ist die zugehörige Curvenlänge

$$al = \frac{32}{27}\left(1 + \frac{9}{16}\cdot\frac{11}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{27} = 5\frac{1}{6}.$$

§. 75.

Beispiele, in welchen unendliche Potenzenreihen zu integriren sind.

Obgleich es natürlich unmöglich ist, jeden gegebenen Differentialquotienten in unveränderter Gestalt unmittelbar irgend einer analytischen Differentialgleichung anzupassen, um auf diese Weise die dem Differentialquotienten als abgeleiteter Function zugehörige ursprüngliche Function zu finden, so kann man doch für jede abhängig veränderliche Größe, deren Differentialquotient direct aufgefunden ist, einen gesetzmäßig gebildeten Ausdruck darstellen dadurch, daß man den Differentialquotienten in eine Reihe auflöst, deren einzelne Glieder man zu integriren im Stande ist. Eine jede algebraische Function Einer Veränderlichen insbesondere kann durch eine unendliche Potenzenreihe dieser Veränderlichen dargestellt werden, und man erhält also schon durch Anwendung der Integrationsregel einer Potenzfunction auf die einzelnen Glieder der Reihe einen gesetzmäßig verlaufenden Ausdruck für die abhängig veränderliche Größe, welcher entweder unmittelbar einen Näherungswerth dieser Größe gibt, oder in einen solchen umgeformt werden kann. Wir wollen dies Verfahren der Integration durch Reihen an einigen Beispielen erläutern, und uns der Einfachheit wegen auf solche Functionen beschränken, welche unmittelbar durch den binomischen Lehrsatz als Potenzenreihen der Veränderlichen erhalten werden.

1) Als erste Aufgabe dieser Art diene uns das berühmte Problem von der Quadratur des Kreises.

Wir denken uns die Fläche des Kreises, oder zunächst blos des Quadranten cai (Fig. 35) dadurch erzeugt, daß senkrecht auf dem Radius ca, welcher als Abscisse dienen

ſoll, die veränderliche Ordinate der Kreislinie fortrückt. Der Anfangspunkt der Abſciſſe falle in den Punkt c. Hat der Radius des Kreiſes den Zahlenwerth r, und das beliebige Abſciſſenſtück cd den Zahlenwerth x, ſo iſt die zugehörige Ordinate bd bekanntlich durch $\sqrt{r^2 - x^2}$ oder $(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ auszudrücken. Nach §. 49 fällt aber der Werth der Ordinate mit dem Werth des Differentialquotienten der Fläche und der Abſciſſe zuſammen, und wir haben alſo, wenn wir den veränderlichen Werth des Flächenſtücks durch F vorſtellen, die Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dx} = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun gibt es keine Function, durch deren Differentiation die Function $(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ erhalten würde; es bleibt uns daher, um den Flächeninhalt eines Stückes des Kreisquadranten zu finden, nichts übrig, als dieſe Function in eine Reihe von Potenzen der Zahl x zu verwandeln. Nun iſt nach dem binomiſchen Lehrſatz

$$(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = r - \frac{1}{2}r^{-1}.x^2 - \frac{1}{2.4}.r^{-3}.x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}.r^{-5}.x^6 - \ldots$$

$$(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = r - \frac{1}{2r}.x^2 - \frac{1}{2.4.r^3}.x^4 - \frac{1.3}{2.4.6.r^5}.x^6 - \ldots.$$

Folglich iſt

$$\frac{dF}{dx} = r - \frac{1}{2r}.x^2 - \frac{1}{2.4.r^3}.x^4 - \frac{1.3}{2.4.6.r^5}.x^6 - \ldots.$$

$$F = rx - \frac{1}{2r}.\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2.4.r^3}.\frac{x^5}{5} - \frac{1.3}{2.4.6.r^5}.\frac{x^7}{7} - \ldots.$$

Für den Nullwerth von x geht das gefundene Integral in Null über. Und da die durch Fortbewegung der Ordinate beſchriebene Fläche für den Nullwerth von x oder im Punkte c ebenfalls gleich Null iſt, ſo iſt keine Conſtante zuzuſetzen. Will man die Fläche des ganzen Quadranten cai finden, ſo braucht man nur x = r zu ſetzen, und erhält

$$F = r^2 - \frac{1}{2.3} \cdot r^3 - \frac{1}{2.4.5} \cdot r^3 - \frac{1.3}{2.4.6.7} \cdot r^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9} \cdot r^2 - \ldots$$

$$F = r^2\left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9} - \ldots\right)$$

und damit einen nach seinem unendlichen Verlauf vorgeschriebenen gesetzmäßigen Ausdruck, welcher durch das Zusammenzählen einer gehörigen Anzahl seiner Glieder den Flächeninhalt des Kreisquadranten mit jedem beliebigen Grad annähernder Genauigkeit darstellt.

2) Es soll die Länge eines Kreisbogens durch eine gerade Linie, von welcher sie abhängt, ausgedrückt, oder der Kreisbogen rectificirt werden. Wenn wir den Kreis durch senkrechte Parallelcoordinaten erzeugt dächten, so würde der Differentialquotient der Kreislinie und der Abscisse ebenso wie in dem Beispiel von der Rectification einer krummen Linie, welches in dem vorhergehenden Paragraphen gegeben ist, nach der Regel des §. 53 aufzustellen sein. Wir wollen aber, um zugleich eine directe Auffindung des Differentialquotienten damit zu verbinden, die Kreislinie nicht in ihrer Abhängigkeit von der Abscisse, sondern von einer andern geraden Linie betrachten. Ziehen wir an den Punkt b (Fig. 31) eine Tangente, so wird, wenn wir diese Tangente veränderlich setzen, und von ihrem jedesmaligen Endpunkt eine Linie nach dem Mittelpunkt des Kreises gezogen annehmen, einer jeden Größe bc der Tangente ein bestimmter Kreisbogen bd zugehören. Die Tangente soll als die willkürlich Veränderliche betrachtet werden. Der Radius des Kreises soll den Zahlenwerth 1 haben, und der veränderliche Zahlenwerth der Tangente möge x heißen. Der der Tangente $= x$ zugehörige Bogen wird bezeichnet durch Arc (tang $= x$). Läßt man die Tangente vom Punkt c aus wachsen um das Stück cg, so wächst der Bogen um das Stück de. Es ist also der Grenzwerth zu bestimmen, welchem sich der Quotient der Zunahmen de und cg bei fortgesetzter Verkleinerung ohne Ende nähert. Da die Zunahmen de und cg nicht leicht

direct auf einander bezogen werden können, so ziehe man mit dem Radius ac den Bogen cf als Hülfslinie. Die Bogen de und cf werden bei jeder beliebigen Größe von cg ein unveränderliches Verhältniß haben, und sich immer verhalten wie ad zu ac, oder wie 1 zu $\sqrt{1+x^2}$. Folglich wird auch immer der Differenzquotient $\frac{de}{cg}$ um so vielmal kleiner sein als der Quotient $\frac{cf}{cg}$, wie 1 kleiner ist als $\sqrt{1+x^2}$, und dasselbe wird natürlich auch von den Grenzwerthen dieser Quotienten gelten. Hat man also den Grenzwerth des Quotienten $\frac{cf}{cg}$ gefunden, so braucht man denselben nur durch $\sqrt{1+x^2}$ zu dividiren, um den Grenzwerth des Quotienten $\frac{de}{cg}$, oder den Differentialquotienten des Kreisbogens und seiner Tangente zu erhalten. Um den Grenzwerth des Quotienten $\frac{cf}{cg}$ zu bekommen, kann man nach §. 54 entweder die gleichmäßig Wachsenden aufsuchen, deren constante Stärke des Wachsens mit der im Punkte c vorhandenen momentanen Stärke des Wachsens der ungleichmäßig Wachsenden identisch ist, oder man kann ohne Weiteres zusehen, welchem Werth sich der Quotient $\frac{cf}{cg}$ bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen ohne Ende nähert. Wir wollen hier das letztere Verfahren anwenden. Bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen cg und cf nähert sich die Größe des Winkels agb der Gleichheit mit dem Winkel acb, und der Bogen cf zugleich einer geraden Linie, welche auf der nach der Lage von ac zurückgedrehten Linie ag senkrecht steht, oder das gemischtlinigte Dreieck cfg nähert sich ohne Ende einem rechtwinkligen Dreieck, welches mit dem Dreieck acb gleichwinklig und ihm folglich ähnlich ist. Beachtet man die ähnlichliegenden Seiten beider Drei-

ecke, so sieht man, daß der Quotient $\frac{cf}{cg}$ sich ohne Ende dem Quotienten $\frac{ab}{ac}$, oder der Function $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ nähert. Wird dieselbe als der Grenzwerth des Quotienten $\frac{cf}{cg}$ noch wie vorher gefordert, durch $\sqrt{1+x^2}$ dividirt, so erhalten wir in dem Ausdruck $\frac{1}{1+x^2}$ den Differentialquotienten des Bogens und seiner Tangente. Also ist

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}\,(\mathrm{tang} = x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da es keine Function gibt, aus welcher der Differentialquotient $\frac{1}{1+x^2}$ durch Differentiation erhalten werden kann, so wird derselbe, in der Form $(1+x^2)^{-1}$, nach dem binomischen Lehrsatz in eine Potenzenreihe von x verwandelt, und die Glieder der Reihe werden einzeln integrirt. Nun ist

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots.$$

Also ist

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}\,(\mathrm{tang} = x)}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots$$

$$\mathrm{Arc}\,(\mathrm{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$$

Da für den Nullwerth von x der Bogen gleich Null wird, und das gefundene Integral desgleichen, so ist keine Constante zuzusetzen. Gibt man der Tangente x einen solchen Zahlenwerth, daß der zugehörige Bogen ein bekannter aliquoter Theil der ganzen Kreislinie ist, so kann aus dem nach dieser Gleichung berechneten aliquoten Theil die Länge der ganzen Kreislinie bestimmt werden. Wäre z. B. die Tangente bg gleich dem Radius oder = 1, so wäre der Winkel gab = 45°, und der der Tangente = 1 zugehörige Bogen be der vierte Theil des Halbkreises oder gleich

dem vierten Theil der Zahl π. Also ist, wenn wir in obige Gleichung statt x den Zahlenwerth 1 setzen,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

eine Reihe, welche Leibnitz als eine der ersten Früchte seines neuen Calcüls erhielt, und die er im Jahre 1687 mit den Worten Virgils: Numero Deus impari gaudet bekannt machte. Sie heißt noch gegenwärtig kurzweg die Leibnitzische Reihe, und ist zwar in dieser Gestalt wegen ihrer schwachen Convergenz zur Berechnung der Zahl π wenig tauglich, kann aber durch einfache in allen Lehrbüchern der Analysis zu findende Verfahrungsweisen in eine stark convergirende umgeformt werden, aus welcher ein sehr genauer Näherungswerth der Zahl π ohne Mühe erhalten wird.

In so fern die Zahl π als bekannt angenommen wird, ist durch die obige für Arc (tang = x) gefundene Reihe die Aufgabe, aus dem Verhältniß der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks einen Winkel zu berechnen, allgemein gelöst. Denn die Zahl x, welche den Werth einer Tangente bc angibt für den Radius 1, fällt zusammen mit dem Bruch, den man erhält, wenn man den Werth der Kathete bc durch den Werth der andern Kathete ab dividirt. Setze ich also diesen Bruch statt x in die obige Reihe, so finde ich die Länge des Bogens bd für den Radius 1. Dieser Zahlenwerth des Bogens heiße B. Da nun die Zahl π die Länge des Halbkreises ausdrückt für den Radius 1, so gibt der Bruch $\frac{B}{\pi}$ an, der wievielte Theil des Halbkreises der Bogen bd ist. Der Winkel cab ist dann der ebenso vielte Theil von 180 Graden, oder der Winkel cab ist $= \frac{B}{\pi} . 180°$. Dividirt man, wenn die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben sind, die kleinere durch die größere, so ist der statt x in der obigen Reihe zu substituirende Bruch immer ein ächter, und die Reihe liefert allemal einen richtigen Näherungswerth,

und es kann also vermittelst derselben allgemein aus dem Verhältniß der beiden Katheten der der kleineren Kathete gegenüberliegende Winkel gefunden werden. Wäre z. B. die eine Kathete = 2 und die andere = 5, und führt man den unter dieser Annahme für den Bogen B geltenden Werth ein, so ist die Gradanzahl des der Kathete 2 gegenüberliegenden Winkels

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{2}{5}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^9 - \ldots}{3{,}141592.} \cdot 180$$

Eine solche Aufgabe wird freilich in der Anwendung nicht durch diese Reihe gelöst, weil sie da überhaupt nicht gelöst wird, sondern das Resultat nur aus den für diesen Zweck berechneten Tabellen, den trigonometrischen Tafeln, abgelesen wird.

3) Es soll die Länge eines Kreisbogens noch durch eine andere mit ihm gesetzmäßig zusammenhängende Grade, nämlich durch den Sinus des Bogens bestimmt werden. Der Zahlenwerth, welcher die Länge der Senkrechten de (Fig. 32) angibt für den Radius = 1, heißt bekanntlich der Sinus des Bogens bd. Wir wollen den Sinus als die willkürlich Veränderliche annehmen und durch x bezeichnen, und den zugehörigen Bogen durch Arc (sin = x). Lassen wir den Bogen bd wachsen um das Stück dg, so ist die zugehörige Zunahme des Sinus durch das Stück fg gegeben. Der Differentialquotient der beiden Veränderlichen wird angegeben durch den Quotienten der Zunahmen, welche die Veränderlichen angenommen haben würden, wenn sie mit der im Punkt d vorhandenen Stärke des Wachsens gleichmäßig wachsend fortgegangen wären, d. h. wenn die krumme Linie als gerade fortgegangen wäre, und zwar in der bestimmten Richtung, welche sie gerade im Punkt d hatte, also in der Richtung der Tangente dh. Also geben die Linien dh und fh an, wie die Zunahmen des Bogens und seines Sinus sich verhalten haben würden, wenn die im Punkt d vorhandene momentane Stärke des Wach-

sens zur Ausführung gekommen wäre. Man konnte auch so schließen: Die Linien, die auf ab senkrecht stehen und bis zur Tangente dh verlängert werden, können betrachtet werden als die Parallelordinaten der Tangente, und sind mit derselben gleichmäßig wachsend. Die constante verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Tangente und ihrer Ordinaten wird durch den Differenzquotienten $\frac{dh}{fh}$ gegeben. Daß nun die im Punkt d vorhandene momentane Stärke des Wachsens des Bogens und seines Sinus mit der constanten der Tangente und ihrer Ordinaten zusammenfällt, folgt daraus, daß bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen dg und fg die Linie dg immer mehr mit der Tangente dh zusammenfällt, und daß folglich das gemischtlinigte Dreieck fdg sich ohne Ende einem geradlinigten nähert, welches dem Dreieck fdh ähnlich ist. Mithin bildet das Verhältniß der Seiten dh und fh den Grenzwerth, welchem sich das Verhältniß der Zunahmen des Bogens und seines Sinus ohne Ende nähert, oder der Quotient $\frac{dh}{fh}$ ist gleich dem Differentialquotienten des Bogens und seines Sinus. Da das Dreieck fdh dem Dreieck ade ähnlich ist, so ist $\frac{dh}{fh} = \frac{ad}{ae}$. Nun ist nach Annahme die Linie $ad = 1$ und $de = x$, folglich $ae = \sqrt{1 - x^2}$. Also ist $\frac{ad}{ae} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, und diese Function von x ist der Differentialquotient des Bogens und seines Sinus. Wir haben also die Differentialgleichung

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}(\sin = x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Function $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ gehört ebenfalls zu denjenigen, welche nicht anders integrirt werden können, als nach ihrer Verwandlung in eine Potenzenreihe von x. Wird $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

in der Form $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ geschrieben, und nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so erhalten wir

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}.x^2+\frac{1.3}{2.4}.x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}.x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.x^8+\ldots.$$

Also ist

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}(\sin=x)}{dx}=1+\frac{1}{2}.x^2+\frac{1.3}{2.4}.x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}.x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.x^8+\ldots.$$

$$\mathrm{Arc}(\sin=x)=x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9}+\ldots$$

In so fern man, wie wir hier zunächst thun, den Sinus nur in dem ersten Quadranten betrachtet, wird für den Nullwerth von x sowohl der Bogen, welcher dem $\sin=0$ zugehörig ist, als das Integral gleich Null, und es ist keine Constante zuzusetzen. Diese Reihe, in welcher wieder ein Kreisbogen ausgedrückt erscheint durch eine mit ihm gesetzmäßig zusammenhängende Gerade, kann natürlich auf dieselbe zwiefache Weise wie die vorhergehende Reihe benutzt werden, erstens um die Länge eines bestimmten aliquoten Theiles der Kreislinie und folglich der ganzen Kreislinie zu berechnen, und zweitens um durch ein Seitenverhältniß eines rechtwinkligen Dreiecks einen Winkel desselben auszudrücken, was wir hier nicht weiter ausführen wollen.

§. 76.

Beispiel der Integration eines unentwickelten Differentialquotienten.

Die bisherigen Beispiele der Auffindung einer Function durch Integration waren alle von der Art, daß der auf directem Wege erhaltene Differentialquotient unmittelbar als eine entwickelte Function der willkürlich Veränderlichen sich darstellte. Man könnte leicht denken, daß sich dies immer so verhalten müßte. Es verdient aber auch an dieser Stelle schon im Allgemeinen wenigstens bemerkt zu werden, daß dies keineswegs der Fall ist. Denn sehr häufig tritt der Fall ein, daß der direct zu bestimmende Differentialquotient zweier Veränderlichen die unbekannte Fun-

ction, welche den Werth der abhängig Veränderlichen darstellen soll, selbst in sich schließt. Dieser Fall begründet ein eigenthümliches und wichtiges Gebiet der Integralrechnung. Es ist nun zwar nicht unsere Absicht, dies Gebiet zu betreten; aber wir wollen doch nicht unterlassen, durch ein Beispiel wenigstens es anschaulich zu machen, wie man auf diese unentwickelten Differentialquotienten geführt werden kann. Und wenn wir den so erhaltenen Differentialquotienten auch der Integration unterwerfen, so soll damit nur nachgewiesen werden, daß auch von der Integration solcher Formen die Rede sein kann, und daß dies eigenthümliche Gebiet der Integralrechnung, in welchem man übrigens bis jetzt nicht weit vorgedrungen ist, überhaupt vorhanden ist.

Wir wählen als solches Beispiel den Beweis eines allbekannten Satzes, des Pythagorischen Lehrsatzes, welcher wie alle Sätze der Elementargeometrie, die nicht blos die Ausdehnung, sondern auch die Art des Zusammenhanges der Größen bestimmen, durch die Differential- und Integralrechnung bewiesen werden kann. Wenn wir in einem rechtwinkligen Dreieck bcd (Fig. 33) die eine Kathete bc unveränderlich denken, und ihren Zahlenwerth durch a vorstellen, die beiden andern Seiten des Dreiecks aber veränderlich annehmen, so sind dieselben ungleichmäßig wachsende Größen. Die veränderliche Kathete sei die willkürlich Veränderliche, und habe den Zahlenwerth x. Die unbekannte Function von x, welche den Werth der Hypotenuse angibt, heiße y. Lassen wir die Kathete cd wachsen um das Stück de, so ist, wenn wir mit dem Radius bd den Bogen df beschreiben, die Zunahme von y durch das Stück fe gegeben. Der Grenzwerth, welchem sich der Differenzquotient $\frac{fe}{de}$ bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen ohne Ende nähert, ist leicht zu finden. Denn bei dieser Verkleinerung nähert sich die Größe des Winkels fed ohne Ende der Größe des Winkels bdc, und der

Bogen df einer geraden Linie, welche auf der in die Lage von bd zurückgedrehten Linie be senkrecht steht. Also nähert sich das gemischtlinigte Dreieck def ohne Ende einem rechtwinkligen Dreieck, welches mit dem Dreieck bcd gleiche Winkel hat, und ihm ähnlich ist. Denkt man sich das im Verschwinden des gemischtlinigten Dreiecks fde angestrebte rechtwinklige Dreieck zur Ausführung gekommen, so wird es seiner Gestalt und Lage nach zusammenfallen mit dem Dreieck dgh, in welchem die Linie gh mit der Linie bd parallel, und also der Winkel ghd dem Winkel bdc gleich ist. Das Verhältniß, welches die Zunahmen fe und de der Hypotenuse und der Kathete annehmen im Verschwinden, oder mit welchem sie verschwinden, ist also das Verhältniß der Linien gh und dh. Mithin ist der Quotient $\frac{gh}{dh}$, oder was dasselbe ist, der Quotient $\frac{cd}{bd}$ d. h. $\frac{x}{y}$ der Grenzwerth des Differenzquotienten $\frac{fe}{de}$, oder der Quotient $\frac{x}{y}$ ist der Differentialquotient der Hypotenuse y und der Kathete x. Wir haben also die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. Hier ist nun der Differentialquotient der durch y vorgestellten Function nicht blos als Function von x gegeben, sondern er schließt die unbekannte Function y selbst in sich.

In der vorliegenden Gestalt der Gleichung kann keine unserer Integrationsregeln unmittelbar darauf angewandt werden. Formen wir aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ um in $y\,\frac{dy}{dx} = x$, so ist zwar auch jetzt durch die auf der rechten Seite der Gleichung enthaltene Function nicht der Differentialquotient der Function y gegeben, aber doch, wie leicht zu sehen, der Differentialquotient einer Function der durch y vorgestellten Function. Beachtet man näm-

lich die Regel, gemäß welcher nach §. 68 der Differentialquotient einer Function einer Function von x gebildet wird, so sieht man, daß $y\frac{dy}{dx}$ der Differentialquotient der Function $\frac{y^2}{2}$ ist, oder daß $\frac{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{dx} = y\frac{dy}{dx}$ ist, in so fern y selbst als eine Function von x angesehen wird. Wir können also setzen

$$\frac{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{dx} = x.$$

Daß hier die unbekannte Function von x, deren Differentialquotient gegeben und $= x$ ist, nicht in Form eines einfachen Zeichens ausgedrückt ist, thut natürlich nichts zur Sache, und es folgt, indem $\frac{y^2}{2}$ als die abhängig Veränderliche betrachtet wird, die Gleichung

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Bei Bestimmung der Constanten C bedenke man, daß $\frac{x^2}{2}$ das erhaltene Integral, und $\frac{y^2}{2}$ die abhängig veränderliche Größe ist. Da für den Nullwerth der veränderlichen Kathete oder des x die Hypotenuse y gleich der unveränderlichen Kathete oder gleich a wird, so wird die abhängig veränderliche Größe $\frac{y^2}{2}$ für diesen Werth von x gleich $\frac{a^2}{2}$, und das Integral $\frac{x^2}{2}$ gleich Null. Folglich ist nach der allgemeinen Regel des §. 74 die Constante $C = \frac{a^2}{2} - 0$. Wir haben also

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}, \quad y^2 = x^2 + a^2$$

$$y = \sqrt{x^2 + a^2}$$

und damit die gesuchte Function der veränderlichen Kathete, welche den Werth der Hypotenuse angibt.

Man konnte bei der Umformung der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ vielleicht einfacher noch so verfahren. In so fern wir nämlich unter dy und dx Zahlenwerthe vorstellen, und zwar dann wie bekannt die Zahlenwerthe der hypothetischen Zunahmen, welche die ungleichmäßig Wachsenden y und x unter der Voraussetzung eines von dem Zahlenwerth x an eintretenden gleichmäßigen Wachsens angenommen haben würden, können wir die Nenner auf beiden Seiten der Gleichung wegschaffen, und aus $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ bilden $ydy = xdx$. Um zu wissen, welcher Größe wir das Integral von xdx, oder $\frac{x^2}{2}$, gleich zu setzen haben, müssen wir erst bestimmen, von welcher Größe der Ausdruck ydy das Differential ist. Nun ist aber (nach §. 68 oder auch §. 71, 3) ydy das Differential von $\frac{y^2}{2}$. Mithin kann man die Gleichung $ydy = xdx$ auch schreiben

$$d\left(\frac{y^2}{2}\right) = xdx$$

folglich

$$\frac{y^2}{2} = \int xdx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

wobei die Constante wie vorher zu bestimmen ist.

Endlich konnte man auch die Gleichung $ydy = xdx$ in der Form $ydy - xdx = 0$, oder in der Form $ydy - xdx = dC$ schreiben, indem man statt Null das Differential einer Constanten C setzt, und auf diese Gleichung unmittelbar die §. 71, 4 gegebene Integrationsregel anwenden, und hätte erhalten

$$\int y\,dy - \int x\,dx = C$$
$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C.$$

Es mag vorläufig hinreichen, die Möglichkeit der Entstehung unentwickelter Differentialquotienten an einem Beispiel nachgewiesen zu haben.

Fünftes Capitel.

Von den Functionen mit veränderlichen Exponenten und der Differentiation derselben.

§. 77.

Potenzfunctionen und Exponentialfunctionen im Allgemeinen.

Alle Functionen, welche bisher der Differentiation unterworfen worden sind, waren entweder Potenzen einer Veränderlichen mit constanten Exponenten, oder durch die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division gebildete Zusammensetzungen solcher Potenzen, oder Potenzen solcher Zusammensetzungen mit ebenfalls constanten Exponenten, und weitere ähnliche Zusammensetzungen dieser Formen. Das wesentlichste Kennzeichen derselben bildete die Unveränderlichkeit der Exponenten. Auf ein ganz neues noch unbetretenes Gebiet von Functionen kommen wir aber, sobald wir die Exponenten selbst als Veränderliche annehmen. Hierbei erhalten wir eine neue Fundamentalfunction, welche dann ebenso wie die Potenzfunction Grundlage unübersehlicher Zusammensetzungen wird. Diese neue Fundamentalfunction tritt als eine wesentliche und sich von selbst darbietende hervor, wenn wir auf die einfachste elementare Bildungsweise der Functionen einer Veränderlichen achten. Die einfachsten Arten von Functionen bilden sich offenbar, indem eine Veränderliche mit einer Constanten verknüpft wird durch irgend eine

Art der arithmetiſchen Operationen. Nun können zwei Größen arithmetiſch nur verknüpft ſein entweder als Theile, welche Verbindungsweiſe Addition und Subtraction zugleich umfaßt, oder als Factoren, unter welche Verbindungsweiſe Multiplication und Diviſion ſubſumirt werden können, oder endlich als Grundzahl und Exponent. In ſo fern eine Veränderliche x in der Form x^1 und eine Conſtante a in der Form ax^0 ſelbſt als Potenzen der Veränderlichen mit conſtantem Exponenten betrachtet werden können, und insbeſondere beim Differentiiren durchaus als ſolche genommen werden, ſo erſcheinen die durch die erſten vier Operationen hervorgebrachten Verbindungen einer Veränderlichen und einer Conſtanten ſchon als Zuſammenſetzungen von Potenzen einer Veränderlichen, und als die einzige ihnen zu Grunde liegende Elementarfunction tritt die Potenz mit conſtantem Exponenten, oder die Function x^a hervor. Welche von den beiden durch Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion verbundenen Größen als Veränderliche und welche als Conſtante genommen wird, iſt, in ſo fern ſie ſämmtlich nur als Potenzfunctionen angeſehen werden, für die Differentiation gleichgültig, und es ſind die Formen $x - a$ und $a - x$ oder $\frac{x}{a}$ und $\frac{a}{x}$ gleicherweiſe in den Regeln für Zuſammenſetzungen von Potenzfunctionen enthalten. Werden aber die Veränderliche und die Conſtante als Exponent und Grundzahl verbunden, ſo iſt dies nicht gleichgültig, und es unterſcheiden ſich dann, je nachdem die Grundzahl oder der Exponent als veränderlich angenommen wird, die beiden dadurch hervorgehenden Functionen x^a und a^x weſentlich von einander. Da nun überhaupt zwei Größen nicht anders arithmetiſch verknüpft ſein können, denn als Theile oder als Factoren oder als Grundzahl und Exponent, ſo laufen, wenn man die beiden erſten Arten arithmetiſcher Verknüpfung einer Veränderlichen und Conſtanten wie vorher bemerkt als Zuſammenſetzungen von Potenzen mit conſtantem Exponent betrachtet, alle Zu-

sammensetzungen einer Veränderlichen und einer Constanten auf die beiden Elementarfunctionen x^a und a^x zurück. In a^x haben wir also die bisher noch nicht betrachtete neue Elementarfunction einer Veränderlichen, welche ebenso die Grundlage für das nun Folgende bildet, wie es die Function x^a für das Vorhergehende war. Eine Potenz mit veränderlichem Exponenten nennt man auch eine Exponentialfunction, während die Potenz mit constantem Exponenten Potenzfunction schlechthin heißt.

Die beiden Functionen x^a und a^x haben das Gemeinschaftliche, daß Grundzahl und Exponent von einander unabhängig sind, oder daß eine Veränderung der Einen dieser Größen keine Veränderung der Anderen nach sich zieht. Ein wesentlich neuer Fortschritt über diese Functionen hinaus wird dadurch bezeichnet, daß Grundzahl und Exponent selbst in Abhängigkeit gesetzt erscheinen, wie z. B. in den Functionen x^x oder $(x^a)^{mx}$ oder $(a^x)^{x^2}$ und dergleichen mehr, welche sämmtlich unter der allgemeinen Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ begriffen werden können. Da für Functionen, in welchen zwei beliebige Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sind, die Regeln des Differentiirens in dem Vorhergehenden schon enthalten sind, so ist nur die Verbindung der Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ als Exponent und Grundzahl besonders zu behandeln, so wie denn überhaupt diese letztere Verbindungsweise einer Veränderlichen mit einer Constanten, oder einer Veränderlichen mit einer Veränderlichen, oder einer Function einer Veränderlichen mit einer solchen Function im Wesentlichen Alles in sich schließt, was außer den im Vorhergehenden aufgestellten allgemeinen Lehrsätzen von der Differentiation gegebener Functionen gesagt werden kann. Denn jede weitere Steigerung, bei welcher eine der als Exponent und Grundzahl verbundenen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ selbst wieder solche als Exponent und Grundzahl verbundene Functionen in sich enthielte,

kann dann bei der großen Geschmeidigkeit des Begriffes der Function auf eine wiederholte Anwendung der für die Function $[f(x)]^{\varphi(x)}$ geltenden Differentiationsregel zurückgebracht werden. Die Differentiation der Functionen mit veränderlichen Exponenten wird auch auf die der Function $[f(x)]^{\varphi(x)}$ führen, und also das ganze Gebiet der Differentiationsregeln gegebener Functionen umfassen.

Kehren wir jedoch zunächst zu unsern Functionen x^a und a^x zurück. Wir haben in jeder derselben drei Größen zu unterscheiden, nämlich die Grundzahl, den Exponenten und den Werth dieser Verbindung von Exponent und Grundzahl, oder die Potenz. In diesen Functionen ist nun immer nur eine Größe, entweder der Exponent oder die Grundzahl constant, und die beiden andern sind veränderlich. Da nun jede der beiden Veränderlichen als die willkürlich oder als die abhängig Veränderliche betrachtet werden kann, so sind in jeder dieser Functionen zwei Fälle zu unterscheiden. In der Function x^a, in welcher die Grundzahl und die Potenz die von einander abhängigen Veränderlichen sind, kann entweder die Grundzahl als die willkürlich Veränderliche und die Potenz als die abhängig Veränderliche genommen werden, welches man, in so fern y die abhängig Veränderliche vorstellt, durch die Gleichung $x^a = y$ bezeichnen würde, oder es kann umgekehrt die Potenz als die willkürlich Veränderliche und die Grundzahl als die abhängig Veränderliche genommen werden, welches man durch die Gleichung $y^x = x$ darstellen würde. Für beide Fälle mußte die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Veränderlichen x und y, oder der Werth des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ durch eine Function von x ausgedrückt werden. In dem einen Falle wollte man wissen, wie die Potenz wächst, oder vielmehr momentan bestrebt ist zu wachsen, bei einem gewissen Wachsen eines Bestandtheils derselben, nämlich der Grundzahl, und in

dem zweiten Falle wollte man wiſſen, wie der Beſtandtheil der Potenz beſtrebt iſt zu wachſen bei einem gewiſſen Wachſen des Werthes der Potenz ſelbſt. Die Unterſcheidung dieſer beiden Fälle war aber bei der Function x^a dadurch überflüſſig gemacht worden, daß die Regel der Differentiation einer Potenzfunction gleich allgemein für alle Arten von Exponenten gegeben worden war, wodurch der zweite Fall ohne Weiteres auf den erſten zurückgeführt werden konnte. Denn man brauchte nur, um aus der Gleichung $y^a = x$ den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ als Function von x darzuſtellen, die Gleichung $y^a = x$ in die Gleichung $y = x^{\frac{1}{a}}$ umzuformen, und hatte dann wieder die willkürlich Veränderliche als Grundzahl, nur mit gebrochenem Exponenten.

Es konnte auch, da hier die beiden Veränderlichen, die Potenz und die Grundzahl, nur ihre Rollen tauſchen als willkürlich Veränderliche und als abhängig Veränderliche, ohne von der Differentiationsregel für gebrochene Exponenten Gebrauch zu machen, aus der für die Gleichung $x^a = y$ geltenden Differentiationsregel die andere für die Gleichung $y^a = x$ geltende hergeleitet werden durch bloße Umkehrung des Bruches $\frac{dy}{dx}$, indem man ſeinen Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler macht, und demgemäß auch den Werth des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ verändert, und ihn als Function der nun angenommenen willkürlich Veränderlichen ausdrückt. Da dies zur Auffindung eines Differentialquotienten dienende Verfahren der Umkehrung in den Fällen, in welchen die willkürlich und abhängig Veränderliche ihre Rollen tauſchen, ein gleich in dieſem Capitel und in dem Folgenden öfter zur Anwendung kommendes, und zugleich ein ſehr einfaches und fruchtbares iſt, ſo wird es nützlich und lehrreich ſein, daſſelbe an unſerm

vorliegenden Beispiel nachzuweisen. Wir wollen von den drei Größen, die hier zur Sprache kommen, die Potenz durch P, die Grundzahl durch G und den Exponent durch E bezeichnen. Ist, wie in der Gleichung $x^a = y$, die Grundzahl die willkürlich Veränderliche, und die Potenz die abhängig Veränderliche, so sucht man bei der Differentiation den Differentialquotienten $\frac{dP}{dG}$ als Function der willkürlich Veränderlichen G. Da statt P gesetzt werden kann G^E, und bei veränderlichem G der Differentialquotient $\frac{dG^E}{dG} = E \cdot G^{E-1}$ ist, so hat man $\frac{dP}{dG} = E \cdot G^{E-1}$. Kehrt man nun den Bruch $\frac{dP}{dG}$ um, so erhält man $\frac{dG}{dP} = \frac{1}{E \cdot G^{E-1}}$. Da jetzt die Potenz P die willkürlich Veränderliche ist, so muß der Differentialquotient der Veränderlichen G und P als Function von P dargestellt werden, welches, weil $P = G^E$ und $P^{\frac{1}{E}} = G$ ist, dadurch bewerkstelligt wird, daß man $P^{\frac{1}{E}}$ statt G in den Werth des Differentialquotienten $\frac{dG}{dP}$ setzt. Wir erhalten also

$$\frac{dG}{dP} = \frac{1}{E \cdot P^{\frac{1}{E}(E-1)}} = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{P^{1-\frac{1}{E}}} = \frac{1}{E} \cdot P^{-\left(1-\frac{1}{E}\right)}$$

$$= \frac{1}{E} \cdot P^{\frac{1}{E}-1}.$$

Wenden wir die Gleichung $\frac{dG}{dP} = \frac{1}{E} \cdot P^{\frac{1}{E}-1}$, in welcher allgemein für eine willkürlich veränderliche Potenz und eine abhängig veränderliche Grundzahl die Differentiationsregel vorliegt, an auf die Gleichung $y^a = x$, auf welche sie unmittelbar paßt, so erhalten wir $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} x^{\frac{1}{a}-1}$, welches derselbe Differentialquotient ist, den wir nach Umformung der Gleichung $y^a = x$ in die Gleichung

$y = x^{\frac{1}{a}}$ gemäß der bekannten Differentiationsregel für gebrochene Exponenten bekommen hätten.

In der Function a^x sind die beiden von einander abhängigen Veränderlichen der Exponent und die Potenz. Es sind bei derselben auch zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem der Exponent als die willkürlich Veränderliche und die Potenz als die abhängig Veränderliche genommen wird, welches durch die Gleichung $a^x = y$ ausgedrückt sein soll, oder jenachdem das Umgekehrte stattfindet, welches durch die Gleichung $a^y = x$ dargestellt sein mag. In beiden Fällen kann nach der momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen gefragt werden. Man kann fragen, wie würde die Potenz wachsen bei einem gewissen Werth und einer beliebigen Zunahme des Exponenten, wenn die bei diesem Werth des Exponenten vorhandene momentane Stärke des Wachsens zur Ausführung käme, oder man kann fragen, wie würde bei einem gewissen Werth und einer beliebigen Zunahme der Potenz der Exponent wachsen unter der Voraussetzung eines bei diesem Werth der Potenz eintretenden gleichmäßigen Wachsens. Es ist also, wenn wir die beiden Veränderlichen, die Potenz und den Exponenten, durch P und E vorstellen, sowohl der Differentialquotient $\frac{dP}{dE}$ als auch der Differentialquotient $\frac{dE}{dP}$ zu entwickeln.

Die Functionen mit veränderlichem Exponenten gehören zu denjenigen, welche man transcendente Functionen nennt. Die Bestimmung des Begriffs einer transcendenten Function ist so verschieden gegeben worden, daß dieser Begriff bisher etwas sehr Schwankendes behalten hat. Bald nimmt man als wesentliches Kennzeichen einer transcendenten Function von x die Eigenschaft derselben, nur durch eine unendliche Wiederholung von mit der Zahl x vorzunehmenden Operationen und nicht in einem geschlosse-

nen Ausdruck sich darstellen zu lassen, bald die Eigenschaft der Function, unendlich viele Werthe zu haben für einen bestimmten Werth von x, wie z. B. der Bogen zu einem Sinus = x oder die Function Arc (sin = x) für denselben Werth von x unendlich viele Werthe hat, bald noch andere Eigenschaften derselben. Oder wenn man gar nicht mehr weiß, was transcendente Functionen sind, so verlegt man den Unterschied des Algebraischen und Transcendenten in die Operationen statt in die Functionen, und bezeichnet die algebraischen Functionen als solche, in denen die veränderliche Größe nur algebraischen Operationen unterworfen wird, und die transcendenten als solche, in welchen die veränderliche Größe transcendenten Operationen unterworfen wird; wobei man nur eine Kleinigkeit vergißt, nämlich zu sagen, was denn transcendente Operationen sind. Was für eine Operation ist es denn z. B., welcher in der transcendenten Function a^x die Veränderliche x unterworfen ist? Ist überhaupt hierbei x einer Operation unterworfen oder ist a einer durch x bestimmten Operation unterworfen? Wenn sin x eine transcendente Function von x ist, so fragt man, welcher Operation ist x dabei unterworfen. Stellt man den Sinus der Zahl x dar in der gewöhnlichen Form, so erscheint er als eine Potenzenreihe von x. Da nun in der Function sin x die Zahl x blos algebraischen Operationen unterworfen ist, so ist diese Function vielmehr eine algebraische. Es bliebe dann nichts übrig, als die ganze Folge von algebraischen Operationen, welchen in der Function sin x die Zahl x unterworfen ist, selbst eine Operation zu nennen, und sie für eine von den transcendenten Operationen auszugeben. Auf diese Weise könnte man jede beliebige algebraische Function, in so fern man den in ihr enthaltenen Complex von Operationen selbst als eine bestimmte Operation betrachtet, mit einem besonderen Namen belegen, und sie für eine transcendente Operation ausgeben, wobei man denn außer dem Unterschied des Algebraischen und Transcendenten auch noch den

Unterschied von Operationen und Functionen verloren hätte. Denn sin x z. B. wäre nun als eine Potenzenreihe von x mit constanten Exponenten, erstens eine algebraische Function, zweitens auch, diese ganze Folge von Operationen als eine transcendente Operation betrachtet, eine transcendente Function, und dadurch zugleich auch eine Operation und eine Function, und überhaupt Alles mit einemmale.

Daß bei solchen Begriffsbestimmungen, wie die oben angegebenen, in der Darstellung der Eigenschaften der Functionen auf diese Eintheilung derselben in algebraische und transcendente dann weiter gar keine Rücksicht genommen wird, und sich Alles so verhält, als wüßte man nichts von dieser Eintheilung, versteht sich von selbst. Aber auch angenommen, man hätte eine scharf bestimmte Eigenschaft, durch welche diese Classen von Functionen unterschieden wären, so wäre diese Eintheilung doch so lange noch unnütz, als die in eine Classe vereinigten Functionen sich nicht auch noch in anderen Beziehungen als verbundene und zusammengehörige zeigten. Denn eine jede Eintheilung hat nur dadurch Zweck und Bedeutung, daß die durch dieselbe geschiedenen Gruppen von Dingen außer dem Eintheilungsmerkmal auch noch durch andere Eigenthümlichkeiten geschieden sind. Wo sollen aber bei diesen Gruppen der algebraischen und transcendenten Functionen die andern gemeinschaftlichen unterscheidenden Eigenthümlichkeiten herkommen, da sie nicht einmal Eine haben, durch welche sie streng bezeichnet wären. Wir meinen nun nicht, daß diesen Versuchen zur Unterscheidung der Functionen nicht etwas Wesentliches zu Grunde liege; vielmehr scheinen sie hervorgerufen durch die richtige Ahnung eines in der That wesentlichen Unterschiedes. Auch würde man, wenn man nur eine zufällige und willkürliche Eintheilung hätte bewerkstelligen wollen, um ein äußerliches festes Unterscheidungsmerkmal nicht verlegen gewesen sein. Aber es ist bisher noch nicht gelungen, den Hauptpunkt zu treffen, auf

welchen es bei Eintheilungen der Functionen ankommt. Wenn man nichts desto weniger eine Eintheilung der Funtionen haben will, so wäre wohl vorläufig das Gerathenste, sie nach der Beständigkeit oder Veränderlichkeit der Exponenten zu unterscheiden, und die Ersteren etwa algebraische und die Zweiten transcendente Functionen zu nennen, denen dann die Formen x^a und a^x als Fundamentalfunctionen zu Grunde lägen, jedenfalls aber vor allen Dingen die eigenthümliche Art der arithmetischen Zusammensetzung ins Auge zu fassen. Eine durch ein bloßes Wort bezeichnete Function, wie sin x, cos x, würde, so lange sie noch nicht durch Angabe der mit der Zahl x vorzunehmenden arithmetischen Operationen als wirkliche Function von x gegeben ist, zu gar keiner Klasse gehören. Und wenn man den Unterschied der algebraischen und transcendenten Functionen auf die Beständigkeit oder Veränderlichkeit der Exponenten basirte, so würde der Sinus von x, da er in zwei Formen dargestellt werden kann, in deren Einer x als Grundzahl für constante Exponenten, und in deren Anderer x als Exponent für eine constante Grundzahl erscheint, bald durch eine algebraische und bald durch eine transcendente Function von x gegeben sein. Man würde dann die wichtigen Umformungen der Exponentialfunctionen in Potenzfunctionen und die umgekehrte Umformung als Verwandlung einer transcendenten Function in eine algebraische und umgekehrt zu bezeichnen haben. Doch lassen wir diese Untersuchungen zunächst auf sich beruhen; wir haben der Benennung transcendenter Function hier nur Erwähnung gethan, um uns darüber zu rechtfertigen, daß wir auf diese Eintheilung, die uns bei der gewöhnlichen Fassung für die Entwickelung der Eigenschaften der Functionen ganz bedeutungslos erscheint, weiter keine Rücksicht nehmen.

§. 78.

Differentiation der Exponential-function a^x.

In der Function a^x sind der Exponent x und die Potenz a^x die ungleichmäßig wachsenden Größen. Es ist hierbei anzumerken, daß die Grundzahl a immer positiv zu denken ist, sobald die Function a^x mit stetig wachsendem Exponenten einen allerwärts möglichen veränderlichen Werth haben soll. Denn da die wachsende Zahl x auch die Werthe von Brüchen annimmt, deren Nenner eine gerade Zahl ist, und in diesem Falle eine Wurzel aus a zu ziehen wäre, welche für eine negative Grundzahl unmöglich ist, so muß, wenn a^x nur reelle Werthe haben soll, die Zahl a positiv gedacht werden. Um die bei einem gewissen Werthe der Zahl x stattfindende momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen zu bestimmen, verfahren wir der früher angegebenen allgemeinen Regel gemäß so, daß wir zuerst die willkürlich veränderliche Zahl x um einen beliebigen Zahlenwerth k wachsend annehmen, die damit verbundene Zunahme der abhängig Veränderlichen a^x ausdrükken, dann den Quotient dieser Zunahmen bilden, und zusehen, in welchen Grenzwerth derselbe übergeht bei Annullirung der Zunahme k. Wenn der Exponent x um k wächst, verwandelt sich die Function a^x in $a^{(x+k)}$, welches bekanntlich gleich $a^x . a^k$ ist. Ziehen wir hiervon die ursprüngliche Function a^x ab, so erhalten wir $a^x . a^k - a^x$ oder $a^x . (a^k - 1)$ als die mit der Zunahme k des Exponenten verbundene Zunahme der Function a^x. Diese Zunahme der Function dividirt durch die Zunahme k der willkürlich Veränderlichen gibt uns den Differenzquotienten, welcher also hier $= \frac{a^x(a^k - 1)}{k} = a^x\left(\frac{a^k - 1}{k}\right)$ ist.

Wenn wir fragen, in welche Function von x dieser Differenzquotient übergeht für ein annullirtes k, so sehen wir gleich, daß derselbe in der vorliegenden Gestalt zur Beantwortung dieser Frage nicht tauglich ist. Er besteht aus zwei Factoren, von welchen der Eine a^x kein k enthält,

und also bei Veränderung des k und Annullirung desselben unverändert bleibt, und von welchen der Andere $\frac{a^k-1}{k}$ keinen bestimmten Grenzwerth liefert. Denn für ein annullirtes k wird $a^k = a^0 = 1$, und mithin geht in dem Ausdruck $\frac{a^k-1}{k}$ Zähler und Nenner zugleich in den Nullwerth über, wodurch der Grenzwerth dieses Ausdrucks zwar nicht gleich Null, aber doch unbestimmt und nichtssagend wird. Nichtsdestoweniger müssen die ungleichmäßig Wachsenden x und a^x für jeden Werth des x eine bestimmte momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens, und folglich auch einen bestimmten durch irgend eine Verbindung von a und x ausdrückbaren Differentialquotienten haben. Und da die durch Veränderung der Zahl k hervorgebrachte Veränderung des Differenzquotienten nur den in demselben enthaltenen Factor $\frac{a^k-1}{k}$ treffen kann, so muß dieser Factor einen bestimmten Grenzwerth haben, und derselbe wird, als nothwendig unabhängig von der Größe der Zunahme k, nur eine Function der Constanten a sein können. Es handelt sich also nur darum, den Ausdruck $\frac{a^k-1}{k}$ so umzuformen, daß sein Grenzwerth für ein annullirtes k nicht ins Unbestimmte zerrinne. In so fern wir nicht andere entfernt liegende Lehrsätze der Analysis zu Hülfe nehmen wollen, bleibt uns kein anderes Mittel, als die Potenz a^k umzuformen, und in einer Reihe darzustellen. Da wir durch den hier allein vorausgesetzten binomischen Lehrsatz nur eine zweitheilige Größe in eine Potenzenreihe entwickeln können, so müssen wir dem a, ohne seinen Werth zu ändern, die Form einer zweitheiligen Größe geben. Man könnte statt a etwa setzen $1 + a - 1$, und 1 als den ersten und $a - 1$ als den zweiten Theil des Binoms betrachten, und dann würde die Reihe, welche die Entwickelung des Ausdrucks $[1 + (a - 1)]^k$ gibt, der Form a^k gleich zu setzen sein.

Da aber hierbei eine nach den aufsteigenden Potenzen des zweiten Theiles des Binoms oder der Größe $(a-1)$ geordnete Reihe entstehen würde, und diese nur dann einen zur Berechnung brauchbaren Werth liefert, wenn $(a-1)$ ein ächter Bruch, also a kleiner als 2 ist, so wollen wir, obgleich auch die so erhaltene Form als Grundlage weiterer Schlüsse gebraucht werden könnte, und mittelst derselben ein für alle Werthe von a brauchbarer Werth der Function von a sich bilden ließe, es doch vorziehen, gleich bestimmte zur Berechnung unmittelbar brauchbare Formen für den Grenzwerth des Ausdrucks $\frac{a^k-1}{k}$ aufzustellen. Wir brauchen nur die zwei Fälle zu unterscheiden, ob a größer oder kleiner als 1 ist.

Angenommen a sei kleiner als 1, so ist $1-a$ ein ächter Bruch; und da $1-(1-a)$ gleich a ist, so kann $[1-(1-a)]^k$ statt a^k gesetzt werden. Nun ist

$$[1-(1-a)]^k = 1-k(1-a)+\frac{k(k-1)}{1.2}(1-a)^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}(1-a)^3+\ldots.$$

$$a^k-1 = -k(1-a)+\frac{k(k-1)}{1.2}(1-a)^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}(1-a)^3+\ldots.$$

$$\frac{a^k-1}{k} = -(1-a)+\frac{k-1}{1.2}(1-a)^2 - \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}(1-a)^3+\ldots.$$

Für ein annullirtes k geht die rechte Seite dieser Gleichung über in die unendliche Reihe $-(1-a)-\frac{1}{2}(1-a)^2 - \frac{1}{3}(1-a)^3-\frac{1}{4}(1-a)^4-\ldots.$, welche die den Grenzwerth des Ausdrucks $\frac{a^k-1}{k}$ darstellende gesuchte Function

von a ist, und welche, da (1 — a) ein ächter Bruch ist, convergirt, und bei bestimmtem a auch einem ganz bestimmten Zahlenwerth gleich ist. Setzen wir demnach in den oben für die Function a^x erhaltenen Differenzquotienten $a^x\left(\frac{a^k-1}{k}\right)$ statt $\frac{a^k-1}{k}$ seinen nun gefundenen Grenzwerth, so erhalten wir den Differentialquotienten der Function a^x. Wir haben also für ein a, welches kleiner als 1 ist, die Differentialgleichung

$$\frac{da^x}{dx}=a^x\left[-(1-a)-\frac{1}{2}(1-a)^2-\frac{1}{3}(1-a)^3-\frac{1}{4}(1-a)^4-\ldots\right].$$

Daß die in Klammern stehende Reihe unter der Voraussetzung, daß a kleiner als 1 ist, einen negativen Werth hat, und folglich auch der Differentialquotient immer negativ bleibt, mußte man erwarten, weil in diesem Falle die höheren Potenzen von a immer kleiner werden, und also bei wachsendem x der Werth der Function a^x immer abnimmt, wodurch bekanntlich ein negativer Differentialquotient bedingt ist.

Nehmen wir zweitens an, daß a größer als 1 sei, so müssen wir auch hier a in Form einer zweitheiligen Größe, deren zweiter Theil ein ächter Bruch ist, zu schreiben suchen. Nun ist zunächst $\frac{a-1}{a}$ ein ächter Bruch. Ziehen wir denselben von 1 ab, so ist $1-\frac{a-1}{a}$ zwar nicht gleich a, aber doch, wie durch Ausführung der Subtraction leicht zu sehen, gleich $\frac{1}{a}$. Da nun aber $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}=a$ ist, so ist auch $\left[1-\frac{a-1}{a}\right]^{-1}=a$. Wir können also statt a^k auch $\left[1-\frac{a-1}{a}\right]^{-k}$ setzen. Wird dieser Ausdruck nach dem binomischen Lehrsatz in eine Reihe entwickelt, so erhält man

$$\left(1-\frac{a-1}{a}\right)^{-k} = 1 + k\left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{k(k+1)}{1.2}\left(\frac{a-1}{k}\right)^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots.$$

$$a^k - 1 = k\left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{k(k+1)}{1.2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots.$$

$$\frac{a^k-1}{k} = \frac{a-1}{a} + \frac{k+1}{1.2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{1.2.3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots.$$

Bei Annullirung der Zunahme k geht die rechte Seite dieſer Gleichung in die Reihe

$$\left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots$$

über; dieſe iſt demnach die geſuchte Function von a, welche den Grenzwerth des Ausdrucks $\frac{a^k-1}{k}$ gibt, und welche als eine convergirende Reihe einen beſtimmten Zahlenwerth liefert. Dieſe Reihe alſo ſtatt $\frac{a^k-1}{k}$ in den Differenzquotienten der Function a^x eingeſetzt, erhalten wir für den Fall, daß a größer als 1 iſt, die Differentialgleichung

$$\frac{da^x}{dx} = a^x\left[\left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \ldots\right]$$

Daß dieſer Differentialquotient poſitiv ausfallen mußte, verſteht ſich von ſelbſt, da bei der nun über den Werth von a gemachten Vorausſetzung mit wachſendem Exponenten x auch die Function a^x wachſen muß.

Man ſieht alſo allgemein, daß der Differentialquotient der Function a^x immer nichts weiter iſt, als die Function a^x ſelbſt multiplicirt mit einem durch die conſtante Grundzahl a völlig beſtimmten Zahlenwerth. Bezeichnen wir denſelben, als eine Function der Grundzahl a, der Kürze wegen vorläufig immer durch $\psi(a)$, ſo haben wir

$$\frac{d\,a^x}{dx} = a^x \,.\, \psi(a).$$

Unsere neue Fundamentalfunction a^x befolgt demnach in Betreff der Veränderung ihrer momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens ein sehr einfaches Gesetz. Denn die Stärke des Wachsens nimmt zu in demselben Maße als die Function selbst zunimmt. Ist der Werth der Function doppelt oder dreimal so groß, so ist auch die Stärke des Wachsens doppelt oder dreimal so groß, und s. w.

§. 79.

Differentiation der logarithmischen Function.

Wir haben bei unserer Function, welche durch die Beständigkeit der Grundzahl und durch die Veränderlichkeit der Potenz und des Exponenten bezeichnet ist, noch den umgekehrten Fall zu betrachten, in welchem die Potenz die willkürlich Veränderliche und der Exponent die abhängig Veränderliche ist, und die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens derselben zu bestimmen. Dies ist außerordentlich leicht, und kann eigentlich ohne Weiteres durch eine bloße Betrachtung der vorhergehenden Regel erschlossen werden. Denn da in dem Falle, als die Potenz die abhängig Veränderliche ist, der Differentialquotient, den man sich als einen wirklichen Bruch denken mag, dessen Zähler und Nenner die hypothetischen Zunahmen der Potenz und des Exponenten sind, im directen Verhältniß zur Potenz steht, so wird der umgekehrte Bruch im indirecten Verhältniß zu derselben stehen, für eine doppelt so große Potenz halb so groß sein und s. w. Heißt die Potenz als willkürlich Veränderliche x, so wird der Differentialquotient des Exponenten und der Potenz gleich sein $\frac{1}{x}$ multiplicirt mit dem durch die Grundzahl a bestimmten Factor, welcher ebenfalls $\frac{1}{\psi(a)}$ sein muß. Man kann dies äußerlich handgreiflicher so darthun. Bezeichnen wir die Potenz durch

P, den Exponent durch E, und die Grundzahl durch G, ſo iſt, wenn G conſtant, P die abhängig Veränderliche und E die willkürlich Veränderliche iſt, gemäß der vorher gefundenen Gleichung $\frac{da^x}{dx} = a^x . \psi(a)$ jetzt

$$\frac{dP}{dE} = G^E . \psi(G).$$

Durch Umkehrung dieſes Bruches erhalten wir

$$\frac{dE}{dP} = \frac{1}{\psi(G) . G^E}.$$

Da P jetzt die willkürlich Veränderliche iſt, ſo muß der Differentialquotient von E und P als Function von P gegeben ſein; und dies kann man, weil P ſelbſt gleich G^E iſt, ſchon dadurch erreichen, daß man in dem Differentialquotienten P ſtatt G^E ſetzt. Man hat alſo

$$\frac{dE}{dP} = \frac{1}{\psi(G)} \cdot \frac{1}{P}.$$

Nennen wir nun wieder die Potenz als die willkürlich Veränderliche x, und den Exponent y, ſo können wir nach dem Schema der vorſtehenden Differentialgleichung aus der Gleichung $a^y = x$ bilden die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\psi(a)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Nun nennt man den Exponent y, auf deſſen Potenzgrad eine Grundzahl a erhoben werden muß, um die Zahl x hervorzubringen, den Logarithmus der Zahl x für die Baſis a. Mithin kann, wenn wir den Logarithmus der Zahl x für eine beliebige Baſis a jetzt durch log x bezeichnen, die letztgefundene Differentialgleichung auch geſchrieben werden

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{\psi(a)} \cdot \frac{1}{x}.$$

In dieſer Gleichung haben wir nun die Regel zur Bildung des Differentialquotienten der noch unbekannten Function log x, ſobald die Baſis a des logarithmiſchen Syſtems gegeben iſt oder beliebig angenommen werden kann.

Dieſer Differentialquotient iſt, da er nicht durch Differentiation einer gegebenen Function erhalten worden iſt, als ein direct aufgefundener zu betrachten.

Hiermit ſind nun die Differentiationsregeln vollſtändig gegeben für alle Fälle der einfachen Fundamentalfunction, welche dadurch entſteht, daß eine Veränderliche und eine Conſtante als Exponent und Grundzahl verbunden ſind, mag nun bei veränderlicher Grundzahl dieſe die willkürlich Veränderliche ſein, wie in der Gleichung $x^a = y$, oder die abhängig Veränderliche, wie in $y^a = x$, oder mag bei veränderlichem Exponent dieſer die willkürlich Veränderliche ſein, wie in der Gleichung $a^x = y$, oder die abhängig Veränderliche, wie in $a^y = x$.

§. 80.

Entwickelung der logarithmiſchen Function.

In dem Differentialquotienten der Function log x, welcher für eine Baſis a durch die Function $\frac{1}{\psi(a)} \cdot \frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{\psi(a)} \cdot x^{-1}$ gegeben iſt, erhalten wir endlich die Potenzfunction von x mit dem Exponent -1 als Differentialquotient; wir wiſſen, daß dieſe die einzige Potenzfunction von x iſt, welche nicht aus einer andern Potenzfunction von x durch Differentiation entſtanden ſein konnte, weil ſie allein dem allgemeinen Schema des Differentialquotienten einer beliebigen Potenzfunction x^m, oder dem Ausdruck mx^{m-1}, nicht angepaßt werden konnte. Wir ſehen jetzt, daß die Function x^{-1} als Differentialquotient nur erhalten wird, wenn die Potenz die willkürlich Veränderliche, und der dieſer Potenz zugehörige Exponent einer conſtanten Grundzahl die der Differentiation unterworfene Function iſt. Die Function x^{-1} als Differentialquotient oder als abgeleitete Function führt demnach immer auf einen Logarithmus als urſprüngliche Function zurück.

Da wir den Differentialquotienten der Function log x

nicht durch Differentiation dieser Function als einer gegebenen, sondern auf anderem Wege erhalten haben, so können wir aus demselben die unbekannte Function $\log x$ durch Integration herleiten. Wenn man die Gleichung $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{\psi(a)} . x^{-1}$ oder die Gleichung $\frac{d\psi(a).\log x}{dx} = x^{-1}$ gewöhnlich schon als die Integrationsregel der Function x^{-1} enthaltend ansieht, weil durch dieselbe der Differentialquotient x^{-1} auf einen Logarithmus von x mit beliebiger Basis als ursprüngliche Function zurückgebracht werden kann, so ist damit natürlich nur in so fern etwas gesagt, als man entweder die Function $\log x$ schon kennt, oder bei dieser Integration ein bloßes Resultat der Anwendung erzielt, wobei einem freilich damit, daß man das Integral als Logarithmus weiß, hinlänglich gedient sein kann, weil man nun, ohne das Integral zu berechnen, den Werth desselben aus den für die Logarithmen entworfenen Tabellen ablesen kann. Im Grunde genommen haben wir die Function x^{-1} jetzt so wenig integriren gelernt als vorher. Und wenn wir sie nun wirklich integriren, so kann es nur durch Mittel geschehen, die auch vorher in unserer Gewalt waren, nämlich durch Entwickelung der Function in eine unendliche Potenzenreihe. Wir haben sie nur vorher nicht integrirt, weil das Interesse dazu nicht vorhanden war. Da wir aber jetzt wissen, daß das aus der Integration der Function $\frac{1}{\psi(a)} . x^{-1}$ abzuleitende Integral eine wichtige Function von x, nämlich der Logarithmus der Zahl x für die Basis a ist, so entsteht natürlich die Frage nach der Gestalt und Zusammensetzung dieser Function. Aus der Gleichung $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{\psi(a)} . x^{-1}$ erhalten wir

$$\log x = \int \frac{1}{\psi(a)} . x^{-1} \, dx = \frac{1}{\psi(a)} \int x^{-1} \, dx.$$

Man könnte nun das Integral $\int x^{-1} \, dx$ wieder dadurch finden, daß man die Zahl x in Form einer zweitheiligen

Größe ſchriebe, ſtatt x etwa ſetzte $1+x-1$, und $x-1$ als den zweiten Theil des Binoms betrachtete. Den Ausdruck $[1+(x-1)]^{-1}$ kann man durch Hülfe des binomiſchen Lehrſatzes in eine Reihe entwickeln, welche die aufſteigenden Potenzen der Größe $(x-1)$ enthält. Und indem man dieſe Potenzen von $(x-1)$ einzeln integrirt nach Anleitung des §. 72, erhält man wieder eine Potenzenreihe der Größe $(x-1)$, welche mit dem aus der Baſis a auf die ſchon bekannte Weiſe zu berechnenden Factor $\frac{1}{\psi(a)}$ multiplicirt, den Logarithmus der Zahl x angibt. Die auf dieſe Weiſe durch eine Potenzenreihe von $(x-1)$ ausgedrückte Function wäre natürlich zunächſt in dieſer Geſtalt nicht für alle Werthe der Zahl x, ſondern nur für Werthe innerhalb enger Grenzen zur Berechnung tauglich. Und obgleich ſie, als Grundlage weiterer Umformungen benutzt, in eine für alle Werthe von x brauchbare Reihe übergeführt werden kann, wie in den Lehrbüchern der Analyſis überall zu finden, ſo wollen wir doch ein einfacheres Verfahren einſchlagen.

Da der Logarithmus einer beliebigen Zahl x bald poſitiv und bald negativ iſt, jenachdem x größer oder kleiner als 1 iſt, ſo wird man den einfachſten Ausdruck für den Logarithmus erhalten, wenn man die veränderliche Zahl nicht vom Nullwerth, ſondern vom Zahlenwerth 1 aus entweder wachſen oder abnehmen läßt, oder wenn man die logarithmiſche Function für die Zahlen $1+x$ oder $1-x$ aufſtellt, in welchen Fällen die Logarithmen entweder nur poſitiv oder nur negativ ausfallen. Um aber die Function $\log(1+x)$ durch Integration zu finden, müſſen wir erſt noch den Differentialquotienten derſelben aufſtellen. Betrachtet man, wie es geſtattet iſt, $1+x$ als eine Function von x, ſo iſt $\log(1+x)$ eine Function einer Function von x. Der Differentialquotient der Function $\log(1+x)$ in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche kann alſo nach §. 67 gefunden werden, und zwar ſo, daß

man zuerst $1+x$ als eine willkürlich Veränderliche betrachtet, und bezüglich auf diese willkürlich Veränderliche den Differentialquotienten der Function $\log(1+x)$ nimmt, welcher nach der Regel des vorhergehenden Paragraphen $\frac{1}{\psi(a)} \cdot \frac{1}{1+x}$ ist, und denselben multiplicirt mit dem Differentialquotienten der Function $1+x$ bezüglich auf x als willkürlich Veränderliche, welcher gleich 1 ist. Also ist

$$\frac{d\log(1+x)}{dx} = \frac{1}{\psi(a)} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\psi(a)} \cdot (1+x)^{-1},$$

folglich $\log(1+x) = \frac{1}{\psi(a)} \int (1+x)^{-1}\, dx.$

Wird $(1+x)^{-1}$ vermittelst des binomischen Lehrsatzes in die Form einer Potenzenreihe von x gebracht, so hat man

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

Die ursprüngliche Function, aus welcher diese Potenzenreihe und folglich auch die Function $(1+x)^{-1}$ durch Differentiation entstanden ist, ist also die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \text{ oder es ist}$$

$$\int (1+x)^{-1}\, dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

und $\log(1+x) = \frac{1}{\psi(a)} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$

Der Werth der abhängig veränderlichen Größe $\log(1+x)$ ist bekannt für den Nullwerth von x, weil der Logarithmus von 1 immer $= 0$ ist. Da nun das gefundene Integral für den Nullwerth von x auch gleich Null wird, so ist keine Constante zuzusetzen.

Die Entwickelung der Function $\log(1-x)$ kann aus der für $\log(1+x)$ gefundenen eigentlich ohne Weiteres entnommen werden, weil man weiß, daß die Veränderung des Vorzeichens von x auf die Vorzeichen der geraden Potenzen von x ohne Einfluß ist, und die Vorzeichen der ungeraden Potenzen von x in die entgegengesetzten verwandelt. Man erhielte also

$$\log(1-x) = \frac{1}{\psi(a)}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right]$$

$$\log(1-x) = -\frac{1}{\psi(a)}\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right].$$

Man könnte zur Entwickelung der Function $\log(1-x)$ auch daſſelbe Verfahren anwenden wie vorher, nämlich den Differentialquotienten der Function $\log(1-x)$ aufſtellen, wobei man $\frac{d\log(1-x)}{dx} = -\frac{1}{\psi(a)} \cdot (1-x)^{-1}$ erhalten hätte, den Ausdruck $(1-x)^{-1}$ in eine Reihe entwickeln, und die Glieder derſelben einzeln integriren; auf dieſem Wege wäre man zu demſelben Reſultat gelangt. Der Factor $\frac{1}{\psi(a)}$, welcher als durch die Baſis des logarithmiſchen Syſtems beſtimmt zu allen Logarithmen deſſelben Syſtems unverändert zutritt, wird der Modulus des Logarithmenſyſtems genannt.

§. 81.

Allgemein geltender Ausdruck des Logarithmus einer Zahl.

Die eben entwickelten Formen der Functionen $\log(1+x)$ und $\log(1-x)$ ſind zwar unmittelbar in dieſer Geſtalt zur Berechnung eines Logarithmus nur brauchbar, wenn die Zahl x ein ächter Bruch iſt, alſo die erſte Form für Zahlen zwiſchen 1 und 2, und die zweite für Zahlen zwiſchen 0 und 1. Indeſſen können ſie leicht in andere Formen übergeführt werden, welche allgemein für den Logarithmus einer beliebigen Zahl gelten. Und obgleich dieſe Umformungen nur auf gewöhnlichen Kunſtgriffen der Analyſis beruhen, und nicht näher zu unſerem Gegenſtand gehören, ſo mögen ſie doch hier noch eine beiläufige kurze Erwähnung finden.

Erſtens iſt leicht zu ſehen, daß durch den für $\log(1-x)$ gegebenen Ausdruck der Logarithmus einer jeden beliebigen Zahl ſchon durch eine kleine vorübergehende Veränderung der Zahl ſelbſt gefunden werden kann. Denn wollte man

durch denſelben z. B. den Logarithmus der Zahl 872 finden in dem gemeinen logarithmiſchen Syſtem mit der Grundzahl 10, ſo brauchte man die Zahl 872 nur durch eine ſolche ganze Potenz von 10 zu dividiren, daß ein ächter Bruch entſteht, und ſtatt 872 zu ſetzen $\frac{872}{1000}$. Den Logarithmus des Bruches $\frac{872}{1000}$ kann man nun durch den Ausdruck für $\log(1-x)$ finden; und man braucht, um die Zahl $\frac{872}{1000}$ der Form $1-x$ anzupaſſen, ſtatt $\frac{872}{1000}$ nur zu ſetzen $1-\frac{128}{1000}$. Da man nun weiß, daß die Logarithmen der Zahlen 872 und $\frac{872}{1000}$ ſich nur durch die Kennziffer unterſcheiden, und der erſtere um den Logarithmus von 1000 oder um 3 größer iſt als der zweite, ſo hat man auch den Logarithmus der Zahl 872. Und ſo mit jeder beliebigen Zahl. Es lohnt ſich nicht der Mühe nachzuweiſen, wie man dieſes ſo eben auf einen ſpeciellen Fall angewendete Verfahren verallgemeinern, und ſehr leicht einen Ausdruck für $\log x$ gewinnen könnte, der für alle Werthe von x und für eine beliebige Baſis Gültigkeit hat.

Das gewöhnliche Verfahren, um einen allgemein geltenden Ausdruck für $\log x$ darzuſtellen, iſt folgendes. Man zieht die beiden für $\log(1+x)$ und $\log(1-x)$ gefundenen Reihen von einander ab, und erhält, indem man zugleich für $\log(1+x) - \log(1-x)$ den gleichgeltenden Ausdruck $\log\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ ſetzt, die Gleichung

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{\psi(a)}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{\psi(a)}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right).$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{\psi(a)}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{\psi(a)}\left[2.x + 2.\frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^5}{5} + \ldots\right]$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{\psi(a)}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots\right).$$

Betrachten wir die Zahl $\frac{1+x}{1-x}$, welche durch Wachsen der Zahl x von 0 bis 1 jeden denkbaren über die Zahl 1 hinausliegenden Zahlenwerth geben kann, als eine Zahl schlechthin, und stellen sie durch ein einfaches Zeichen u vor, so müssen wir, wenn wir statt $\frac{1+x}{1-x}$ in der obigen Gleichung u setzen, alsdann auch statt x überall $\frac{u-1}{u+1}$ substituiren, wie die Gleichung $\frac{1+x}{1-x} = u$ zeigt, welche, wenn sie in Bezug auf x aufgelöst wird, $x = \frac{u-1}{u+1}$ gibt. Durch diese doppelte Substitution verwandelt sich die letzte der obigen Gleichungen in

$$\log u = \frac{2}{\psi(a)}\left[\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

Für alle beliebigen Werthe der Zahl u ist $\frac{u-1}{u+1}$ ein ächter Bruch, und folglich die nach den ungeraden Potenzen desselben geordnete Reihe immer convergirend. Man hat also hiermit eine für die Logarithmen aller Zahlen absolut gültige Reihe. Wäre z. B. $u = 2$, und demnach $\frac{u-1}{u+1} = \frac{1}{3}$, und sollte der Logarithmus von 2 für das gemeine Logarithmensystem mit der Grundzahl 10 berechnet werden, so hätte man

$$\log 2 = \frac{2}{\psi(10)}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right]$$

wobei $\psi(10)$, welches wir als ein abgekürztes Zeichen für eine aus §. 78 bekannte Function der Constanten 10 setzen, nach der Vorschrift jenes Paragraphen noch besonders berechnet werden müßte.

Die letzte für $\log u$ gefundene Reihe kann auch gebraucht werden, um die durch $\psi(a)$ angedeutete Function, welche wir früher, jenachdem a größer oder kleiner als 1 war, in zwei verschiedenen Formen entwickelt hatten, in einer allgemein geltenden Form darzustellen. Denn die Entwickelung der Function $\log u$, welche für alle Werthe von u Geltung hat, kann auch gebraucht werden, wenn die Zahl u der Basis a gleich ist. Da aber der Logarithmus der Basis oder $\log a = 1$ ist, so erhält man

$$1 = \frac{2}{\psi(a)}\left[\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

$$\psi(a) = 2\left[\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Wollte man also den Logarithmus einer Zahl u für die Basis a in einer durchaus entwickelten Function der bestimmenden Zahlen u und a darstellen, so brauchte man nur noch diese Entwickelung von $\psi(a)$ einzuführen, und erhielte endlich $\log u$ als vollständig gegebene Function durch die Gleichung

$$\log u = \frac{\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \ldots}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \ldots}.$$

Diese Reihe, welche für größere Werthe der Zahl u sehr schwach convergirend wird, muß für die practischen Zwecke der wirklichen Logarithmenberechnung noch weiter umgeformt werden, und kann so umgeformt werden, daß sie sehr steil abfällt, und daß eine auch sehr genäherte Berechnung eines Logarithmus fast auf eine einfache Division hinausläuft.

Doch können wir dies hier füglich bei Seite laſſen, und in dieſer Hinſicht auf die Lehrbücher der Analyſis verweiſen.

Die letzte Entwickelung der Function $\log u$ kann auch angeſehen werden als die allgemeine Auflöſung der tranſcendenten Gleichung $a^x = b$. Wenn man fragt, wie in dieſem Falle die Zahl x allein auf eine Seite der Gleichung geſchafft, und durch eine Verbindung der beſtimmenden Zahlen a und b ausgedrückt werden kann, ſo iſt dieſe Frage ſchon dadurch beantwortet, daß die Zahl x nichts weiter iſt als der Logarithmus der Zahl b für die Baſis a, und alſo dem Ausdruck für dieſen Logarithmus gleich iſt. Die vollſtändige Löſung der Gleichung $a^x = b$ iſt demnach gegeben durch

$$x = \frac{\left(\frac{b-1}{b+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5 + \cdots}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots}$$

§. 82.

Die natürlichen Logarithmen und ihre Baſis.

Man wird bemerkt haben, daß bei den in dieſem Capitel betrachteten Functionen, welche alle weſentlich eine Potenz mit conſtanter Grundzahl und veränderlichem Exponenten ſind, eine gewiſſe Function der conſtanten Grundzahl, welche wir durch $\psi(a)$ bezeichneten, eine wichtige Rolle ſpielt, indem ſowohl die Differentialquotienten der Exponentialfunction und der logarithmiſchen Function, als auch die logarithmiſche Function ſelbſt dieſe Function $\psi(a)$ als einen maßgebenden Factor zum ſteten Begleiter haben. Denn der Differentialquotient der Function a^x war $\psi(a).a^x$, der Differentialquotient der Function $\log x$ war $\frac{1}{\psi(a)}.\frac{1}{x}$, und der $\log x$ ſelbſt war eine Reihe der ungeraden Potenzen der Zahl $\frac{x-1}{x+1}$, multiplicirt mit dem Factor $\frac{2}{\psi(a)}$. Wenn nun in allen dieſen Functionen irgend eine conſtante

Grundzahl vorhanden sein muß, so ist es doch natürlich für die Natur dieser Function und für die Erforschung ihrer Beziehungen und Zusammenhänge ganz gleichgültig, welche Zahl als die constante Grundzahl angenommen wird. Man übersieht daher leicht, daß alle Untersuchungen in diesem Gebiete sehr vereinfacht werden könnten, wenn man die Grundzahl a so wählt, daß die Rücksicht auf den überall begleitenden Factor $\psi(a)$ wegfällt, d. h. daß derselbe gleich 1 wird, und somit als Factor nicht weiter in Betracht kommt. Die durch $\psi(a)$ angedeutete Function einer Constanten kann nämlich je nach dem Werth der Zahl a alle möglichen Zahlenwerthe annehmen, wie man besonders aus der im vorhergehenden Paragraph aufgestellten allgemein geltenden Entwickelung der Function $\psi(a)$ sehen kann, welche mit der allgemein geltenden Form des Logarithmus einer Zahl zusammenfällt; und so gut jede beliebige Zahl als der Logarithmus irgend einer andern Zahl betrachtet werden kann, ebenso gut kann daher jede beliebige Zahl als der Werth der Function $\psi(a)$ für irgend einen Zahlenwerth a angenommen werden. Wir dürfen uns die Zahl a demnach auch so denken, daß die Function $\psi(a)$ den Zahlenwerth 1 hat. Diese noch unbekannte bestimmte Zahl bezeichnet man in der Analysis herkömmlich immer durch den Buchstaben e, so daß also $\psi(e) = 1$ ist. Man kann nun alle Functionen mit constanter Grundzahl und veränderlichen Exponenten, in allgemeinen Untersuchungen wenigstens, auf dieselbe Grundzahl e beziehen, und nennt das Logarithmensystem, welches die Zahl e zur Basis hat, das natürliche, so wie die Logarithmen desselben natürliche. Es soll in dem Folgenden der natürliche Logarithmus einer Veränderlichen x und einer Constanten a zum Unterschied von andern Logarithmen mit beliebiger Basis, immer durch lx und la bezeichnet werden.

Ehe wir die durch Einführung der Zahl e entstehenden Vereinfachungen der Differentialquotienten und der logarithmischen Function näher betrachten, wollen wir zu-

erſt die Zahl e ſelbſt berechnen. Wir gehen zu der Fundamentalfunction a^x zurück. Da $\frac{da^x}{dx} = \psi(a)a^x$ gefunden worden, ſo iſt $\frac{de^x}{dx} = \psi(e).e^x$, und weil $\psi(e) = 1$ ſein ſoll,

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Wir haben hiernach in e^x eine Function von der beſondern Eigenſchaft, daß ſie durch Differentiation in ſich ſelbſt zurückläuft, oder eine Function, deren Differentialquotient der Function ſelbſt gleich iſt, und bei welcher alſo der jedesmalige Werth der Function zugleich die veränderliche verhältnißmäßige Stärke des Wachſens ausdrückt. Aus dieſer Eigenſchaft der Function läßt ſich faſt im Voraus erwarten, daß dieſelbe eine große Rolle in der Analyſis zu ſpielen beſtimmt iſt. Durch den Zutritt eines conſtanten Factors a wird dieſe Eigenſchaft der Function nicht verändert, ſo daß alſo ae^x als die durch Differentiation in ſich ſelbſt zurücklaufende Function betrachtet werden kann. Da die Function e^x für $x = 1$ den Zahlenwerth e annimmt, ſo brauchen wir, um e zu berechnen, die Function e^x nur in eine Potenzenreihe von x umzuformen, und in dieſer Reihe $x = 1$ zu ſetzen. Dieſe Potenzenreihe der Veränderlichen x muß alſo auch die Eigenſchaft haben, durch Differentiation ſich ſelbſt wieder hervorzubringen, oder daß ihr Differentialquotient ihr ſelbſt gleich iſt. Aus dieſer Eigenſchaft kann die Reihe leicht hergeſtellt werden. Und obgleich aus dieſer Eigenſchaft allein eigentlich nur eine Potenzenreihe von x folgt, welche der Function ae^x gleich iſt, ſo kann doch durch Hinzunahme der Eigenſchaft, daß e^x für $x = 0$ den Zahlenwerth 1 annimmt, die der Function e^x gleichzuſetzende Potenzenreihe von x völlig beſtimmt werden.

Da die einzelnen Glieder der geſuchten Potenzenreihe nicht in ſich ſelbſt zurücklaufen können durch Differentiation,

weil sie Potenzen mit constanten Exponenten sind, und ihr Exponent bei der Differentiation um eine Einheit kleiner werden muß, so kann es die ganze Reihe nur dadurch, daß immer ein Glied der Reihe in ein anderes übergeht bei der Differentiation. Wir wollen uns nun die Reihe so geordnet denken, daß dasjenige Glied, welches aus einem andern durch Differentiation entsteht, diesem andern unmittelbar vorhergeht, oder daß jedes Glied der Reihe der Differentialquotient des nächstfolgenden Gliedes ist. Der Exponent jedes Gliedes muß also um 1 größer sein als der des vorhergehenden Gliedes. Da der Werth der Function e^x sich ohne Ende dem Zahlenwerth 1 nähert, wenn x sich endlos der Null nähert, so folgt, daß alle Exponenten der Reihe positiv sein müssen, weil jede Potenz von x mit negativem Exponenten bei Verkleinerung des x endlos wächst, und sich nicht einer constanten Zahl nähern kann. Weil alle Potenzen von x mit positivem Exponenten sich annulliren, wenn $x = 0$ gesetzt wird, in diesem Falle aber die Function e^x und folglich auch die ihr gleichgeltende Reihe den Zahlenwerth 1 annimmt, so muß die Reihe das constante Glied 1 oder x^0 enthalten. Bei Ausschluß der negativen Exponenten wird also der Exponent 0 der möglichst niedrige, und x^0 oder 1 das erste Glied der Reihe sein. Der Exponent jedes folgenden Gliedes soll aber um 1 größer sein, und daher müssen die Exponenten der aufeinander folgenden Glieder die aufsteigende natürliche Zahlenreihe darstellen. Da ferner bei der Differentiation der geordneten Reihe jedes Glied derselben in das vorhergehende übergeht, so wird das letzte Glied der Reihe verschwinden. Zugleich verschwindet das erste Glied als ein constantes, doch wird seine Stelle ersetzt durch den Differentialquotienten des zweiten, und so weiter. Nach der Differentiation ist also die ganze Reihe wieder da mit Ausnahme des letzten Gliedes. Damit aber die Reihe trotz dieses Mangels des letzten Gliedes sich selbst gleich bleibe, muß sie unendlich sein, weil nur bei einer unendlichen Reihe

von einem absolut letzten Gliede, und von einer Veränderung derselben durch Abbrechen des letzten Gliedes keine Rede sein kann. Die gesuchte unendliche Potenzenreihe hat also in Bezug auf ihre Exponenten die Form x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, ... Da durch Differentiation einer Potenz mit positivem Exponenten das Vorzeichen niemals verändert wird, und in unserm Falle durch diese Operation jedes Glied in das vorhergehende übergehen soll, so müssen alle Glieder der Reihe gleiche Vorzeichen haben, und entweder sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sein. Da die Zahl e als Grundzahl mit veränderlichem Exponenten positiv zu setzen ist, und demnach auch der Werth der Function e^x für alle Werthe von x positiv sein muß, so können die Glieder der Reihe nur das Vorzeichen plus haben. Wenn wir nun in der bezüglich auf Exponenten und Vorzeichen völlig bestimmten Reihe die noch unbestimmten Coefficienten der einzelnen Glieder durch a, b, c, d, ... ausdrücken, so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$e^x = 1 + ax^1 + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots.$$

Es fragt sich also nur noch, wie die Coefficienten der einzelnen Glieder zu nehmen sind, damit jedes Glied der Differentialquotient des nächstfolgenden sei. Bei der Differentiation jedes Gliedes tritt der Exponent dieses Gliedes als Factor zu dem Differentialquotienten hinzu. Damit nun also z. B. der Differentialquotient des Gliedes cx^3 durch den Hinzutritt des Factors 3 zu dem Factor c dem Gliede bx^2 gleich werde, so muß c dreimal so klein sein als b; aus demselben Grunde muß d viermal so klein sein als c und s. w. Der Coefficient a muß aber nothwendig gleich 1 sein, weil der Differentialquotient des Gliedes ax^1 gleich 1 sein soll. Da der Coefficient b doppelt so klein sein muß als a, so ist er $\frac{1}{1.2}$. Der Coefficient c muß dreimal so klein als b, also $\frac{1}{1.2.3}$ sein; der folgende ist

viermal so klein als c, also gleich $\frac{1}{1.2.3.4}$ und s. w. Die Entwickelung von e^x in eine Potenzenreihe ist mithin vollständig folgende.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Diese in der gesammten Analysis häufig vorkommende Reihe führt den Namen der Exponentialreihe. Um vermittelst derselben die Zahl e selbst, als die Basis des natürlichen Logarithmensystems, zu berechnen, brauchen wir nur $x = 1$ zu setzen, und erhalten

$$e = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Diese stark abfallende Reihe gibt schon bei einer geringen Anzahl von Gliedern die Zahl e mit großer Genauigkeit. Werden die ersten zehn Glieder der Reihe addirt, so wird der Näherungswerth von e schon bis zur siebenten Decimalstelle richtig, und man erhält

$$e = 2{,}7182818\ldots.$$

§. 83.

Die Operationen mit natürlichen Logarithmen.

Indem nun die durch $\psi(a)$ ausgedrückte Function den Werth 1 annimmt, wenn in derselben e statt a gesetzt wird, oder da $\psi(e) = 1$ ist, so ergeben sich durch Einführung der Zahl e folgende Vereinfachungen der früher gefundenen Gleichungen. Für den Logarithmus einer Veränderlichen x mit der Basis a war die Differentialgleichung

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{\psi(a)} \cdot \frac{1}{x}.$$

Mithin gilt für den Logarithmus einer Veränderlichen x mit der Basis e, oder für den natürlichen Logarithmus lx die Differentialgleichung

$$\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Da der allgemeine Ausdruck des Logarithmus einer Zahl u für die Basis a dem Obigen zu Folge ist

$$\log u = \frac{2}{\psi(a)}\left[\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5+..\right],$$

so wird der allgemeine Ausdruck des natürlichen Logarithmus einer beliebigen Zahl a folgender:

$$la = 2\left[\left(\frac{a-1}{a+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5+...\right].$$

Man wird bemerken, daß diese Entwickelung von la zusammenfällt mit dem im §. 81 gegebenen allgemein geltenden Ausdruck der Function $\psi(a)$, und daß also die durch $\psi(a)$ vorgestellte Function einer Constanten a nichts Anderes ist, als der natürliche Logarithmus der Zahl a, oder daß $\psi(a) = la$ ist. In den Gleichungen des eben erwähnten Paragraphen kann also statt $\psi(a)$ auch überall la gesetzt werden. Man schreibt daher statt $\frac{da^x}{dx} = \psi(a)a^x$ auch gewöhnlich $\frac{da^x}{dx} = la.a^x$, und statt $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{\psi(a)}\cdot\frac{1}{x}$ auch $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{la}\cdot\frac{1}{x}$ u. s. w.

Um die natürlichen Logarithmen, auf die man so oft geführt wird, wirklich zu berechnen, falls man das numerische Resultat einer Aufgabe haben will, braucht man natürlich nicht auf die allgemeine Formel zurückzugehen, sondern jedes einmal berechnete Logarithmensystem bietet die Mittel dar, die Logarithmen jedes andern Systems auf eine sehr einfache Weise zu finden. Wollte man den natürlichen Logarithmus der Zahl m finden, so weiß man, daß lm der Exponent ist, auf dessen Potenz die Zahl e erhoben werden muß, um die Zahl m hervorzubringen, oder daß $e^{lm} = m$ ist. Bezeichnen wir wie früher durch log die Logarithmen eines beliebigen Systemes, und formen wir die Gleichung $e^{lm} = m$, indem wir beiderseits die Logarithmen dieses Systems nehmen, um in die Gleichung $lm.\log e = \log m$, so haben wir

$$\ln = \frac{\log m}{\log e},$$

d. h. man dividire den Logarithmus von m in einem beliebigen Syſtem durch den Logarithmus von e deſſelben Syſtems, ſo hat man den natürlichen Logarithmus von m. Wenn wir ſonach den gemeinen Logarithmus einer Zahl durch den gemeinen Logarithmus von e, welcher 0,4342944... iſt, dividiren, oder ſtatt deſſen mit $\frac{1}{0,4342944}$, d. h. mit 2, 302 5850 multipliciren, ſo erhalten wir den natürlichen Logarithmus dieſer Zahl.

§. 84.

Berechnung der Zahlen aus ihren Logarithmen.

Nachdem gezeigt worden iſt, wie man den Logarithmus einer beliebigen Zahl berechnet, ſoll nun noch angegeben werden, wie man aus einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl ableitet in jedem Logarithmenſyſtem. Die Entwickelung der Function e^x, welche vorher gebraucht wurde, um die Baſis des natürlichen Logarithmenſyſtems zu berechnen, indem wir x gleich dem natürlichen Logarithmus der Zahl e, oder gleich 1 ſetzten, und alſo aus dem natürlichen Logarithmus einer Zahl die Zahl ſelbſt ableiteten, hat in dieſer Beziehung eine ganz allgemeine Anwendbarkeit, und bietet uns das Mittel, aus dem natürlichen Logarithmus jeder beliebigen Zahl dieſe Zahl ſelbſt zu berechnen. Denn wenn ich den Werth von e^x als eine beliebige Zahl betrachte, ſo iſt x der natürliche Logarithmus dieſer Zahl. Indem ich alſo e^x durch eine Potenzenreihe von x darſtelle, drücke ich damit eben eine Zahl durch eine Potenzenreihe ihres natürlichen Logarithmus aus, und kann mittelſt dieſes Ausdrucks die Zahl aus ihrem natürlichen Logarithmus berechnen. Soll die Gleichung des vorletzten Paragraphen, welche die Entwickelung von e^x enthält, dies anſchaulich darſtellen, ſo drücke man den Werth von e^x durch ein einfaches Zeichen y aus, und ſetze $e^x = y$,

und demgemäß $x = ly$. Substituirt man nun in jener Gleichung y für e^x und ly für x, so erhält man

$$y = 1 + \frac{ly}{1} + \frac{(ly)^2}{1.2} + \frac{(ly)^3}{1.2.3} + \cdots$$

eine Reihe, in welcher auch der Form nach eine Zahl y durch ihren natürlichen Logarithmus ly ausgedrückt erscheint.

Was die Entwickelung von e^x für die natürlichen Logarithmen leistet, das kann die Entwickelung der Function a^x in eine Potenzenreihe von x für die Logarithmen mit der beliebigen Basis a leisten. Die Entwickelung der Exponentialfunction a^x kann zwar in ähnlicher Weise wie die von e^x aus der Differentialgleichung $\frac{da^x}{dx} = \psi(a)\, a^x$ entnommen werden, hier aber, wo wir die Entwickelung von e^x schon kennen, am kürzesten aus dieser abgeleitet werden. Denn wir können a selbst als eine Potenz von e betrachten, und zwar ist der Exponent, auf dessen Potenz e erhoben werden muß, um a hervorzubringen, nichts Anderes als der natürliche Logarithmus von a, so daß wir $a = e^{la}$ haben. Indem wir statt a^x setzen $(e^{la})^x$, oder was dasselbe ist, e^{lax}, so dürfen wir lax als eine Veränderliche schlechthin betrachten, und die für e^x gegebene Entwickelung auf e^{lax} übertragen, und erhalten

$$e^{lax} = 1 + \frac{lax}{1} + \frac{(la.x)^2}{1.2} + \frac{(la.x)^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\text{oder } a^x = 1 + \frac{lax}{1} + \frac{la^2x^2}{1.2} + \frac{la^3x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Nun ist x der Logarithmus der Zahl a^x für die Basis a; und da die Zahl a^x in dieser Reihe durch la und x ausgedrückt erscheint, so zeigt dieselbe überhaupt an, wie in einem logarithmischen System mit der Basis a eine Zahl berechnet werden kann aus dem gegebenen Logarithmus dieser Zahl und dem natürlichen Logarithmus der Basis.

§. 85.

Die Veränderlichen der logarith. und Exponential-function als Functionen.

Wir kehren nach diesen Abschweifungen, welche die Entwickelung der logarithmischen Function betreffen, zur Aufstellung der Differentiationsregeln zurück. Bisher haben wir die Differentiation der Exponentialfunction und der logarithmischen Function nur in den Fällen betrachtet, in welchen die willkürlich Veränderliche x selbst entweder der Exponent war, oder die Zahl, von welcher der Logarithmus genommen werden sollte. Ist nun nicht der Logarithmus von x, sondern der Logarithmus von einer Function von x gegeben, oder ist die Veränderliche der Exponentialfunction selbst irgend eine Function von x, so können die so zusammengesetzten Functionen in beiden Fällen als Functionen von Functionen betrachtet werden, und die Differentiation läßt sich nach der Regel des §. 67 ohne Schwierigkeit vollziehen. Wir beziehen in dem Folgenden der Einfachheit wegen Alles auf natürliche Logarithmen.

Haben wir z. B. die Function $l(a+x)$ zu differentiiren, so ist $a+x$ die Function von x, welche den Operationen der logarithmischen Function unterworfen gedacht werden soll. Betrachten wir die Function $a+x$ als eine Veränderliche schlechthin, so gibt uns die bekannte Regel der Differentiation des Logarithmus einer Veränderlichen die Gleichung $\frac{d\,l(a+x)}{d\,(a+x)} = \frac{1}{a+x}$. Nun soll aber nicht der Differentialquotient der Function $l(a+x)$ in Bezug auf $a+x$ als willkürlich Veränderliche, sondern in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche gefunden werden, oder es soll die Function von x angegeben werden, welche dem Ausdruck $\frac{d\,l(a+x)}{dx}$ gleichzusetzen ist. Nach der Regel des §. 67 hat man, um dies zu erreichen, den Differentialquotienten der

Function $l(a+x)$ in Bezug auf $(a+x)$ als willkürlich Veränderliche, also $\frac{1}{a+x}$, mit dem Differentialquotienten der Function $a+x$ in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche zu multipliciren. Da nun der Differentialquotient der Function $a+x$ gleich 1 ist, so hat man

$$\frac{dl(a+x)}{dx} = \frac{1}{a+x}.$$

Man erleichtert sich besonders bei zusammengesetzteren Functionen diese Operationen sehr, wenn man statt der Function von x, welche erst als willkürlich Veränderliche betrachtet wird, ein einfaches Zeichen einer Veränderlichen, etwa y oder z einführt, und den Differentialquotienten der für diese Veränderliche vorgeschriebenen Function bildet. Setzt man in die erhaltene Differentialgleichung statt y oder z die durch diese Buchstaben vorgestellte Function von x wieder ein, so erhält man im Nenner das Differential dieser Function. Da nun statt des Differentials einer Function von x gesetzt werden kann der Differentialquotient derselben multiplicirt mit dx, so erhält man, indem man diesen Differentialquotienten im Nenner wegschafft, den Differentialquotienten der Gesammtfunction in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche.

Hat man z. B. die Function $l(a-x)$ in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche zu differentiiren, oder den Ausdruck $\frac{dl(a-x)}{dx}$ durch eine Function von x darzustellen, und setzt man als einfaches Zeichen einer Veränderlichen den Buchstaben z statt $a-x$, so hat man $\frac{dlz}{dz} = \frac{1}{z}$, und nach Zurückführung der Function $a-x$ die Gleichung $\frac{dl(a-x}{d(a-x)} = \frac{1}{a-x}$. Nun ist $\frac{d(a-x)}{dx} = -1$ oder $d(a-x) = -1.dx$.

Dieſen Werth von $d(a-x)$ in die vorhergehende Gleichung geſetzt, erhält man

$$\frac{dl(a-x)}{-1.dx} = \frac{1}{a-x}$$

$$\frac{dl(a-x)}{dx} = -\frac{1}{a-x}.$$

Es ſei die Function $l\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)$ zu differentiiren. Indem man z ſtatt $ax + x^{\frac{1}{2}}$ ſetzt, erhält man zuerſt $\frac{dlz}{dz} = \frac{1}{z}$, und dann $\frac{dl\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)}{d\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{ax + x^{\frac{1}{2}}}$. Da nun

$\frac{d\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = a + \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$ oder $d\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)$ $= \left(a + \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$ iſt, ſo erhält man nach Subſtitution dieſes Werthes von $d\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)$ in die vorhergehende Gleichung

$$\frac{dl\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(a + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx} = \frac{1}{ax + x^{\frac{1}{2}}}$$

oder

$$\frac{dl\left(ax + x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = \frac{a + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{ax + x^{\frac{1}{2}}}.$$

Wäre der Logarithmus von dem Logarithmus einer Veränderlichen x, oder die Function llx gegeben, ſo erhielte man, indem man zuerſt z ſtatt lx ſetzt, $\frac{dlz}{dz} = \frac{1}{z}$, und

dann $\frac{d\,l\,l\,x}{d\,l\,x} = \frac{1}{l\,x}$. Da nun $\frac{d\,l\,x}{d\,x} = \frac{1}{x}$ und $d\,l\,x = \frac{1}{x}.dx$ ist, so hat man

$$\frac{d\,l\,l\,x}{\frac{1}{x}.d\,x} = \frac{1}{l\,x}$$

$$\frac{d\,l\,l\,x}{d\,x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{l\,x} = \frac{1}{x\,l\,x}.$$

Alle diese Fälle sind enthalten in der allgemeinen Form $l\,f(x)$. In Bezug auf $f(x)$ als willkürlich Veränderliche hat man die Differentialgleichung $\frac{d\,l\,f(x)}{d\,f(x)} = \frac{1}{f(x)}$. Statt $d\,f(x)$ den gleichgeltenden Ausdruck $\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right) d\,x$ substituirt, gibt

$$\frac{d\,l\,f(x)}{\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right) d\,x} = \frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{d\,l\,f(x)}{d\,x} = \frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d\,f(x)}{d\,x}.$$

Dieser Differentialquotient des Logarithmus einer Function $f(x)$ ist nur ein besonderer Fall des in §. 67 gegebenen Differentialquotienten der Function $\varphi[f(x)]$, und zwar derjenige, in welchem die durch φ im Allgemeinen angedeutete Function die logarithmische ist. Es sei noch die Function $l\,(x + l\,x)$ nach dieser Formel zu differentiiren; man erhält

$$\frac{d\,l\,(x + l\,x)}{d\,x} = \frac{1}{x + l\,x}\cdot\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Ist in der Exponentialfunction a^x statt x eine Function von x als veränderlicher Exponent enthalten, so kann ganz ebenso verfahren werden. Wäre z. B. die Function $a^{\frac{1}{x}}$ zu differentiiren, und setzte man statt $\frac{1}{x}$ vorläufig z, so erhielte man nach bekannter Regel $\frac{da^z}{dz} = l\,a\,.\,a^z$, und

nach Rückführung von $\frac{1}{x}$ statt z, $\frac{da^{\frac{1}{x}}}{d\frac{1}{x}} = la \cdot a^{\frac{1}{x}}$. Da nun $\frac{d\frac{1}{x}}{dx}$ d. h. $\frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2}$ oder $d\frac{1}{x} = -x^{-2} \cdot dx$, so erhält man

$$\frac{da^{\frac{1}{x}}}{-x^{-2} \cdot dx} = la \cdot a^{\frac{1}{x}}$$

und

$$\frac{da^{\frac{1}{x}}}{dx} = la \cdot a^{\frac{1}{x}} \cdot -x^{-2} = -\frac{la \cdot a^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Sei die gegebene Function $a^{(b^x)}$; durch welche Function von x ist $\frac{da^{(b^x)}}{dx}$ auszudrücken? Statt b^x gesetzt z, wird $\frac{da^z}{dz} = la \cdot a^z$, und folglich $\frac{da^{(b^x)}}{db^x} = la \cdot a^{(b^x)}$. Da $\frac{db^x}{dx} = lb \cdot b^x$ und $db^x = lb \cdot b^x \cdot dx$, so ist

$$\frac{da^{(b^x)}}{lb \cdot b^x \cdot dx} = la \cdot a^{(b^x)}$$

$$\frac{da^{(b^x)}}{dx} = la \cdot a^{(b^x)} \cdot lb \cdot b^x.$$

Es sei der Differentialquotient der Function $e^{x lx}$ zu bilden. z statt xlx gesetzt, ist die Function e^z, und dann bekanntlich $\frac{de^z}{dz} = e^z$ (§. 82) und folglich $\frac{de^{xlx}}{d(xlx)} = e^{xlx}$. Es ist nun noch der Differentialquotient der Function xlx, als eines Productes zweier Functionen zu entwickeln. Nach §. 65 ist aber $\frac{d(xlx)}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + lx = 1 + lx$ oder $d(xlx) = (1+lx)\,dx$. Dieser Ausdruck in die obige Gleichung eingeschoben gibt

$$\frac{d\,e^{x\,lx}}{(1+lx)\,dx} = e^{x\,lx}$$

folglich

$$\frac{d\,e^{x\,lx}}{dx} = e^{x\,lx}\,(1+lx).$$

Wir brauchen keine weiteren Beiſpiele zuzufügen. Indem man auf dieſe Weiſe überall ſtatt einer Function von x ein einfaches Zeichen ſubſtituirt, und vielleicht auch, wenn die Beſtimmung des Differentials dieſer Function zu complicirt erſcheinen ſollte, noch eine zweite Subſtitution der Art vornimmt, theilt man ſich die Arbeit, und hat es immer nur mit der Differentiation einfacher Functionen zu thun. Man ſieht leicht, daß, ſo fern die Differentiationsregeln der einfachen Functionen als bekannt vorausgeſetzt werden, es dabei nichts weiter zu denken und zu erklären gibt, und das Ganze nur eine Art Handarbeit iſt.

Sind die Functionen lx und a^x mit andern Functionen oder mit ſich ſelbſt durch die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion verbunden, wie in $\frac{lx}{x^m}$ oder in $a^x.lx$ u. dergl. mehr, ſo bedarf die Differentiation ſolcher Formen keiner weiteren Nachweiſung, weil die Regeln des vorhergehenden Capitels über die Differentiation der durch die genannten Operationen zuſammengeſetzten Functionen ſich auf alle beliebigen in der Zuſammenſetzung enthaltenen Functionen beziehen. Oder wären die Functionen lx und a^x der Potenzirung unterworfen, wie in $(lx)^m$ und $(a^x)^m$, ſo fällt die Differentiation ſolcher Formen unter die allgemeine Regel des §. 67, und könnte auch, da man aus §. 68 weiß, daß bei einer beliebigen Function f(x) die Gleichung $\frac{d[f(x)]^m}{dx} = m[f(x)]^{m-1}.\frac{df(x)}{dx}$ ſtatt hat, den Differentialquotienten aller ſolcher Formen gleich ſpeciell dieſer Gleichung anpaſſen, und würde alſo z. B. für die Function $(lx)^m$ erhalten $\frac{d(lx)^m}{dx} = m(lx)^{m-1}.\frac{1}{x}$.

§. 86.

Functionen mit veränderl. Grundzahl und veränderl. Exponent.

In den bisher betrachteten einfachen Functionen, auf deren Differentiationsregeln wir die Differentiation zusammengesetzter Functionen zurückgebracht haben, waren Grundzahl und Exponent unabhängig von einander. Es ist nun noch der Fall vorzunehmen, in welchem eine Veränderliche x mit sich selbst, oder mit einer Function von x, oder auch eine Function von x mit einer Function von x als Exponent und Grundzahl in Verbindung gesetzt erscheinen.

In allen diesen Fällen sind Grundzahl und Exponent in Abhängigkeit von einander. Wenn wir eine Veränderliche x in der Form von x^1 selbst als eine Function von x betrachten, so laufen die eben aufgezählten Fälle auf Einen hinaus, nämlich auf den, in welchem Functionen von x als Exponent und Grundzahl verbunden sind. Formen der Art, wie x^x, $(a^x)^x$, $(x^m)^{a^x}$, $(a^x)^{l^x}$ sind alle mitbegriffen in der allgemeinen Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$. Und da wir in den Lehren des vorhergehenden Capitels schon Regeln erhalten haben zur Differentiation von Functionen, in welchen andere Functionen auf jede andere Weise arithmetisch verknüpft erscheinen, nur nicht als Exponent und Grundzahl, so fehlt zur Vollständigkeit der Differentiationsregeln gegebener Functionen einer Veränderlichen nur noch dieser Fall.

Die Differentiation dieser Functionen läßt sich vermitteln durch die logarithmische Function, weil durch Zurückführung der Zahlen auf ihre Logarithmen die Verbindung der Zahlen als Exponent und Grundzahl in eine Verbindung von Factoren verwandelt wird. Denn da der Logarithmus der Form a^b oder $l a^b$ gleich ist $b l a$, so hat man durch Logarithmen diese Umänderung der Verbindungsweise völlig in der Gewalt. Man erhält also den Logarithmus einer Function von x, in welcher andere Functionen von x als Exponent und Grundzahl verbunden erscheinen, und welche

Function wir durch y^z vorstellen wollen, in zwei verschiedenen Formen, indem $\mathrm{l}y^z = z\,\mathrm{l}y$ ist. Nimmt man beiderseits die Differentiale dieser Formen, so werden diese auch untereinander gleich sein. Da nun das Differential des Logarithmus einer beliebigen durch u vorgestellten Function von x gleich ist $\frac{du}{u}$, also auch das Differential von $\mathrm{l}y^z$ einerseits gleich ist $\frac{dy^z}{y^z}$, und anderseits das Differential von $z\,\mathrm{l}y$ als eines Productes zweier Functionen (nach §. 65) gleich ist der Summe der Producte, welche entstehen, wenn man jede einzelne Function mit dem Differential der andern multiplicirt, so sieht man leicht, daß man das Differential der Gesammtfunction y^z auf diese Weise ausgedrückt erhält durch die Differentiale der einzelnen Functionen in Verbindung mit den einzelnen Functionen und der Gesammtfunction selbst. Wäre die einfachste Form solcher Functionen, nämlich x^x gegeben, und gefragt, welcher Function von x der Ausdruck $\frac{dx^x}{dx}$ gleich sei. Man hat zunächst $\mathrm{l}x^x = x\,\mathrm{l}x$. Beiderseits die Differentiale genommen, erhält man

$$\frac{dx^x}{x^x} = x \cdot \frac{dx}{x} + \mathrm{l}x \cdot dx = (1 + \mathrm{l}x)dx$$

folglich $\frac{dx^x}{dx} = x^x(1 + \mathrm{l}x)$.

Betrachten wir unsere Aufgabe gleich in der höchsten Allgemeinheit. Seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ beliebige Functionen von x und die Function $[f(x)]^{\varphi(x)}$ zu differentiiren. Man hat $\mathrm{l}[f(x)]^{\varphi(x)} = \varphi(x)\,\mathrm{l}\,f(x)$. Setzt man die Differentiale dieser Formen gleich, so erhält man

$$\frac{d[f(x)]^{\varphi(x)}}{[f(x)]^{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x) \cdot df(x)}{f(x)} + \mathrm{l}f(x) \cdot d\varphi(x).$$

Da nun die Differentiale der Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ oder $df(x)$ und $d\varphi(x)$ nichts weiter vorstellen als die

Differentialquotienten dieser Functionen multiplicirt mit dx, oder gleich sind $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)dx$ und $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)dx$, so kann unsere Differentialgleichung auch so geschrieben werden:

$$\frac{d[f(x)]^{\varphi(x)}}{[f(x)]^{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}.\frac{df(x)}{dx}.dx + lf(x).\frac{d\varphi(x)}{dx}.dx$$

$$= \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}.\frac{df(x)}{dx} + lf(x).\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]dx,$$

folglich

$$\frac{d[f(x)]^{\varphi(x)}}{dx} = [f(x)]^{\varphi(x)}.\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}.\frac{df(x)}{dx} + lf(x).\frac{d\varphi(x)}{dx}\right).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung ist nichts enthalten als die gegebene Function $[f(x)]^{\varphi(x)}$ und bekannte Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ und $lf(x)$ in Verbindung mit dem Differentialquotienten der einzelnen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$. In so fern also die Differentialquotienten der Theilfunctionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für sich als Functionen von x dargestellt werden, ist auch der Differentialquotient der Gesammtfunction $[f(x)]^{\varphi(x)}$ durch eine völlig gegebene Function von x ausgedrückt.

Wäre z. B. die Function $[1+x^2]^{x^m}$ zu differentiiren, so erhielte man, indem man in vorstehender Gleichung statt $f(x)$ nur $(1+x^2)$ und statt $\varphi(x)$ überall x^m setzte,

$$\frac{d(1+x^2)^{x^m}}{dx} = (1+x^2)^{x^m}.\left[\frac{x^m}{1+x^2}.2x + l(1+x^2).mx^{m-1}\right].$$

Als Differentialquotient der Function $(x^m)^{lx}$ erhielte man

$$\frac{d(x^m)^{lx}}{dx} = (x^m)^{lx}.\left[\frac{lx}{x^m}.mx^{m-1} + lx^m.\frac{1}{x}\right].$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß mit dieser zuletzt entwickelten Regel der Bildung des Differentialquotienten einer Function von der Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ die ganze Lehre von der Differentiation gegebener Functionen einer Verän-

derlichen völlig geschlossen ist. Die Unendlichkeit möglicher verschiedener Functionsformen steht dieser Umfaßbarkeit derselben durch einfache Regeln nicht im Wege. Ist nämlich eine Function einer Veränderlichen x gegeben, so ist eine bestimmte arithmetische Verknüpfung der Veränderlichen x mit sich selbst und mit Constanten vorgeschrieben. Größen können aber arihmetisch verknüpft sein entweder als Theile (Addition und Subtraction) oder als Factoren (Multiplication und Division) oder als Exponent und Grundzahl. Diese Verbindungsweisen können sämmtlich stattfinden sowohl für eine Veränderliche und Constante als auch für beliebige Functionen einer Veränderlichen. In dem vorhergehenden Capitel waren schon die Differentiationsregeln gegeben für Functionen einer Veränderlichen, in welchen andere Functionen als Theile und als Factoren verbunden sind, und hier ist die Regel gegeben für Functionen, in welchen andere Functionen als Exponent und Grundzahl verbunden sind. Da wegen der vollkommenen Flüssigkeit des Begriffs der Function jede durch eine der genannten arithmetischen Verknüpfungsweisen zu Stande gebrachte Verbindung von Functionen selbst wieder schlechthin als eine Function betrachtet werden kann, so gibt jede beliebige weitere arithmetische Verknüpfung für solche aus der Zusammensetzung von Functionen bestehende Functionen im Wesentlichen nichts Neues. Man wird überall, indem man beliebige verbundene Functionen als Eine betrachtet, doch immer nur auf dieselben arithmetischen Verbindungsweisen stoßen, und in dieser Art der Zusammensetzung umgeht man jede Steigerung und jede neue Form, wenn man jede weitere Complication immer auf den nachgiebigen Begriff der Function ableitet. Hätte man z. B. die Function $[(ax + x^2)^{(1+b^x)}]^{x^m}$ zu differentiiren, so hindert nichts die Function $(ax+x^2)^{(1+b^x)}$ schlechthin als eine Function von x zu betrachten, und die ganze zu differentiirende Function der Differentiationsregel für die Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ zu unter-

werfen; und da in dem dadurch erhaltenen Differentialquotienten noch der Differentialquotient der Function $(ax+x^x)^{(1+b^x)}$ als unentwickelte Function vorkommt, so braucht man denselben, da $(ax+x^x)^{(1+b^x)}$ auch eine Function von der Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ ist, nur nach eben dieser Regel als Function von x zu entwickeln, und diese Entwickelung in den Differentialquotienten der Gesammtfunction einzuschieben. Durch ähnliche successive Entwickelung der in einem Differentialquotienten noch vorkommenden unentwickelten Differentialquotienten gewisser Theilfunctionen wird man überall zum Ziele kommen. Nimmt man noch dazu, daß jede Function von x derjenigen Operation oder der Folge von Operationen unterworfen gedacht werden kann, welche durch irgend eine Function von x für die Veränderliche x selbst vorgeschrieben ist, und daß die Differentiation einer so gebildeten Function, als Function einer Function, nach §. 67 ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann, so ist überhaupt keine gegebene Function einer Veränderlichen denkbar, welche nicht durch die bisher entwickelten Regeln differentiirt werden könnte. Ist eine Function von x nur durch ein bloßes Wort bezeichnet wie $\sin x$, $\cos x$ und dergl. m., und nicht gegeben durch eine bestimmte arithmetische Zusammensetzung der Veränderlichen x mit Constanten, so kann natürlich davon nicht die Rede sein. Ist mir eine solche Function als entwickelte Function gegeben, so wird ihr Differentialquotient nach den bekannten Regeln gefunden. Sind mir aber gewisse Beziehungen der Veränderlichen x und einer durch $\sin x$ bezeichneten Function gegeben, aus denen man auf ihre momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens schließen kann, so hat dies Verfahren der directen Bestimmung des Differentialquotienten einer unbekannten Function, welches in den vorhergehenden Capiteln schon an vielen Beispielen erläutert ist, mit den allgemeinen Differentiationsregeln beliebig arithmetisch zusammengesetzter Ausdrücke nichts zu schaffen.

§. 87.

Integrationsregeln, die aus den Lehren dieses Capitels folgen.

Es soll noch in der Kürze der Integrationsregeln gedacht werden, welche aus den Regeln dieses Capitels durch einfache Umkehrung der analytischen Differentialgleichungen hervorgehen. Obgleich hier leicht schon eine ziemlich große Anzahl solcher Regeln erhalten werden könnten, so wollen wir doch nur die aus den Differentialquotienten der Functionen a^x und lx hervorgehenden erwähnen.

Da $\frac{da^x}{dx} = la.a^x$, so folgt daß $\frac{d\frac{1}{la}.a^x}{dx} = a^x$. Eine jede als Differentialquotient gegebene Exponentialfunction a^x ist also die aus der Function $\frac{1}{la}.a^x$ durch Differentiation abgeleitete Function, und kann demgemäß integrirt werden; oder aus der Gleichung $d\frac{1}{la}.a^x = a^x dx$ folgt

$$\int a^x dx = \frac{1}{la}.a^x.$$

Da ferner $\frac{de^x}{dx} = e^x$ oder $de^x = e^x.dx$, so folgt

$$\int e^x.dx = e^x.$$

Aus der Differentialgleichung $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$ oder $dlx = x^{-1}.dx$ folgt

$$\int x^{-1}\,dx = lx.$$

Die wirkliche Darstellung des Integrals von $x^{-1}dx$ kann hiernach nur durch eine unendliche Reihe gegeben werden, weil lx nicht anders als durch eine unendliche Potenzenreihe von x entwickelt werden kann. Indessen läßt man es in der Praxis natürlich bei der Zurückführung dieses Integrals auf die Function lx bewenden, weil man für die logarithmische Function ausführlich berechnete Tafeln besitzt, so wie man überhaupt den Zweck der Integration für erreicht ansieht, sobald man ein Integral auf eine Function zurück-

geführt hat, deren Werthe man aus Tafeln ablesen kann. Es gibt eine gewisse Anzahl von Functionen einer Veränderlichen, welche außerordentlich häufig gebraucht werden, und die sich sämmtlich nur durch unendliche Potenzenreihen der Veränderlichen berechnen lassen. Um dieser mühsamen und weitläufigen Berechnung bei der Bestimmung eines numerischen Resultates überhoben zu sein, hat man die Werthe solcher Functionen ein für allemal berechnet, und in Tafeln zusammengestellt. Ein großer Theil der Integralrechnung besteht nun in der Zurückführung der Integrale auf Functionen, für die man Tafeln besitzt. Es versteht sich, daß die Integralrechnung, in so weit sie sich mit dieser Zurückführung beschäftigt, ein durch die gerade berechneten Tafeln bestimmtes sehr zufälliges Ansehen gewinnt. Denn besäße man Tafeln für die Werthe anderer Functionen und nicht für die Logarithmen und Kreisfunctionen, so würden diese Regeln überflüssig werden, und andere ausgedacht werden müssen.

Da nach §. 85 $\frac{dl(a+x)}{dx} = \frac{1}{a+x}$ und $\frac{dl(a-x)}{dx} = -\frac{1}{a-x}$ oder $\frac{d-l(a-x)}{dx} = \frac{1}{a-x}$, so sieht man, daß die als Differentialquotienten gegebenen Functionen $\frac{1}{a+x}$ und $\frac{1}{a-x}$ auf Logarithmen als ihre ursprüngliche Function zurückgeführt werden können. Aus den Gleichungen $d(la+x) = \frac{1}{a+x}.dx$ und $d-l(a-x) = \frac{1}{a-x}.dx$ folgen also die Integralgleichungen

$$\int \frac{1}{a+x}.dx = l(a+x)$$

$$\int \frac{1}{a-x}.dx = -l(a-x).$$

Diese beiden Integrationsregeln kommen dadurch häufig zur Anwendung, daß man gebrochene Functionen von x

in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt, deren Zähler constant sind, und deren Nenner von der Form $a+x$ oder $a-x$ sind, und welche Partialbrüche von der Form $\frac{c}{a+x}$ oder $c \cdot \frac{1}{a+x}$, demnach einzeln integrirt werden können.

Wir wollen, ohne die Regeln der Zerlegung der gebrochenen Functionen in Partialbrüche hier weiter nachzuweisen, welches eine Sache der Algebra ist, durch ein ganz einfaches Beispiel von diesem Verfahren der Integration eine ungefähre Vorstellung zu geben suchen. Die Function $\frac{1}{1-x^2}$ sei nur gegeben als Differentialquotient einer unbekannten Function y, so daß $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$. Die gebrochene Function $\frac{1}{1-x^2}$ kann als die Summe zweier Brüche dargestellt werden, indem $\frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$ gleich $\frac{1}{1-x^2}$ ist, wie man sich durch wirkliche Addition der beiden Brüche leicht überzeugen kann. Unsere gegebene Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$ kann also auch geschrieben werden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$$

oder

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot dx$$

folglich

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} \cdot dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} \cdot dx,$$

$$y = \frac{1}{2} l(1+x) - \frac{1}{2} l(1-x)$$

$$y = \frac{1}{2} \left[l(1+x) - l(1-x) \right].$$

Da $l(1+x) - l(1-x)$ gleich ist $l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, so hat man

$$y = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Nun ist freilich $\frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ als entwickelte Function nach §. 81 nichts Anderes als die unendliche Reihe $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots$ und diese Reihe hätten wir auch ohne Zerlegung der gebrochenen Function in Partialbrüche erhalten können, wenn wir die Function $\frac{1}{1-x^2}$ ohne Weiteres durch eine Reihe integrirt hätten, d. h. wenn wir die Function $\frac{1}{1-x^2}$ in der Gestalt $(1-x^2)^{-1}$ nach dem binomischen Lehrsatz in eine Potenzenreihe entwickelt, und die Glieder derselben einzeln integrirt hätten; aber die Darstellung eines Integrals in einer geschlossenen wenn gleich unentwickelten Form kann begreiflicherweise ihre Vortheile und Bequemlichkeiten haben.

Sechstes Capitel.

Von der Differentiation und der Entwickelung der Kreisfunctionen.

§. 88.

Von den Kreisfunctionen im Allgemeinen.

Nachdem wir die allgemeinen Regeln der Differentiation entwickelter oder nach ihrer arithmetischen Zusammensetzung gegebener Functionen Einer Veränderlichen kennen gelernt haben, wollen wir noch die Differentialquotienten und die Entwickelungen einer besonderen Klasse von Functionen in Untersuchung nehmen, derjenigen Functionen nämlich, durch welche der Zusammenhang und die Abhängigkeit der Kreisbogen und gewisser ihnen zugehöriger gerader Linien angegeben wird, und welche kurzweg Kreisfunctionen heißen. Es versteht sich von selbst, daß von einer Aufstellung der Differentiationsregeln dieser Functionen nur in so fern die Rede zu sein braucht, als dieselben unmittelbar aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet werden sollen, und die Functionen selbst als unbekannt vorausgesetzt werden. Aus den direct aufgefundenen Differentialquotienten dieser Functionen sollen sie dann selbst entwickelt werden. Daß diese Functionen von einer besonderen Wichtigkeit und von der ausgedehntesten Anwendung sind überall, wo der Zusammenhang der Bestandtheile und Bestimmungen der Raumgestalten festgestellt werden soll, ist leicht zu ermessen. Denn alle Bestimmungen der Raumgestalten kommen auf zwei absolut heterogene erzeugende Urelemente des Raumes zurück, und diese sind die reinfortschreitende

Bewegung und die drehende Bewegung, oder als Resultate dieser Bewegungen ausgesprochen die gerade Linie und der Winkel. Die Größenbestimmung an diesen Elementen ist die Länge und der Richtungsunterschied. Alle Beziehungen dieser beiden Elemente und die Darstellung ihrer gegenseitigen Abhängigkeit wird nur möglich gemacht durch ein Raumgebilde, in welchem eine Drehung oder ein Richtungsunterschied mit einer Länge so verbunden erscheint, daß die Länge im geraden Verhältniß der Drehung wächst, und daß das Eine für das Andere gesetzt werden oder als Maßstab desselben dienen kann. Dieses Raumgebilde ist allein das durch die Drehung einer Linie selbst erzeugte, nämlich der Kreis. Durch die Kreislinie werden die Drehungsgrößen oder die Richtungsunterschiede in Längen umsetzbar, indem für denselben Radius die Längen von Kreisbogen sich verhalten wie die ihnen zugehörigen Winkel am Centrum, oder wie die Drehungsgrößen. Also nur ein Raumgebilde, welches Drehung und Länge zugleich, und zwar das Eine in demselben Maße ist als es das Andere ist, d. h. ein Kreisbogen, kann die Brücke zwischen diesen absolut heterogenen Begriffen bilden. Nun erscheint bekanntlich der Zusammenhang zwischen Längenverhältnissen der geraden Linien und zwischen Winkeln am engsten in der Figur von der möglichst geringen Seitenzahl, in dem Dreieck, in welchem von den Längenverhältnissen der Seiten, oder wie man kurz sagt, von den Seitenverhältnissen unmittelbar die Winkel, und von den Winkeln unmittelbar die Seitenverhältnisse abhängen; und in so fern man Dreiecke mit einem constanten Winkel betrachtet, wie z. B. die rechtwinkligen, hängen von Einem willkürlich zu nehmenden Winkel die Seitenverhältnisse des Dreiecks, und von Einem Seitenverhältniß die Winkel ab. Während nun zwar bei dem rechtwinkligen Dreieck aus dem Einen Bestandtheil die anderen folgen, dasselbe aber als solches gar kein Mittel bietet, diese Bestandtheile auch zu folgern, oder während durch das rechtwinklige Dreieck die Ausdehnung eines Zu-

sammenhangs gegeben ist, dessen Art und Weise sich jeder näheren Bestimmung entzieht, so kann durch Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke, welche in einem Kreis mit dem veränderlichen Kreisbogen zugleich und in Abhängigkeit von demselben erzeugt werden, die Art und Weise des Zusammenhangs von Länge und Drehung vollkommen dargelegt werden.

Indem man durch eine Function der Zahl, welche für den Radius = 1 die Länge des Bogens ab (Fig 34) angibt, entweder die Länge der Linie bd oder cd oder ae (wobei bd und ae senkrecht auf ca gedacht werden) ausdrückt, oder umgekehrt durch Functionen der Zahlen, welche die Längen dieser geraden Linien angeben, die Länge des zugehörigen Kreisbogens ab ausdrückt, so hat man bekanntlich durch diese Ausdrücke alle Mittel in Händen, aus jedem Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks die Seitenverhältnisse, und aus jedem Seitenverhältniß die Winkel herzuleiten. Da in dem Falle, als der Radius den Zahlenwerth 1 hat, diejenige Zahl, welche die Länge der Linie bd angibt, zugleich der Zahlenwerth des Quotienten $\frac{bd}{cb}$ ist, und mithin ein Seitenverhältniß oder vielmehr den sogenannten Exponenten des Verhältnisses angibt, so kann statt des Quotienten dieser zwei Seiten auch der Zahlenwerth der Linie bd genommen werden. Ebenso kann für denselben Fall, daß der Radius den Zahlenwerth 1 hat, statt des Quotienten der Seiten cd und cb, oder statt $\frac{cd}{cb}$ der Zahlenwerth der Linie cd und statt des Quotienten $\frac{bd}{cd}$ der Zahlenwerth der Linie ae gesetzt werden. Obgleich man nun eigentlich die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens sowohl als die Abhängigkeit des veränderlichen Bogens ab und der Seitenverhältnisse des rechtwinkligen Dreiecks bcd bestimmen will, so kann man doch, weil bloße Verhältnisse und ein Bogen wenigstens zur directen Auffindung ihres Differentialquo-

tienten nicht dienen können, ſtatt der Zahlenwerthe der Seitenverhältniſſe oder der Quotienten zweier Seiten die Zahlenwerthe beſtimmter gerader Linien ſubſtituiren, und ſo im homogenen Elemente der Raumgrößen bleibend die von einander abhängigen veränderlichen Größen in Bezug auf die verhältnißmäßige Stärke ihres Wachſens leicht beſtimmen. Die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens des Bogens und der geraden Linien bd, cd und ae hat alſo zugleich den Sinn, die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens des Bogens und der drei Seitenverhältniſſe des rechtwinkligen Dreiecks bcd zu ſein. Nimmt man die Quotienten $\frac{bd}{cb}$, $\frac{cd}{cb}$ und $\frac{bd}{cd}$, welche die drei Seitenverhältniſſe des Dreiecks bcd angeben, und Sinus, Coſinus und Tangente heißen, in umgekehrter Form, in der Form $\frac{cb}{bd}$, $\frac{cb}{cd}$ und $\frac{cd}{bd}$, in welcher ſie die Namen Coſecante, Secante und Cotangente führen, ſo kann auch nach der verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens dieſer Seitenquotienten und des Bogens ab gefragt werden. Daß auch die Zahlenwerthe dieſer Quotienten mit den Zahlenwerthen gewiſſer gerader Linien zuſammenfallen, und zwar für den Radius = 1 der Quotient $\frac{bc}{cd}$, oder die Secante des Bogens ab mit dem Werth der Linie ce, der Quotient $\frac{cb}{bd}$ oder die Coſecante mit dem Werth der Linie cf, und der Quotient $\frac{cd}{bd}$ oder die Cotangente mit dem Werth der Linie gf zuſammenfällt, iſt bekannt. Es können demnach auch dieſe Seitenquotienten durch die genannten geraden Linien mit dem Kreisbogen auf eine anſchauliche Weiſe in Vergleichung geſetzt werden. Man erhält alſo ſechs verſchiedene von einem Bogen ab abhängige Zahlenwerthe, die alle nur einen Quotienten

zweier Seiten des dem Bogen ab zugehörigen rechtwinkligen Dreiecks bcd darstellen.

Es kann nun von den in Abhängigkeit von einander wachsenden Bogen und geraden Linien entweder der Bogen als die willkürlich Veränderliche x angenommen werden, und die geraden Linien als die abhängig Veränderlichen, und man erhält die Differentialquotienten der den Zahlenwerthen dieser geraden Linien entsprechenden Seitenquotienten $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ und $\operatorname{cotang} x$, d. h. Functionen, durch welche die Ausdrücke $\frac{d \sin x}{dx}$, $\frac{d \cos x}{dx}$ u. s. w. dargestellt werden, oder es können die geraden Linien als die willkürlich Veränderlichen angenommen werden, und der Bogen, welcher einem Sinus, Cosinus u. s. w. von dem Zahlenwerth x zugehört, und welcher durch $\operatorname{arc}(\sin = x)$, $\operatorname{arc}(\cos = x)$ u. s. w. bezeichnet wird, als die abhängig Veränderliche, und es werden dadurch Functionen für die Ausdrücke $\frac{d \cdot \operatorname{arc}(\sin = x)}{dx}$, $\frac{d \operatorname{arc}(\cos = x)}{dx}$ u. s. w. erhalten werden. Es wird also zwölf Differentialgleichungen geben, durch welche die Gesetze der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens eines Bogens und aller denkbaren Seitenquotienten eines mit dem Bogen in der angegebenen Weise veränderlichen Dreiecks vollständig dargestellt werden. Indem man aus diesen Differentialgleichungen die abhängig Veränderlichen durch Integration als Functionen ihrer willkürlich Veränderlichen entwickelt, erhält man in ebenfalls zwölf Gleichungen jeden der sechs Seitenquotienten durch den zugehörigen Kreisbogen, und den Kreisbogen durch jeden dieser Seitenquotienten ausgedrückt. Diese letzteren Gleichungen, durch welche die Gesetze der Abhängigkeit von Winkeln und Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck allseitig dargestellt

werden, enthalten dann die vollständige Lösung des Fundamentalproblems der ebenen Trigonometrie.

§. 89.

Differentiation der Kreisfunctionen bei willkürlich veränderl. Bogen.

Es sollen zuerst der Bogen als die willkürlich Veränderliche x, und die geraden Linien, deren Zahlenwerthe für einen Radius $= 1$ den Seitenquotienten entsprechen, als die abhängig Veränderlichen betrachtet werden, und die Differentialquotienten der unbekannten durch $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. angedeuteten Functionen aufgesucht werden.

1) Heißt der Zahlenwerth des Bogens ab (Fig. 35) als die willkürlich Veränderliche x, so ist $\sin x$ der Zahlenwerth der geraden Linie db. Läßt man den Bogen wachsen um den Werth von be, so wächst der Sinus desselben um den Werth von ge. Der Quotient $\frac{ge}{be}$ ist also der Differenzquotient. Der Grenzwerth, welchem sich dieser Differenzquotient bei fortgesetzter Verkleinerung der Zunahmen des Bogens und seines Sinus ohne Ende nähert, ist leicht zu bestimmen. Denn je kleiner die Zunahme be des Bogens gesetzt wird, desto mehr fällt sie mit der Tangente bf des Punktes b zusammen, und desto mehr nähert sich das gemischtlinigte Dreieck gbe einem geradlinigten, welches dieselben Winkel wie das Dreieck gbf hat, und ihm ähnlich ist. Die Seiten gf und bf stellen also das Verhältniß dar, welchem sich das Verhältniß der Zunahmen ge und be endlos nähert bei Verkleinerung dieser Zunahmen. Der Quotient $\frac{gf}{bf}$ ist als der Grenzwerth des Differenzquotienten $\frac{ge}{be}$ demnach der Differentialquotient des Sinus und seines Bogens. Man konnte zu demselben Resultat etwa auch durch folgenden Schluß gelangen. Der Differentialquotient des Sinus und des Bogens gibt bekanntlich an, wie die Zunahmen dieser Veränderlichen sich ver-

halten würden, wenn dieſelben mit der im Punkte b vorhandenen momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens gleichmäßig wachſend fortgingen, d. h. denn, da die geraden Linien db, he, nur mit einer geraden gleichmäßig wachſend ſein können, wenn die krumme Linie mit der Richtung, die ſie im Punkte b hat, als gerade Linie oder in der Richtung der Tangente bf fortginge. Alſo ſtellen gf und bf zwei zuſammengehörige beliebige hypothetiſche Zunahmen vor, welche die Veränderlichen unter der Vorausſetzung des im Punkte b eintretenden gleichmäßigen Wachſens angenommen hätten, und der Quotient $\frac{gf}{bf}$ iſt der Differentialquotient des Sinus und des Bogens. Da das Dreieck gbf dem Dreieck cdb ähnlich, und der Winkel fbg dem Winkel cbd gleich iſt, ſo iſt der Quotient $\frac{gf}{bf}$ gleich dem Quotient $\frac{cd}{cb}$, oder gleich dem Coſinus des Bogens x. Mithin haben wir

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

Der Differentialquotient der unbekannten Function sin x erſcheint hier zwar noch durch eine ebenfalls unbekannte und unentwickelte Function von x ausgedrückt; doch kann, wie wir weiter ſehen werden, dieſer durch Differentiation hervorgebrachte Uebergang der Einen Function in die Andere ſelbſt zu ihrer Entwickelung benutzt werden. Zunächſt laſſen wir uns an dem Reſultate genügen, daß die veränderliche momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachſens des Sinus und ſeines Bogens durch den jedesmaligen Werth des Coſinus dieſes Bogens gegeben iſt.

Die Richtigkeit der gefundenen Differentialgleichung kann auf demſelben anſchaulichen Wege der Conſtruction durch alle vier Quadranten des Kreiſes leicht nachgewieſen werden. Findet man dies zu weitläufig, und will man

den Satz, daß $\sin(a+b) - \sin a = 2\sin\frac{1}{2}b \cdot \cos(a+\frac{1}{2}b)$ ist, welcher ebenfalls ohne Kenntniß der Functionen auf constructivem Wege aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet werden kann, als bekannt und seine Gültigkeit als für alle Quadranten erwiesen betrachten, so kann durch denselben auch ohne Hinblick auf Constructionen auf rein operativem Wege der Differentialquotient des Sinus gefunden werden. Denn läßt man den Zahlenwerth x des Bogens um die Zahl k wachsen, so wird die Function $\sin(x+k)$; und zieht man davon den ursprünglichen Werth der Function, nämlich $\sin x$, ab, so ist $\sin(x+k) - \sin x$, oder was nach obiger Gleichung dasselbe ist, $2\sin\frac{1}{2}k \cdot \cos(x+\frac{1}{2}k)$ die mit der Zunahme k des Bogens verbundene Zunahme des Sinus. Wird dieselbe durch die Zunahme k des Bogens dividirt, so stellt $\frac{2\sin\frac{1}{2}k \cdot \cos(x+\frac{1}{2}k)}{k}$ oder $\frac{2\sin\frac{1}{2}k}{k} \cdot \cos(x+\frac{1}{2}k)$ oder $\frac{\sin\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k} \cdot \cos(x+\frac{1}{2}k)$ den Differenzquotienten des Sinus und des Bogens dar. Der Grenzwerth dieses Differenzquotienten ist sehr leicht zu bestimmen. Denn da der Sinus eines Bogens und der Bogen selbst sich bei Verkleinerung des Bogens ohne Ende der Gleichheit nähern, so nähert sich der Werth des Bruches $\frac{\sin\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}$ bei Verkleinerung der Zunahme k des Bogens ohne Ende der Zahl 1, und 1 ist der Grenzwerth dieses Bruches für ein annullirtes k. Und da $\cos(x+\frac{1}{2}k)$ für ein annullirtes k in

halten würden, wenn dieselben mit der im Punkte b vorhandenen momentanen verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens gleichmäßig wachsend fortgingen, d. h. denn, da die geraden Linien db, he, nur mit einer geraden gleichmäßig wachsend sein können, wenn die krumme Linie mit der Richtung, die sie im Punkte b hat, als gerade Linie oder in der Richtung der Tangente bf fortginge. Also stellen gf und bf zwei zusammengehörige beliebige hypothetische Zunahmen vor, welche die Veränderlichen unter der Voraussetzung des im Punkte b eintretenden gleichmäßigen Wachsens angenommen hätten, und der Quotient $\frac{gf}{bf}$ ist der Differentialquotient des Sinus und des Bogens. Da das Dreieck gbf dem Dreieck cdb ähnlich, und der Winkel fbg dem Winkel cbd gleich ist, so ist der Quotient $\frac{gf}{bf}$ gleich dem Quotient $\frac{cd}{cb}$, oder gleich dem Cosinus des Bogens x. Mithin haben wir

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

Der Differentialquotient der unbekannten Function sin x erscheint hier zwar noch durch eine ebenfalls unbekannte und unentwickelte Function von x ausgedrückt; doch kann, wie wir weiter sehen werden, dieser durch Differentiation hervorgebrachte Uebergang der Einen Function in die Andere selbst zu ihrer Entwickelung benutzt werden. Zunächst lassen wir uns an dem Resultate genügen, daß die veränderliche momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens des Sinus und seines Bogens durch den jedesmaligen Werth des Cosinus dieses Bogens gegeben ist.

Die Richtigkeit der gefundenen Differentialgleichung kann auf demselben anschaulichen Wege der Construction durch alle vier Quadranten des Kreises leicht nachgewiesen werden. Findet man dies zu weitläufig, und will man

den Satz, daß $\sin(a+b) - \sin a = 2\sin\frac{1}{2}b.\cos(a+\frac{1}{2}b)$ ist, welcher ebenfalls ohne Kenntniß der Functionen auf constructivem Wege aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet werden kann, als bekannt und seine Gültigkeit als für alle Quadranten erwiesen betrachten, so kann durch denselben auch ohne Hinblick auf Constructionen auf rein operativem Wege der Differentialquotient des Sinus gefunden werden. Denn läßt man den Zahlenwerth x des Bogens um die Zahl k wachsen, so wird die Function $\sin(x+k)$; und zieht man davon den ursprünglichen Werth der Function, nämlich $\sin x$, ab, so ist $\sin(x+k) - \sin x$, oder was nach obiger Gleichung dasselbe ist, $2\sin\frac{1}{2}k.\cos(x+\frac{1}{2}k)$ die mit der Zunahme k des Bogens verbundene Zunahme des Sinus. Wird dieselbe durch die Zunahme k des Bogens dividirt, so stellt $\frac{2\sin\frac{1}{2}k.\cos(x+\frac{1}{2}k)}{k}$ oder $\frac{2\sin\frac{1}{2}k}{k}.\cos(x+\frac{1}{2}k)$ oder $\frac{\sin\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}.\cos(x+\frac{1}{2}k)$ den Differenzquotienten des Sinus und des Bogens dar. Der Grenzwerth dieses Differenzquotienten ist sehr leicht zu bestimmen. Denn da der Sinus eines Bogens und der Bogen selbst sich bei Verkleinerung des Bogens ohne Ende der Gleichheit nähern, so nähert sich der Werth des Bruches $\frac{\sin\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}$ bei Verkleinerung der Zunahme k des Bogens ohne Ende der Zahl 1, und 1 ist der Grenzwerth dieses Bruches für ein annullirtes k. Und da $\cos(x+\frac{1}{2}k)$ für ein annullirtes k in

$\cos x$ übergeht, so ist $1 . \cos x$ der Grenzwerth des Differenzquotienten $\frac{\sin \frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k} . \cos(x + \frac{1}{2}k)$, und also wie vorher $\cos x$ der Differentialquotient des Sinus und seines Bogens.

2) Es soll der Differentialquotient des Cosinus und des Bogens bestimmt werden. Indem der Bogen ab (Fig 35) um den Werth von be wächst, nimmt der Cosinus cd um den Werth von dh oder bg ab, oder die Zunahme des Cosinus ist der negative Zahlenwerth der Linie bg. Folglich ist der Zahlenwerth des Quotienten $\frac{bg}{be}$ negativ genommen, oder $-\frac{bg}{be}$ Ausdruck des Differenzquotienten. Der Grenzwerth des Quotienten $\frac{bg}{be}$ ist aus den vorher angegebenen Gründen nichts Anderes als der Quotient $\frac{bg}{bf}$, weil das gemischtlinigte Dreieck gbe bei Verkleinerung des Bogens be sich ohne Ende einem geradlinigten Dreieck nähert, welches dem Dreieck gbf ähnlich ist. Da nun der Quotient $\frac{bg}{bf}$ gleich ist dem Quotienten $\frac{db}{cb}$, oder gleich ist dem Sinus des Bogens x, so ist der Sinus von x negativ genommen der Differentialquotient des Cosinus und des Bogens, oder

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Man konnte diese Differentialgleichung auch schon vermittelst der vorhergehenden finden, indem man den Cosinus des Bogens x durch den Sinus desselben ausdrückte. Denn da $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, so braucht man nur $\frac{\pi}{2} - x$

als eine Function von x, und sin $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ als Function einer Function von x anzusehen, und nach §. 67 den Differentialquotienten von sin $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ darzustellen, um den Differentialquotienten von cos x zu haben. Setzen wir der Einfachheit wegen statt $\frac{\pi}{2} - x$ den Buchstaben z, so haben wir $\frac{d \sin z}{dz} = \cos z$, und nach Rückführung des Werthes für z, $\frac{d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Da nun $\frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -1$ oder $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1 . dx$, so erhält man durch Einführung dieses Werthes von $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ die Gleichung $\frac{d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-1 . dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ oder $\frac{d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Werden nun in dieser Gleichung statt cos $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und sin $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ die ihnen gleichgeltenden Ausdrücke sin x und cos x wieder substituirt, so erhält man wie vorher $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$.

3) Die Differentialquotienten der Tangente, der Cotangente, der Secante und der Cosecante können zwar sämmtlich auch wie die des Sinus und Cosinus aus der Betrachtung der Figur abgeleitet werden, indem die Zahlenwerthe der Linien ae, gf, ce und cf (Fig. 34) die Werthe von Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante des Bogens ab repräsentiren; doch wollen wir der Kürze

wegen es vorziehen, diese Functionen durch Sinus und Cosinus auszudrücken, und die Differentialquotienten derselben gemäß den Regeln, durch welche die Differentiation zusammengesetzter Functionen auf die einfacher Functionen zurückgeführt wird, bestimmen. Zuerst ist $\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Da man die Differentiationsregeln der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ hat, so ist die Form $\frac{\sin x}{\cos x}$ als Quotient zweier Functionen nach §. 66 zu differentiiren. Wir erhalten

$$\frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos x . \cos x - \sin x . -\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2},$$

und, da $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ ist, $\frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$.

Folglich $\frac{d\,\text{tang}\, x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$.

4) Da $\text{cotang}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, und $\frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx}$

$$= \frac{-(\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(\sin x)^2} = -\frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2},$$

so ist $\frac{d\,\text{cotang}\, x}{dx} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$.

5) Die Secante eines Bogens x wird erhalten durch Umkehrung des Bruches, welcher den Werth des Cosinus angibt, oder es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Man kann $\frac{1}{\cos x}$ in der Form von $\frac{x^0}{\cos x}$ als Quotient zweier Functionen betrachten und erhält nach §. 66 $\frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos x . 0 - 1 . -\sin x}{(\cos x)^2}$

$= \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$, oder man kann $\frac{1}{\cos x}$ in der Form von

$(\cos x)^{-1}$ als Function einer Function betrachten, und erhält nach §. 67

$$\frac{d(\cos x)^{-1}}{dx} = -(\cos x)^{-2}.-\sin x = (\cos x)^{-2}.\sin x = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}.$$

Also ist

$$\frac{d\sec x}{dx} = \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\tang x}{\cos x}.$$

6) Da die Cosecante eines Bogens x durch die Umkehrung des Bruches, welcher den Sinus des Bogens x darstellt, erhalten wird, oder $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, und

$$\frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{\sin x \,.\, 0 - 1 \,.\, \cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2},$$ so ist

$$\frac{d\operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{\operatorname{cotang} x}{\sin x}.$$

Die sechs Functionen $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\operatorname{cotang} x$, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ haben, wie aus den vorstehenden sechs Differentialgleichungen zu ersehen, das Eigenthümliche, daß der Differentialquotient einer jeden durch irgend eine andere oder durch eine Verbindung von mehreren dieser sechs Functionen gegeben ist, und daß man bei der Differentiation dieser Functionen immer innerhalb des Kreises derselben bleibt.

§. 90.

Differentiation der Kreisfunctionen bei abhängig veränderl. Bogen.

Es ist nun noch der umgekehrte Fall zu betrachten, in welchem die geraden Linien am Kreis, deren Zahlenwerthe den einzelnen Seitenquotienten des mit dem Bogen zugleich veränderlichen rechtwinkligen Dreiecks entsprechen, die willkürlich Veränderlichen sind, und der einem durch den Zahlenwerth x gegebenen Sinus, Cosinus u. s. w. zugehörige Bogen die abhängig Veränderliche ist, und es sind die Differentialquotienten der Functionen $\operatorname{arc}(\sin = x)$, $\operatorname{arc}(\cos = x)$ u. s. w. als Functionen der Veränderlichen x darzustellen. Wie diese Differentialquotienten sehr einfach

und anschaulich aus der Betrachtung der Figur abgeleitet werden können, indem man den geraden Linien und dem Bogen zusammengehörige Zunahmen ertheilt, und zusieht, welche Linien durch ihr Verhältniß den Grenzwerth des Differenzquotienten darstellen, ist schon §. 75 an zwei Beispielen gezeigt worden, wo die Differentialquotienten $\frac{d\,arc\,(sin = x)}{dx}$ und $\frac{d\,arc\,(tang = x)}{dx}$ auf diese Weise gefunden wurden. Daß für die übrigen den Werthen der Functionen Cosinus, Cotangente, Secante und Cosecante entsprechenden geraden Linien und die ihnen zugehörigen Bogen die Differentialquotienten auf demselben Wege anschaulicher Construction gefunden werden können, ist leicht zu sehen. Wir wollen daher jetzt der Abwechselung wegen ein anderes Verfahren einschlagen. Da wir Differentialgleichungen suchen zwischen denselben Veränderlichen, welche in den Differentialgleichungen des vorhergehenden Paragraphen vorkommen, nämlich zwischen einem Bogen und den zugehörigen Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante, und die Veränderlichen nur ihre Rollen tauschen sollen als willkürlich Veränderliche und als abhängig Veränderliche, so brauchen wir die vorher gefundenen Differentialquotienten nur umzukehren, und dieselben als Functionen der nun angenommenen willkürlich Veränderlichen auszudrücken. Nun sind die hierbei angenommenen willkürlich Veränderlichen die Functionen Sinus, Cosinus u. s. w. und die Differentialquotienten derselben sind, wie vorher gefunden, sämmtlich wieder irgend welche von diesen Functionen. Wir werden also zu unserm Zwecke kommen, wenn wir im Stand sind, jede von diesen Functionen durch die Andere, die als willkürlich Veränderliche gilt, auszudrücken. Die Art, wie von diesen Functionen Eine durch die Andere ausgedrückt werden kann, wollen wir dabei als bekannt voraussetzen, indem dies theils aus der Betrachtung der Figur 34 leicht gefunden werden kann, und theils diese Ueberführungen der einen Function in die

andere in den Elementen der Trigonometrie überall abgehandelt werden.

1) Unsere erste Differentialgleichung war $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$. Durch Umkehrung dieses Differentialquotienten erhalten wir $\frac{dx}{d \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}$. Da die Function $\sin x$ jetzt als die willkürlich Veränderliche betrachtet werden soll, so drücken wir sie durch ein einfaches Zeichen einer Veränderlichen, durch den Buchstaben z aus, und setzen dz statt $d \sin x$. Ist aber z der Sinus eines Bogens x, so ist der Bogen x selbst natürlich nichts Anderes als ein Bogen, dessen Sinus gleich z ist, und es ist statt x zu setzen $\operatorname{arc}(\sin = z)$, und statt dx ebenso $d \operatorname{arc}(\sin = z)$. Indem also, wenn $\sin x$ als die willkürlich Veränderliche genommen wird, der Ausdruck $\frac{dx}{d \sin x}$ sich verwandelt in $\frac{d \operatorname{arc}(\sin = z)}{dz}$, haben wir auch noch den Werth dieses Ausdrucks, nämlich $\frac{1}{\cos x}$, durch z oder $\sin x$ als die nun angenommene willkürlich Veränderliche auszudrücken. Nun ist bekanntlich $\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$. Gemäß unserer Substitution muß also statt $\cos x$ gesetzt werden $\sqrt{1 - z^2}$. Wir erhalten demnach

$$\frac{d \operatorname{arc}\ (\sin = z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Will man wieder, wie gewöhnlich, die willkürlich Veränderliche durch x vorstellen, so hat man

$$\frac{d \operatorname{arc}\ (\sin = x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Man wird bemerken, daß diese durch Umkehrung des Differentialquotienten erhaltene Differentialgleichung dieselbe ist, welche wir in §. 75 auf constructivem Wege abgeleitet haben.

2) Der Differentialquotient des Cosinus eines Bo-

gens x war gegeben durch die Gleichung $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$. Durch Umkehrung erhalten wir $\frac{dx}{d\cos x} = -\frac{1}{\sin x}$. Bezeichnen wir den Cosinus des Bogens x durch z, und folglich den Bogen x selbst durch arc (cos = z), und setzen wir demgemäß dz statt d cos x und d arc (cos = z) statt dx, so haben wir noch den Werth des Differentialquotienten $\frac{d\,arc\,(cos = z)}{dz}$, welcher ist $-\frac{1}{\sin x}$, durch z oder cos x auszudrücken. Nun ist $\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2} = \sqrt{1-z^2}$ und folglich

$$\frac{d\,arc\,(cos = z)}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

3) Durch Umkehrung des in der Gleichung $\frac{d\,tang\,x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$ gegebenen Differentialquotienten erhalten wir $\frac{dx}{d\,tang\,x} = (\cos x)^2$. Wird in dieser Gleichung z statt tang x, und demgemäß arc (tang = z) statt x gesetzt, und ebenso dz statt d tang x und d arc (tang = z) statt dx, so ist nur noch cos x durch tang x oder z auszudrücken. Da nun $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+(tang\,x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ und $(\cos x)^2 = \frac{1}{1+z^2}$, so haben wir

$$\frac{d\,arc\,(tang = z)}{dz} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Hier haben wir dieselbe Differentialgleichung, welche oben §. 75 aus den Linienverhältnissen der Figur 31 abgeleitet worden ist.

4) Wird in der Differentialgleichung $\frac{d\,cotang\,x}{dx} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$ die Umkehrung vorgenommen, so haben wir $\frac{dx}{d\,cotang\,x}$

$= -(\sin x)^2$. Wenn wir z statt cotang x und folglich arc (cotang = z) statt x setzen, so haben wir, um den Differentialquotienten $\frac{d \operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = z)}{dz}$ als Function von z zu erhalten, nur noch sin x durch cotang x oder z auszudrücken. Da nun $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{cotang} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ und $(\sin x)^2 = \frac{1}{1+z^2}$, so ist

$$\frac{d \operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = z)}{dz} = -\frac{1}{1+z^2}.$$

5) Aus der Gleichung $\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\tang x}{\cos x}$ folgt $\frac{dx}{d \sec x} = \frac{\cos x}{\tang x}$. Wir setzen z statt sec x und arc (sec = z) statt x. Es sind noch die Functionen cos x und tang x beide durch sec x oder z auszudrücken. Nun ist $\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{z}$ und $\tang x = \sqrt{(\sec x)^2 - 1} = \sqrt{z^2 - 1}$, und folglich $\frac{\cos x}{\tang x} = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$. Also ist

$$\frac{d \operatorname{arc}(\sec = z)}{dz} = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}.$$

6) Endlich folgt aus $\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = -\frac{\operatorname{cotang} x}{\sin x}$ durch Umkehrung $\frac{dx}{d \operatorname{cosec} x} = -\frac{\sin x}{\operatorname{cotang} x}$. Wird cosec x als die willkürlich Veränderliche durch z und x durch arc(cosec=z) dargestellt, so sind noch sin x und cotang x durch cosec x oder z auszudrücken. Nun ist $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{z}$ und $\operatorname{cotang} x = \sqrt{(\operatorname{cosec} x)^2 - 1} = \sqrt{z^2 - 1}$, und also $\frac{\sin x}{\operatorname{cotang} x} = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$. Mithin ist

$$\frac{d \operatorname{arc}(\operatorname{cosec} = z)}{dz} = -\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}.$$

Man wird unter den in dieſem und in dem vorhergehenden Paragraphen aufgeſtellten Differentialgleichungen den weſentlichen Unterſchied bemerken, daß die Differentialquotienten der unbekannten oder noch unentwickelten Functionen $\sin x$, $\cos x$ u. ſ. w. ſich ſämmtlich durch eben dieſe noch unbekannten Functionen der Veränderlichen x darſtellen, daß aber die Differentialquotienten der Functionen $\text{arc}(\sin = x)$, $\text{arc}(\cos = x)$ u. ſ. w. durch völlig entwickelte und zwar ſehr einfache Functionen der willkürlich Veränderlichen x gegeben ſind.

Daß die in den beiden letzten Paragraphen aufgeſtellten Differentiationsregeln der Kreisfunctionen von der allerausgebreitetſten Anwendung ſind in der ganzen Differentialrechnung, wird man in Betracht der beiden Raumelemente, auf welche ſie ſich beziehen, von ſelbſt erwarten. Sind die Kreisfunctionen mit ſich ſelbſt oder mit andern Functionen zu einer Function combinirt, oder ſind Functionen einer Kreisfunction gegeben, ſo wird, da nun die Differentialquotienten der einzelnen Kreisfunctionen für ſich bekannt ſind, die Differentiation aller ſolcher zuſammengeſetzten Functionen keine Schwierigkeit mehr darbieten, und nach den für alle Arten arithmetiſcher Zuſammenſetzung geltenden Differentiationsregeln zu bewerkſtelligen ſein.

Wäre die Function z. B. $\cos x \,.\, \sin x$ zu differentiiren, ſo hat man ein Product zweier Functionen, deren Differentialquotienten einzeln genommen bekannt ſind, und es folgt aus der allgemeinen Regel des §. 65

$$\frac{d \cos x \,.\, \sin x}{dx} = (\cos x)^2 - (\sin x)^2.$$

Die Function $(\sin x)^m$ gibt als Function einer Function nach §. 67 die Differentialgleichung $\frac{d\,(\sin x)^m}{dx} = m\,(\sin x)^{m-1} \,.\, \cos x$, oder man ſetze, wenn dies deutlicher iſt, ſtatt $\sin x$ erſt ein einfaches Zeichen z, und hat $\frac{d\,z^m}{dz} = m\,z^{m-1}$, und nach Rückführung des Werthes

von z zunächſt $\frac{d(\sin x)^m}{d \sin x} = m(\sin x)^{m-1}$. Nun iſt $\frac{d \sin x}{dx}$ $= \cos x$ oder $d \sin x = \cos x \,.\, dx$, und nach Einführung dieſes Werthes von $d \sin x$ in die letzte Gleichung erhält man $\frac{d(\sin x)^m}{\cos x \,.\, dx} = m(\sin x)^{m-1}$ oder $\frac{d(\sin x)^m}{dx} = m(\sin x)^{m-1} \,.\, \cos x$ wie vorher.

Es ſei der Logarithmus einer Kreisfunction z. B. l tang x als die zu differentiirende Function gegeben. Wird zuerſt z ſtatt tang x geſetzt, ſo hat man nach bekannter Regel $\frac{dlz}{dz} = \frac{1}{z}$ und demnach $\frac{dl \tang x}{d \tang x} = \frac{1}{\tang x}$. Nun iſt $\frac{d \tang x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$ oder $d \tang x = \frac{1}{(\cos x)^2} \,.\, dx$, und folglich, nach Einführung dieſes Werthes von $d \tang x$ in die vorſtehende Gleichung, $\frac{dl \tang x}{\frac{1}{(\cos x)^2} \,.\, dx} = \frac{1}{\tang x}$ oder

$$\frac{dl \tang x}{dx} = \frac{1}{\tang x} \,.\, \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Es ſei der Differentialquotient der Function $\cos x^{\sin x}$ zu bilden. Nach der im §. 86 gegebenen allgemeinen Differentiationsregel einer Function von der Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ erhält man

$$\frac{d \cos x^{\sin x}}{dx} = \cos x^{\sin x} \left(\cos x \,.\, l \cos x - \frac{(\sin x)^2}{\cos x} \right).$$

Dieſe wenigen Beiſpiele mögen hinreichen, indem es ſich ja von ſelbſt verſteht, daß bei Vorausſetzung der Differentiationsregeln der einzelnen Kreisfunctionen für ſich genommen alle möglichen Zuſammenſetzungen von Kreisfunctionen mit ſich ſelbſt und mit andern Functionen zu ihrer Differentiation nichts erfordern können, was in den allgemeinen Regeln nicht enthalten wäre.

§. 91.

Entwickelung der Kreisfunctionen.

Es bleibt nun noch übrig, die Functionen selbst, deren Differentialquotienten in den beiden vorhergehenden Paragraphen aufgestellt worden sind, zu entwickeln. Die Entwickelung wird, da die Differentialquotienten auf directem Wege gefunden sind, durch Integration bewerkstelligt werden können, vorausgesetzt, daß die erhaltenen Differentialquotienten nicht selbst noch unbekannte Functionen der willkürlich Veränderlichen sind, oder solche Functionen in sich schließen. Bei der Einen Klasse der Kreisfunctionen, bei derjenigen nämlich, in welcher Eins der Seitenverhältnisse Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. die willkürlich Veränderliche x ist, und der Bogen oder Winkel die abhängig Veränderliche, also bei den Functionen arc (sin = x) arc (cos = x) arc (tang = x), u. s. w., welche gewöhnlich cyclometrische Functionen heißen, hat diese Entwickelung nicht die geringste Schwierigkeit. Denn die Differentialquotienten dieser Functionen sind als sehr einfache entwickelte Functionen von x gegeben, welche sämmtlich nach dem binomischen Lehrsatz als unendliche Potenzenreihen der willkürlich Veränderlichen dargestellt, und in dieser Gestalt ohne Schwierigkeit integrirt werden können. Auf diesem Wege haben wir schon im §. 75 zwei von diesen Functionen, nämlich arc (sin = x) und arc (tang = x), entwickelt. Da dieses sehr einfache Verfahren der Entwickelung bei den übrigen cyclometrischen Functionen ganz dasselbe ist, und die Ausführung desselben sehr monoton ausfällt, so wollen wir uns mit derselben nicht aufhalten. Uebrigens können die beiden Functionen arc (cos = x) und arc (cotang = x) auch ohne Integration schon unmittelbar aus den Functionen arc (sin = x) und arc (tang = x) abgeleitet werden. Denn da $\text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}(\sin = x)$, so haben wir mit Benutzung der oben für arc (sin = x) gefundenen Reihe ohne Weiteres

$$\text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} - \ldots\ldots$$

und ebenso verhält es sich mit arc (cotang = x), da

$$\text{arc}(\text{cotang} = x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}(\text{tang} = x)$$ ist.

Hat man aus einem Seitenverhältniß des rechtwinkligen Dreieckes oder aus der den Zahlenwerth dieses Seitenverhältnisses repräsentirenden geraden Linie den zugehörigen Bogen im ersten Quadranten berechnet, so versteht sich die Uebertragung auf die andern Quadranten von selbst, indem es hierbei nur auf eine anders zu wählende Constante ankommt. Wir können aber dieses und das Detail der Anwendung dieser Functionen überhaupt hier füglich bei Seite lassen, da es mit den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung nichts weiter zu schaffen hat, und den Gegenstand der Trigonometrie bildet.

Was aber die Entwickelung der durch $\sin x$ $\cos x$ u. s. w. angedeuteten unbekannten Functionen betrifft, welche, in so fern sie den cyclometrischen Functionen entgegengesetzt werden, unpassend goniometrische Functionen heißen, weil cyclometrisch und goniometrisch ganz dasselbe ist, indem eine Winkelmessung nur durch eine Kreisbogenmessung vermittelt wird und mit derselben zusammenfällt, und welche besser trigonometrische Functionen heißen, weil durch dieselben eine Dreiecksseite oder ein Seitenverhältniß berechnet wird,— was also die Entwickelung dieser trigonometrischen Functionen aus ihren Differentialgleichungen betrifft, so ist es damit eine ganz andere Sache als mit der Entwickelung der cyclometrischen. Da nämlich die Differentialquotienten dieser Functionen selbst unbekannte Functionen sind, so kann von einer Entwickelung des Sinus z. B. aus der Gleichung $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$ durch eigentliche Integration natürlich nicht die Rede sein. Die weitere Analyse des Begriffs der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen, und die Bestimmungen an denselben, welche man als hö-

here Grade ihrer verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens betrachten kann, deren Untersuchung aber dem zweiten Theile unserer Schrift vorbehalten ist, geben nun allerdings zur Entwickelung dieser Functionen sehr einfache Mittel, welche, ohne eigentliche Integration zu sein, doch mit derselben sehr verwandt sind, und in ihrem Effecte zum Theil mit ihr zusammenfallen. Es werden daher diese Mittel gewöhnlich in Bewegung gesetzt bei der vorliegenden Aufgabe.

Indessen ist doch leicht zu sehen, daß auch schon die Differentialgleichungen $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ und $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$, und die in denselben ausgesprochenen Eigenschaften der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ hinlängliche Mittel zur Entwickelung derselben darbieten. Ist eine dieser Functionen bekannt, so können dann natürlich alle übrigen durch Substitution dieser Entwickelung, und darauf folgende Integration leicht gefunden werden. Da der Differentialquotient der Function $\sin x$ die Function $\cos x$ ist, und der Differentialquotient dieser letzteren Function wieder $\sin x$ ist, nur negativ genommen, so sieht man, daß die Function $\sin x$ die Eigenschaft hat, sich selbst hervorzubringen nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, sobald man von ihrem Differentialquotienten wieder den Differentialquotienten nimmt. Es versteht sich nämlich von selbst, daß man jeden Differentialquotienten schlechthin als eine Function der Veränderlichen betrachten, und der Operation des Differentiirens unterwerfen kann, oder von jedem Differentialquotienten wieder den Differentialquotienten genommen denken kann. Dieselbe Eigenschaft, durch zweimalige Differentiation sich selbst hervorzubringen mit entgegengesetztem Vorzeichen, hat auch die Function $\cos x$. Denn der Differentialquotient von $\cos x$ ist $-\sin x$, und der von $-\sin x$ ist $-\cos x$. Nimmt man nun noch die andern aus der Betrachtung des Kreises sich ergebenden Eigenschaften der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ dazu, nämlich daß für $x = 0$ der Sinus von x

ebenfalls gleich Null und der Cosinus von x gleich 1 wird, und daß für ein negatives x der Sinus sein Vorzeichen wechselt, der Cosinus aber nicht, so hat man in diesen Eigenschaften die Mittel zur Entwickelung dieser Functionen vollständig zur Hand.

In so fern man die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ durch Potenzenreihen von x darstellen wollte, brauchte man zunächst nur, was sehr leicht ist, Potenzenreihen von x aufzufinden, welche die Eigenschaft haben, durch zweimalige Differentiation sich selbst hervorzubringen mit entgegengesetztem Vorzeichen. Da aber die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ durch die eben genannte Eigenschaft die größte Aehnlichkeit haben mit der Exponentialfunction e^x, welche durch einmalige Differentiation sich selbst hervorbringt, so ist der zunächst liegende Gedanke, diese Functionen nicht durch Potenzfunctionen von x, sondern durch Exponentialfunctionen von x mit der Grundzahl e darzustellen. Hierzu führt uns die Betrachtung des Differentialquotienten der Function e^{mx}. Denn da $\frac{de^{mx}}{dx} = me^{mx}$ (siehe §. 85), und der Differentialquotient von me^{mx} selbst gleich m^2e^{mx} und der Differentialquotient von m^2e^{mx} gleich m^3e^{mx} ist, u. s. w., so sieht man leicht, daß man durch den der Veränderlichen x zugesetzten Factor m, dessen aufsteigende Potenzen in den folgenden Differentialquotienten zu der ursprünglichen Function e^{mx} als Factoren zutreten, es völlig in seiner Gewalt hat, zu bestimmen, nach wie vielmaliger Differentiation die Exponentialfunction mit der Grundzahl e sich selbst hervorbringen soll entweder mit gleichem oder mit entgegengesetztem Vorzeichen. Man braucht nur die Zahl m so zu wählen, daß irgend eine bestimmte Potenz derselben gleich $+1$ oder -1 ist. Soll z. B. die Function e^{mx} so sein, daß sie nach zweimaliger Differentiation, wo sie $m^2.e^{mx}$ wird, sich selbst hervorbringt mit ungeändertem Vorzeichen, so muß $m^2 = +1$ sein, und folglich kann statt m sowohl $+1$ als -1 gesetzt werden; oder die Ex-

ponentialfunctionen e^x und e^{-x} haben die geforderte Eigenschaft. Soll aber die Function e^{mx} nach zweimaliger Differentiation sich selbst hervorbringen mit entgegengesetztem Vorzeichen, so muß $m^2 = -1$ und folglich $m = \sqrt{-1}$, und zwar $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ sein. Functionen von dieser Eigenschaft sind also $e^{x\sqrt{-1}}$ und $e^{-x\sqrt{-1}}$, und treffen also in dieser Beziehung mit den Functionen $\sin x$ und $\cos x$ zusammen.

Nun müssen auch noch die übrigen charakteristischen Eigenschaften des Sinus und Cosinus in Betracht gezogen werden. Die Function $\sin x$ soll für $x = 0$ selbst gleich Null, und $\cos x$ unter denselben Umständen $= 1$ werden. Die Functionen $e^{x\sqrt{-1}}$ und $e^{-x\sqrt{-1}}$ nehmen für $x = 0$ den Werth 1 an, und den Sinus von x kann also eine einzelne dieser Functionen jedenfalls nicht darstellen, höchstens den Cosinus. Da aber ferner die Function $\cos x$ ungeändert bleiben muß, wenn man das Vorzeichen von x verändert, und von den beiden Functionen $e^{x\sqrt{-1}}$ und $e^{-x\sqrt{-1}}$ keine ungeändert bleibt bei Veränderung des Vorzeichens von x, sondern jede in die andere übergeht, so kann auch keine dieser Functionen für sich allein den Cosinus von x darstellen. Indem aber bei Veränderung des Vorzeichens von x jede dieser Functionen in die andere übergeht, so sieht man, daß blos die Summe dieser Functionen die Eigenschaft hat, bei Veränderung des Vorzeichens von x sich selbst gleich zu bleiben, in so fern zugleich die Eigenschaft der Function, durch zweimalige Differentiation sich selbst hervorzubringen mit entgegengesetztem Vorzeichen, erhalten werden soll. Auf die Function $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ hat also die Veränderung des Vorzeichens von x keinen Einfluß. Nun soll die Function $\cos x$ für $x = 0$ gleich 1 werden; damit nun die Function $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$, welche für $x = 0$ den Zahlenwerth 2 annimmt, unter diesen Umständen gleich 1 werde, braucht man nur jeden

Theil derſelben zur Hälfte zu nehmen, und erhält $\frac{1}{2}.e^{x\sqrt{-1}}$ $+\frac{1}{2}.e^{-x\sqrt{-1}}$. Dieſe Exponentialfunction von x hat alſo die geforderten Eigenſchaften des Coſinus, nämlich nach zweimaliger Differentiation ſich ſelbſt hervorzubringen mit entgegengeſetztem Vorzeichen, für $x = 0$ den Werth 1 anzunehmen, und bei Veränderung des Vorzeichens von x ſich ſelbſt gleich zu bleiben. Als Exponentialfunction dargeſtellt erhalten wir mithin

$$\cos x = \frac{1}{2}e^{x\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{-1}}.$$

Um auch die Function $\sin x$ durch Exponentialfunctionen von x darzuſtellen, braucht man nicht mehr die für die Auffindung des $\cos x$ angewandte Schlußreihe zu wiederholen, ſondern kann gleich von der Differentialgleichung $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ Gebrauch machen. Dieſelbe belehrt uns, daß der Differentialquotient von $\cos x$ oder von $\frac{1}{2}e^{x\sqrt{-1}}$ $+\frac{1}{2}e^{-x\sqrt{-1}}$ mit -1 multiplicirt den Sinus von x darſtellt. Die Ausdrücke der übrigen trigonometriſchen Functionen in Exponentialfunctionen von x verſtehen ſich dann ganz von ſelbſt, da dieſelben auf Zuſammenſetzungen der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ hinauslaufen.

Wir wollen aber dieſe für die trigonometriſchen Functionen ſo einfach ſich darbietenden Formen, die bei ihrer weiteren Verfolgung auf ein zwar höchſt wichtiges und intereſſantes, aber unſerm Hauptgegenſtand ganz fremdes Gebiet führen, und die zugleich, wenn ihre Bedeutung gerechtfertigt erſcheinen ſoll, noch eine anderweitige ausführliche Grundlegung verlangen, hier bei Seite laſſen, und vielmehr dieſe Functionen durch Potenzenreihen von x darzuſtellen ſuchen. Es ſind zwar auch dieſe Potenzenreihen eigentlich ſchon durch die gefundenen Exponentialfunctionen

gegeben, weil wir eine Function von der Form e^{mx} nach §. 82 ja selbst als Potenzenreihe von x darstellen können, und wir also cos x dadurch in einer Potenzenreihe von x erhalten, daß wir die Regel jenes Paragraphen auf die beiden Theile $\frac{1}{2}e^{x\sqrt{-1}}$ und $\frac{1}{2}e^{-x\sqrt{-1}}$ einzeln anwenden, und die erhaltenen Potenzenreihen addiren. Indem wir aber hier überhaupt das Recht des Gebrauches imaginärer Formen auf sich beruhen lassen, wollen wir uns auf solche Formen auch nicht stützen, und die Potenzenreihen ursprünglich entwickeln.

Es soll zuerst die Reihe für cos x aufgestellt werden. Eine Potenzenreihe der Veränderlichen kann nach zweimaliger Differentiation sich selbst hervorbringen nur dadurch, daß jedes Glied der Reihe bei dieser Operation in ein anderes Glied der Reihe übergeht, wobei die Reihe zugleich unendlich angenommen werden muß. Wir denken uns die Reihe so geordnet, daß jedes Glied derselben nach zweimaliger Differentiation in das nächst vorhergehende übergeht. Mithin muß, da bei jeder Differentiation einer Potenz der Exponent um 1 vermindert wird, der Exponent jedes folgenden Gliedes um 2 größer sein als der des vorhergehenden. Weil die gesuchte Reihe für $x = 0$ den Zahlenwerth 1 annehmen soll, so müssen die Exponenten alle positiv sein. Und da Potenzen von x mit positivem Exponenten sich alle annulliren für den Nullwerth von x, so muß die Reihe das constante Glied $+1$ oder $+x^0$ als niedrigste Potenz von x enthalten. Die folgenden Potenzen von x sind also x^2, x^4.... Damit die Reihe mit lauter positiven Exponenten nach zweimaliger Differentiation sich selbst hervorbringt mit entgegengesetztem Vorzeichen, so müssen die Vorzeichen der aufeinander folgenden Glieder abwechseln. Nennen wir die Coefficienten der auf das erste Glied 1 folgenden Glieder a, b, c, d..., so hat die Reihe für cos x die Form $1 - ax^2 + bx^4 - cx^6 + dx^8 - \ldots$ Es sind also nur noch die Coefficienten a, b, c, d zu bestimmen. Das

Glied ax^2 soll nach zweimaliger Differentiation gleich 1 werden. Der Differentialquotient von ax^2 ist $2ax$, und der Differentialquotient von $2ax$ ist $2a$. Also ist, da $2a = 1$ sein soll, $a = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$. Das Glied bx^4 gibt nach der ersten Differentiation $4.bx^3$, und nach der zweiten $3.4.bx^2$. Und da $3.4.bx^2 = ax^2$, also $3.4.b = a$ oder $3.4.b = \frac{1}{1.2}$ sein soll, so ist $b = \frac{1}{1.2.3.4}$. Ebenso gibt das Glied cx^6 nach der ersten Differentiation $6.cx^5$, und nach der zweiten $5.6.cx^4$. Nun soll $5.6.cx^4 = bx^4$, also $5.6.c = b$, oder $5.6.c = \frac{1}{1.2.3.4}$ sein. Folglich ist $c = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$. Ebenso findet man $d = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ u. s. w. Wir erhalten also nach Einführung der für die Coefficienten a, b, c, d gefundenen Werthe die Gleichung

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Aus dieser Entwickelung des Cosinus ergeben sich leicht die Entwickelungen der übrigen trigonometrischen Functionen. Da erstens $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$, so sieht man, daß man den Differentialquotienten der eben für $\cos x$ gefundenen Reihe nur mit -1 zu dividiren braucht, um die Reihe für $\sin x$ zu haben. Der Differentialquotient der obigen Reihe ist $-x + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$ Denselben durch -1 dividirt, erhalten wir

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

Oder da $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, so konnte auch, wenn man für $\cos x$ die Entwickelung desselben setzt, die Function $\sin x$ durch Integration gefunden werden. Denn man hat

$$\frac{d\sin x}{dx} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

$$\sin x = \int 1.dx - \int \frac{x^2}{1.2}.dx + \int \frac{x^4}{1.2.3.4}.dx - \int \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}.dx..$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

Die andern trigonometrischen Functionen ergeben sich aus diesen beiden. Da $\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so braucht man die Entwickelung von $\sin x$ nur durch die von $\cos x$ zu dividiren, und erhält

$$\text{tang}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots.$$

Oder man konnte, da $\frac{d\,\text{tang}\, x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$ (siehe §. 89) mit dem Quadrat der Entwickelung von $\cos x$ in 1 dividiren, und die so erhaltene Potenzenreihe integriren, und wäre zu demselben Resultat gekommen.

Die für $\text{tang}\, x$ gefundene Reihe hat den Mangel, daß die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x nur als numerische Resultate ohne Angabe ihrer inneren Structur und Zusammensetzung erscheinen, und daß dieselbe kein Gesetz über den Fortgang der Coefficienten liefert. Sollte in dem Falle, als die Function $\text{tang}\, x$ auf dem hier angegebenen Wege entwickelt wird, auch das Gesetz der Coefficientenbildung bestimmt werden, so werden dazu einige Sätze erfordert, die wir nicht als bekannt annehmen wollen, und deren Aufstellung uns von unserm Gegenstand gänzlich abführen würde. Wir lassen es daher bei den numerischen Werthen der Coefficienten sein Bewenden haben. Mit den Coefficienten der Entwickelungen der Functionen $\text{cotang}\, x$, $\sec x$ und $\text{cosec}\, x$ verhält es sich ebenso. In so fern man aber auf dieses Coefficientengesetz verzichtet, so können die Entwickelungen dieser Functionen durch die

Gleichungen $\text{cotang}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$ ohne Weiteres abgeleitet werden.

§. 92.

Abgekürzte Integrationsregeln, die aus dem Vorhergehenden folgen.

Die Entwickelungen sämmtlicher Kreisfunctionen stellen sich, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, in unendlichen Potenzenreihen der willkürlich Veränderlichen dar. Es versteht sich daraus von selbst, daß man sich, sobald man bei der wirklichen Berechnung eines Winkels aus einem Seitenverhältniß des rechtwinkligen Dreiecks oder eines Seitenverhältnisses aus einem Winkel von diesen Reihen Gebrauch machen wollte, überall durch außerordentlich weitläufige und mühsame Rechnungen aufgehalten sehen würde. Man hat daher für die Bedürfnisse der Anwendung Tafeln, die sogenannten trigonometrischen, entworfen, aus welchen man für jeden gegebenen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks jedes von demselben abhängige Seitenverhältniß, und für jedes gegebene Seitenverhältniß jeden davon abhängigen Winkel ablesen kann. Nur in so fern demnach eine Kreisfunction immer als eine ihrem Werthe nach bekannte Größe betrachtet werden darf, kann von Integrationsregeln, durch welche die Integrale gewisser Formen auf Kreisfunctionen statt auf unendliche Reihen gebracht werden, die Rede sein. Denn in den im vorhergehenden Paragraph gegebenen Entwickelungen der Kreisfunctionen hat man die eigentliche Integration dieser Formen. Man weiß z. B. daß $\frac{d\,\text{arc}\,(\text{tang} = x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ oder $d\,\text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{1}{1+x^2}.dx$. Das Integral von $\frac{1}{1+x^2}.dx$ kann freilich nur durch eine unendliche Reihe dargestellt werden, und wir wissen, daß $\int \frac{1}{1+x^2}.dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots$ Da aber $\text{arc}\,(\text{tang} = x)$

bei Voraussetzung trigonometrischer Tafeln für die Anwendung wenigstens als eine entwickelte Function gelten kann, so erreicht man den Zweck der Integration, wenn man statt $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ kurzweg arc (tang = x) setzt. Auf diese Weise bildet man aus den oben in den §§. 89 und 90 aufgestellten zwölf Differentialgleichungen ebenso viele abgekürzte Integrationsregeln, oder Regeln zur Zurückführung gewisser Integrale auf berechnete Kreisfunctionen. Diese Regeln verstehen sich zwar nach jenen Differentialgleichungen ganz von selbst, doch sollen zur besseren Einprägung und der leichteren Uebersicht wegen die auf die Weise entstehenden so häufig angewandten Substitutionsformeln hier zusammengestellt werden.

$$\int \cos x \, dx = \sin x \qquad \int -\sin x \, dx = \cos x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} . dx = \operatorname{tang} x \qquad \int -\frac{1}{(\sin x)^2} = \operatorname{cotang} x$$

$$\int \frac{\operatorname{tang} x}{\cos x} . dx = \sec x \qquad \int -\frac{\operatorname{cotang} x}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . dx = \operatorname{arc}(\sin = x) \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . dx = \operatorname{arc}(\cos = x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} . dx = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) \qquad \int -\frac{1}{1+x^2} . dx = \operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = x)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} . dx = \operatorname{arc}(\sec = x) \qquad \int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} . dx = \operatorname{arc}(\operatorname{cosec} = x).$$

Die in diesem Capitel betrachteten Functionen sind ungeachtet ihrer ausgebreiteten Anwendung natürlich doch nur eine specielle und willkürlich aufgestellte Klasse von Functionen, indem so gut als für die Kreislinie auch für jede andere krumme Linie Functionen gebildet werden könnten, welche den Zusammenhang zwischen Curvenstücken und geraden Linien, die von denselben abhängen, darstellen, oder ebenso auch Functionen gebildet werden könnten, welche den Zusammenhang zwischen andern beliebigen Elementen der Figuren angeben. Aber es sind an Wichtigkeit keine anderen Functionen diesen, welche den Zusammenhang

der Urelemente aller räumlichen Bildungen, der geraden Linie und des Winkels darstellen, zu vergleichen. Ueberdies scheinen die Kreisfunctionen, deren nächste Beziehung freilich auf räumliche Elemente geht, doch noch einen weiteren und innigeren Zusammenhang mit dem allgemeinen Wesen der Functionen überhaupt, d. h. mit dem Wesen der arithmetischen Operationen und der durch dieselben zusammengesetzten Formen, und eine tiefere Bedeutung für dasselbe zu haben, welche Bedeutung aber bis jetzt mehr geahnt als erforscht ist.

Siebentes Capitel.

Uebungsbeispiele zur Anwendung der Differentialrechnung.

§. 93.

Lehre vom Größten und Kleinsten.

Ueberblicken wir das bisher durchlaufene Gebiet, so sehen wir, daß es außer den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung vollständig die Regeln zur Bildung des Differentialquotienten gegebener Functionen, oder den operativen Theil der Differentialrechnung, und die durch Benutzung der analytischen Differentialgleichungen sich darbietenden Integrationsregeln gewisser Functionen enthält, nebst den direct bestimmten Differentialquotienten einer besonderen Klasse von Functionen, nämlich der Kreisfunctionen, und der Entwickelung derselben. Auf dem bisherigen Standpunkte ist überall nur davon die Rede gewesen, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen zu bestimmen, und dieselbe allgemein in ihrer Abhängigkeit von der willkürlich Veränderlichen oder als Function derselben darzustellen. Der nächste Hauptschritt, welcher nun in der Grundlegung un-

ſerer Wiſſenſchaft zu thun wäre, iſt eine weitere Verfolgung und tiefere Analyſe des Begriffs der verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens zweier Veränderlichen. Denn wenn die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens veränderlich iſt, ſo wird das Wachſen der abhängig Veränderlichen, bezüglich auf ein als gleichförmig vorausgeſetztes Wachſen der willkürlich Veränderlichen, entweder ein beſchleunigtes oder retardirtes ſein, je nachdem die Stärke des Wachſens im Zunehmen oder Abnehmen begriffen iſt, und es kann die Frage entſtehen nach der Größe oder dem Maß dieſer Beſchleunigung des Wachſens, welche als die Stärke des Wachſens von der Stärke des Wachſens der Veränderlichen zu betrachten iſt. Und da dieſe Beſchleunigung oder Retardation des Wachſens ſowohl eine zur Ausführung kommende oder eine conſtante ſein kann, als auch wieder eine ſtetig veränderliche, ſo wird ſie im letzteren Falle als bloßes momentanes Beſtreben zu einer beſtimmten Beſchleunigung des Wachſens vorhanden ſein, und es ſind die Mittel zur Beſtimmung der momentanen Beſchleunigung des Wachſens anzugeben. Und da ferner die Beſchleunigung des Wachſens, wenn ſie veränderlich iſt, entweder im Zunehmen oder Abnehmen begriffen ſein muß, ſo kann nach der Stärke des Wachſens der Beſchleunigung des Wachſens gefragt werden, mag dieſelbe nun conſtant oder ſtetig veränderlich ſein, und demnach zur Ausführung kommen oder als bloßes momentanes Beſtreben vorhanden ſein, u. ſ. w. Doch ehe wir uns zu dieſem zweiten Hauptſchritt, durch welchen die Analyſe der verhältnißmäßigen Stärke des Wachſens vollendet wird, rüſten, wollen wir, noch auf dem bisherigen Standpunkt verweilend, von dem zurückgelegten Wege, welcher bisweilen durch ziemlich kahle Strecken der Abſtraction gegangen und dadurch mühſam geworden iſt, ein wenig ausruhen, und die Anwendung der Differentialrechnung noch in einigen Beiſpielen, welche die allgemeine Auflöſung umfaſſender Probleme enthalten, nachweiſen. Da die in dem Vorhergehenden gegebenen Beiſpiele der Anwen-

dung größtentheils Ableitungen der Functionen aus ihren direct beſtimmten Differentialquotienten waren, wobei die Differentiationsregeln gegebener Functionen nur mittelbar durch die in ihnen enthaltenen Integrationsregeln zur Anwendung kommen, und wir in Betreff der Differentiation gegebener Functionen uns auf die Aufſtellung der Operationsregeln beſchränkt haben, ohne eine unmittelbare Anwendung dieſer Regeln nachzuweiſen, ſo ſollen die hier folgenden Beiſpiele gerade dieſen unmittelbaren Gebrauch des Differentiirens gegebener Functionen zeigen. Wir wählen hierzu die Auflöſung zweier allgemeinen Probleme, nämlich die ſogenannte Lehre vom Größten und Kleinſten, und das Ziehen der Tangenten an beliebige krumme Linien, deren Coordinatengleichung gegeben iſt. Dieſe beiden Probleme mögen, abgeſehen davon, daß ſie zur Erläuterung des Gebrauchs der Differentialrechnung ſehr inſtructiv ſind, auch deswegen hier eine Behandlung finden, weil ſie die erſten umfaſſenden Aufgaben geweſen ſind, welche Leibnitz durch ſeinen neuen Calcül löſte, und weil die Verſuche zu ihrer Löſung, ſo viel man weiß, als erſte Veranlaſſung zur Erfindung der Differentialrechnung gedient haben.

Wir betrachten zuerſt die Lehre vom Größten und Kleinſten. Wir wiſſen, daß mit dem Wachſen der willkürlich Veränderlichen nicht blos ein Wachſen oder Abnehmen der abhängig Veränderlichen, ſondern auch abwechſelnd bald ein Wachſen bald ein Abnehmen derſelben verbunden ſein kann. Denken wir dieſen letzteren Fall, ſo wird die abhängig Veränderliche, welche bis zu einem gewiſſen Punkt oder Werth der willkürlich Veränderlichen gewachſen iſt, und dann abgenommen hat, in dieſem Punkt einen größten Werth in Bezug auf ihre unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Größenzuſtände angenommen haben. Und hat die abhängig Veränderliche bis zu einem gewiſſen Punkt der willkürlich Veränderlichen abgenommen, und iſt dann ins Wachſen übergegangen, ſo hat ſie in dieſem Punkt ebenfalls relativ zu unmittelbar vorhergehenden und nach-

folgenden Größenzuständen einen kleinſten Werth angenommen. Betrachten wir z. B. die Ordinaten des Kreiſes (Fig. 1), indem wir den Durchmeſſer bh als Abſciſſenlinie nehmen, ſo erreicht bei einem gewiſſen Punkt der Abſciſſe der Werth der Ordinate ein Maximum. Oder es ſei, um auch ein anſchauliches Beiſpiel von einem Minimum zu geben, in Fig 36 der Fortſchritt auf der Linie ae vom Punkt a aus die Abſciſſenlinie einer Curve, die nach der Gleichung $y = x^2 - 3x + 3$ gebildet iſt. Die Linie ab ſei gleich 1. Im Punkt a, wo $x = 0$ iſt, wird gemäß der gegebenen Gleichung y oder die Ordinate $af = 3$. Für $x = 1$ wird die Ordinate $bg = 1$. Für $x = 2$ wird die Ordinate $ch = 1$, für $x = 3$ wird die zugehörige Ordinate $di = 3$ u. ſ. w. Die Ordinaten waren ſonach bei wachſendem x anfangs im Abnehmen, und dann im Zunehmen, und haben alſo für einen gewiſſen Werth der Abſciſſe einen kleinſten Werth erreicht.

Es kann nun die Frage entſtehen, wie man in dergleichen Fällen denjenigen Werth der willkürlich Veränderlichen findet, bei welchem die abhängig Veränderliche einen größten oder kleinſten Werth annimmt. Man weiß (§. 36), daß der Differentialquotient zweier Veränderlichen poſitiv iſt, ſobald mit dem Wachſen der willkürlich Veränderlichen ein Wachſen der abhängig Veränderlichen verbunden iſt, und daß derſelbe negativ iſt, ſobald mit dem Wachſen der willkürlich Veränderlichen ein Abnehmen der abhängig Veränderlichen verbunden iſt. Geht alſo bei wachſender willkürlich Veränderlichen die abhängig Veränderliche aus dem Wachſen ins Abnehmen über, oder erreicht ſie ein Maximum, ſo geht der Differentialquotient aus einem poſitiven Werth in einen negativen über; und geht die abhängig Veränderliche aus dem Abnehmen ins Wachſen über, ſo geht der Differentialquotient aus einem negativen Werth in einen poſitiven über. Da dieſer Uebergang aus einem poſitiven Werth in einen negativen, und der umgekehrte Uebergang, in ſo fern er ſtetig ſein ſoll, wie bei ſtetiger Veränderung

der Stärke des Wachsens oder des Differentialquotienten nothwendig ist, nur durch den Nullwerth stattfinden kann, so muß im Zustand des Maximums oder Minimums der abhängig Veränderlichen der Differentialquotient den Werth Null annehmen. Wenn ich aber weiß, daß für solche Zustände der Differentialquotient gleich Null sein muß, so brauche ich nur den aus der gegebenen Function ableitbaren Differentialquotienten gleich Null zu setzen, und in der erhaltenen Gleichung die willkürlich Veränderliche auf eine Seite der Gleichung zu schaffen, um denjenigen Zahlenwerth derselben zu finden, für welchen die abhängig Veränderliche ein Maximum oder Minimum wird. Ist der Differentialquotient nicht als eine entwickelte Function der willkürlich Veränderlichen dargestellt, und will man diese Entwickelung nicht vornehmen, so muß man aus den Relationen, welche die unentwickelten Functionen in dem gleich Null gesetzten Differentialquotienten zeigen, die Bedingungen entnehmen, unter welchen ein Minimum oder Maximum stattfindet.

Um also z. B. in der Curve fghi (Fig. 36), deren Coordinatengleichung $y = x^2 - 3x + 3$ war, den Werth der Abscisse zu finden, für welchen die Ordinate ein Minimum wird, bildet man zunächst den Differentialquotienten der Coordinaten, und erhält $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$. In dem Moment, wo bei wachsender Abscisse die Ordinate ihr Minimum erreicht, geht der Differentialquotient $2x - 3$ in den Nullwerth über. Aus dieser Bedingung, daß $2x - 3 = 0$ sein soll, folgt aber $2x = 3$, oder $x = \frac{3}{2}$. Folglich ist in der Mitte zwischen den Punkten b und c, wo x den Zahlenwerth $\frac{3}{2}$ hat, das Minimum der Ordinate erreicht. Oder wenn wir in dem Kreis (Fig. 1) den Durchmesser bh als Abscisse nehmen, und den Radius $= r$ setzen, so haben wir die Ordinate $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(2r-2x) = \frac{r-x}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Für den Zustand des Maximums der Ordinate haben wir also die Bedingungsgleichung $\frac{r-x}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$ oder $r-x=0$, also $r=x$, und sehen, daß die Ordinate im Mittelpunkte des Durchmessers ihr Maximum erreicht.

Man wird hieraus ersehen, daß das Differentiiren gegebener Functionen allgemein die Mittel darbietet, denjenigen Werth der willkürlich Veränderlichen zu finden, für welchen der veränderliche Werth der Function oder die abhängig Veränderliche ein Größtes oder Kleinstes wird. Ob aber der Differentialquotient bei seinem Eintritt in den Nullzustand aus einem positiven Werth in einen negativen, oder umgekehrt aus einem negativen Werth in einen positiven übergeht, d. h. ob die abhängig veränderliche Größe ein Maximum oder ein Minimum erreicht, dies kann hierdurch allein nicht entschieden werden, sondern erfordert eine Beachtung des Werthes des zweiten Differentialquotienten. Da wir aber hier von dem zweiten Differentialquotienten noch keinen Gebrauch machen, so wollen wir in den folgenden Beispielen dieses, ob die abhängig Veränderliche ein Maximum oder Minimum annimmt, schon als bekannt voraussetzen, wie man es denn auch in der Regel im Voraus schon weiß, und blos die Werthe der willkürlich Veränderlichen für diese Zustände aufsuchen.

§. 94.

Beispiele zur Lehre vom Größten und Kleinsten.

1) Denken wir bei einem senkrechten Cylinder **bade** (Fig. 37) die eine ebene Grenzfläche **be** weg, wodurch derselbe wie ein cylindrisches Hohlmaß erscheint, so wird, wie leicht zu sehen, bei demselben Cubikinhalt des Cylinders die Oberfläche sehr verschieden ausfallen, je nachdem man

das Verhältniß des Radius der Grundfläche und der Höhe annimmt, und zwar kann sowohl durch unmäßige Verkleinerung des Radius ca und entsprechende Vergrößerung der Höhe ab, als auch umgekehrt durch Vergrößerung des Radius ca und entsprechende Verkleinerung der Höhe die Oberfläche des Cylinders jeden beliebig großen Werth annehmen, ohne daß der Cubikinhalt verändert wird. Man kann also fragen, in welchem Verhältniß muß man den Radius der Grundfläche und die Höhe eines Cylinders nehmen, damit für denselben Cubikinhalt die Größe der Oberfläche ein Minimum wird, oder, um ein praktisches Interesse daran zu knüpfen, welche Form muß man einem cylindrischen Hohlmaß geben, damit man das wenigste Material zu demselben verwendet. Der Radius der Grundfläche und die Oberfläche des Cylinders seien die von einander abhängigen veränderlichen Größen. Denkt man sich irgend einen bestimmten Cubikinhalt des Cylinders, und zuerst den Radius sehr klein, so wird mit wachsendem Radius die Größe der Oberfläche anfangs abnehmen, und endlich bei fortgesetztem Wachsen des Radius wieder zunehmen, und also bei einem gewissen Werth des Radius ein Minimum erreichen. Wir müssen zunächst die veränderliche Oberfläche als Function des willkürlich veränderlichen Radius ausdrücken. Heißt der veränderliche Radius x, die zugehörige Höhe des Cylinders h, und der unveränderliche Cubikinhalt C, so ist bekanntlich $C = x^2 \pi . h$ und folglich $h = \frac{C}{x^2 \pi}$. Die gebogene Seitenfläche des Cylinders ist $= 2 x \pi h$, oder, für h seinen eben gefundenen Werth gesetzt, $= \frac{2 x \pi . C}{x^2 \pi} = \frac{2C}{x}$. Wenn wir nun die gesammte Oberfläche, die gebogene mit Einschluß der ebenen Grundfläche, durch F vorstellen, so ist $F = \frac{2C}{x} + x^2 \pi$. Folglich $\frac{dF}{dx} = -2 C x^{-2} + 2 x \pi$. Für den Zustand

des Minimums der Oberfläche F ist $-2Cx^{-2}+2x\pi=0$, oder $2\pi x=\frac{2C}{x^2}$, also $x^3=\frac{C}{\pi}$, oder $x=\sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$.

Bei jedem gegebenen Cubikinhalt C wird man hiernach den Werth des Radius bestimmen können, bei welchem die Oberfläche des Hohlmaßes die möglichst kleine ist. Wollen wir aber allgemein die dabei stattfindende Form des Gefäßes bestimmen, so brauchen wir nur noch den Werth zu berechnen, welchen die Höhe h für einen Radius $=\sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$ annimmt. Wie vorher bemerkt, ist $h=\frac{C}{x^2\pi}$, und folglich, statt x den Werth $\frac{\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{\pi}}$ gesetzt,

$$h=\frac{C}{\frac{(\sqrt[3]{C})^2.\pi}{(\sqrt[3]{\pi})^2}}=\frac{(\sqrt[3]{C})^3.(\sqrt[3]{\pi})^2}{(\sqrt[3]{C})^2.(\sqrt[3]{\pi})^3}=\frac{\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Die Oberfläche des Hohlmaßes erreicht also ihr Minimum, wenn die Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist.

Man konnte bei der Auflösung dieser Aufgabe auch die Oberfläche F constant annehmen, und den Cubikinhalt C veränderlich, und hätte dann gefragt, welche Form muß das Hohlmaß haben, damit bei derselben Oberfläche der Cubikinhalt ein Maximum werde. Es wäre dann der veränderliche Cubikinhalt durch eine Function des veränderlichen Radius x auszudrücken. Nun ist, wenn wir die Bedeutung der Buchstaben C, F und h beibehalten, $F=x^2\pi+2\pi xh$, und folglich $h=\frac{F-x^2\pi}{2\pi x}$. Und da $C=x^2\pi.h$, so ist, statt h sein Werth gesetzt, $C=\frac{x^2.\pi\,(F-x^2\pi)}{2x\pi}=\frac{x(F-x^2\pi)}{2}=\frac{Fx-\pi x^3}{2}$. Folglich ist $\frac{dC}{dx}=\frac{1}{2}F-\frac{3}{2}\pi x^2$.

Für den Zustand des Maximums ist $\frac{1}{2} F - \frac{3}{2} \pi x^2 = 0$, oder $x^2 = \frac{F}{3\pi}$, und $x = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}$. Setzt man in die Gleichung $h = \frac{F - x^2\pi}{2\pi x}$ statt x den für das Maximum geltenden Werth $\sqrt{\frac{F}{3\pi}}$, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung $h = \sqrt{\frac{F}{3\pi}}$, also wie vorher die Höhe gleich dem Radius der Grundfläche.

Wollte man für einen Cylinder, dessen beide ebene Grenzflächen mitgerechnet werden, die Form bestimmen, bei welcher seine Oberfläche ein Minimum wird, so würde man durch Anwendung desselben Verfahrens finden, daß die Höhe des Cylinders doppelt so groß sein muß als der Radius der Grundfläche.

2) Soll ein prismatischer Stab, dessen Querschnitt ein Parallelogramm ist, und der an seinen Enden unterstützt ist, durch ein in seiner Mitte angebrachtes Gewicht oder durch einen Druck zerbrochen werden, so ist dieser Druck, bei übrigens beliebig angenommener Festigkeit des Stoffes, abhängig von der Länge, der Breite und der Höhe oder Dicke des Stabes; und zwar wächst, wie hier als bekannt vorausgesetzt werden soll, dieser Druck im einfachen Verhältniß der Breite, im quadratischen Verhältniß der Höhe, und im umgekehrten Verhältniß der Länge des Stabes, so daß, den Druck durch P, die Länge durch L, die Breite durch B, und die Höhe dutch H vorgestellt, $P = \frac{B.H^2}{L}$ ist. Man sieht hieraus, daß bei einem Stabe, dessen Breite und Höhe verschieden sind, zum Zerbrechen ein ungleicher Druck erfordert wird, wenn man ihn auf die breite Seite und wenn man ihn auf die schmale Seite legt, indem hierbei die Größen B und H ihre Rollen tau-

schen. Ein Lineal z. B. sei 10 Linien breit und 1 Linie dick. Sieht man von der Länge, weil sie unveränderlich ist, ab, so werden die zum Zerbrechen des Lineals nöthigen Druckstärken, je nachdem man dasselbe auf die breite oder auf die schmale Seite legt, sich verhalten wie 10.1^2 zu 1.10^2, wie 10 zu 100.

Sollte nun aus einem cylindrischen Baumstamm, dessen Querschnitt der Kreis abfge (Fig. 38) ist, ein parallelopipedischer Balken geschnitten werden, so wird nicht, wie man anfangs wohl zu denken geneigt sein würde, der quadratische Balken der stärkste sein. Denn denkt man in dem Quadrat abde die Höhe de ein wenig vergrößert, und die Breite etwas verkleinert, so wird anfangs beim ersten Heraustreten aus der Figur des Quadrats die Höhe fast ebenso viel zunehmen als die Breite abnimmt, und folglich das Product der Breite und der zweiten Potenz der Höhe, als Ausdruck der Festigkeit des Balkens, offenbar im Wachsen begriffen sein. Wenn aber durch dies Abnehmen der Breite der Balken schon sehr schmal geworden ist, so wird mit einer sehr geringen Zunahme der Höhe eine so bedeutende Abnahme der Breite verbunden sein, daß das Product der Breite und der zweiten Potenz der Höhe abnimmt bei weiterem Wachsen der Höhe. Da also der quadratische, oder, wie man noch unbedenklicher behaupten kann, überhaupt ein sehr breiter Balken so wenig der stärkste sein kann als ein sehr schmaler, so soll die Figur des stärksten Balkens bestimmt werden.

Die wachsende Höhe des Balkens sei die willkürlich Veränderliche und heiße x. Stellen wir den constanten Durchmesser be durch D vor, so ist die der Höhe x zugehörige Breite $\sqrt{D^2 - x^2}$. Das Product der Breite und der zweiten Potenz der Höhe, oder die Function $x^2\sqrt{D^2 - x^2}$, ist Ausdruck der veränderlichen Festigkeit, welche F heißen möge. Wir haben also $F = x^2(D^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und $\frac{dF}{dx} =$

$-x^2\frac{1}{2}\left(D^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x+\left(D^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}.2x$, oder nach gehöriger Zusammenziehung $\frac{dF}{dx}=\frac{2xD^2-3x^3}{\left(D^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$. Für den Zustand des Maximums der Stärke des Balkens ist $\frac{2xD^2-3x^3}{\left(D^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=0$, oder $2xD^2-3x^3=0$, und also $x=D\sqrt{\frac{2}{3}}$. Um allgemein das Verhältniß der Höhe und Breite beim stärksten Balken zu haben, müssen wir auch die Breite durch D ausdrücken. Die der Höhe x zugehörige Breite B war $\sqrt{D^2-x^2}$, und hierin statt x den Werth $D\sqrt{\frac{2}{3}}$ gesetzt, gibt $B=\sqrt{D^2-\frac{2}{3}D^2}=\sqrt{\frac{1}{3}D^2}$ $=D\sqrt{\frac{1}{3}}$. Höhe und Breite verhalten sich also wie $D\sqrt{\frac{2}{3}}$ zu $D\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder wie $\sqrt{2}:1$. Construiren wir also im Kreis zwei rechtwinklig zusammenstoßende Sehnen fg und gh, welche sich verhalten wie 1 zu $\sqrt{2}$, so ist der Balken mit dem Querschnitt fghi der stärkste von allen, die herausgeschnitten werden können.

3) Ein Körper werde in der Richtung ab (Fig. 39) schief in die Höhe geworfen, so daß er mit der Horizontallinie af den Winkel baf oder den Winkel x bildet. Die anfängliche Wurfgeschwindigkeit in Fußen ausgedrückt, und auf die Secunde als Zeiteinheit bezogen, heiße c. Zerlegen wir die Geschwindigkeit c, welche durch die Länge ae dargestellt sein soll, nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten in eine senkrechte ag und in eine horizontale af, so ist die horizontale af durch $c.\cos x$, und die senkrechte ag durch $c.\sin x$ auszudrücken. Die horizontale Geschwindigkeit bleibt für denselben Winkel x constant, und beträgt

in jeder Secunde $c.\cos x$ Fuß. Die senkrechte ist durch die Gegenwirkung der Schwerkraft veränderlich. Um die Distanz zu bestimmen, in welcher der geworfene Körper im Fallen die horizontale Linie wieder erreicht, hat man nur die Anzahl der Secunden auszudrücken, welche ein Körper zum Steigen und Herunterfallen braucht, der mit der Geschwindigkeit $c.\sin x$ in die Höhe geworfen wird, und diese Anzahl von Secunden mit der Horizontalgeschwindigkeit $c.\cos x$ zu multipliciren. Die Anzahl der Secunden, während welcher ein Körper steigt, findet man aber, wenn man die in Fußen ausgedrückte senkrechte Anfangsgeschwindigkeit durch 30 dividirt. Folglich steigt in unserm Falle der Körper $\frac{c.\sin x}{30}$ Secunden. Und da er ebenso lange fällt, so verstreichen während der ganzen Wurfbewegung des Körpers $\frac{c.\sin x}{15}$ Secunden. Stellen wir die in der Horizontalrichtung erreichte Distanz durch D vor, so ist also

$$D = \frac{c.\sin x}{15}.c.\cos x = \frac{c^2}{15}.\sin x.\cos x.$$

Diese Distanz hängt hiernach bei gegebener Wurfgeschwindigkeit nur von dem Winkel x ab, und ist mit demselben veränderlich. Der für den Werth der Horizontaldistanz des Wurfes gefundene Ausdruck $\frac{c^2}{15}.\sin x \cos x$ zeigt, daß diese Distanz jeden beliebigen Grad von Kleinheit annehmen kann, sowohl wenn der Winkel x sich dem rechten Winkel, als auch wenn er sich dem Nullwerth stark annähert, weil in beiden Fällen der eine veränderliche Factor sich dem Nullwerth nähert, während der andere veränderliche Factor sich der Zahl 1 nähert, wie auch schon daraus zu sehen ist, daß in dem Falle, als der Winkel x sich dem rechten Winkel nähert, von der Wurfgeschwindigkeit nur ein kleiner Theil auf die Horizontalgeschwindigkeit kommt, und also die Distanz nicht groß werden kann trotz der Höhe des Steigens, und daß in dem andern Falle, als der Win-

kel x sehr klein wird, die Zeit der Wurfbewegung so abgekürzt wird, daß auch bei starker horizontaler Geschwindigkeit die Distanz dennoch gering wird. Läßt man also den Winkel x vom Nullwerth aus wachsen, so wird bei einem bestimmten Werthe desselben die Horizontaldistanz des Wurfes ihr Maximum erreichen. Wir bilden also den Differentialquotienten der von einander abhängigen Veränderlichen D und x, und erhalten aus der Gleichung $D = \frac{c^2}{15} . \sin x . \cos x$, die Differentialgleichung $\frac{dD}{dx} = \frac{c^2}{15}[(\cos x)^2 - (\sin x)^2]$. Für das Maximum der Wurfdistanz ist $\frac{c^2}{15}[(\cos x)^2 - (\sin x)^2] = 0$, oder $\frac{c^2}{15}(\cos x)^2 = \frac{c^2}{15}(\sin x)^2$, oder $\cos x = \sin x$. Auch ohne den Winkel x aus dieser Gleichung zu entwickeln, kann man aus der Bedingung, daß für den weitesten Wurf $\cos x = \sin x$ sein soll, entnehmen, daß der Winkel x ein Winkel von 45° sein muß.

Wollte man lieber eine entwickelte Function der willkürlich Veränderlichen x für den Werth der abhängig Veränderlichen haben, so nehme man die mit dem Winkel baf zugleich veränderliche senkrechte Steiggeschwindigkeit ag als die willkürlich Veränderliche x, wobei x die Anzahl der Fuße darstellt, welche mit der Anfangsgeschwindigkeit des senkrechten Steigens in einer Secunde zurückgelegt werden. Die horizontale Geschwindigkeit beträgt alsdann $\sqrt{c^2 - x^2}$ Fuß für die Secunde. Da ein Körper, der mit der Geschwindigkeit von x Fuß senkrecht zu steigen anfängt, nach $\frac{x}{15}$ Secunden wieder heruntergekommen ist, so ist die Distanz $D = \frac{x}{15}\sqrt{c^2 - x^2}$ Fuß. Hieraus folgt

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{x}{15}\,\frac{1}{2}(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} . 2x + (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{15},$$

oder nach gehöriger Zusammenziehung, $\frac{dD}{dx} = \frac{c^2 - 2x^2}{15(c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Für $\frac{c^2 - 2x^2}{15(c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$ oder $c^2 - 2x^2 = 0$ wird $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Folglich verhält sich bei dem weitesten Wurf x zu c, oder in der Figur 39 ag zu ae, wie 1 zu $\sqrt{2}$, woraus denn wie bekannt der Winkel baf = 45° sich ergibt.

4) Wenn von einem Punkt d (Fig. 40) Licht fällt auf den Punkt b einer Fläche, so hängt, abgesehen von der zufälligen Intensität des vom Punkt d ausgehenden Lichtes, die Stärke der Beleuchtung, welche der Punkt b empfängt, ab von der Entfernung db und von dem Neigungswinkel, unter welchem der Lichtstrahl db auf die Fläche auftrifft. Es sei dc senkrecht auf die ebene Fläche, und also der Winkel dbc der Neigungswinkel. Es steht nun, wie als bekannt angenommen werden soll, die Beleuchtungsstärke des Punktes b im umgekehrten quadratischen Verhältniß der Entfernung db, und im directen Verhältniß des Sinus des Winkels dbc. Wenn wir den lichtgebenden Punkt d auf der Linie dc herunterrücken lassen, so wird zwar die Entfernung db kleiner, aber auch der Sinus des Winkels dbc kleiner, und dabei kann, wie leicht zu sehen, durch fortgesetzte Annäherung des Punktes d an den Punkt c die Lichtstärke in b beliebig klein gemacht werden. Und wenn der Punkt d durch Verlängerung der Linie cd sich weiter von b entfernt, so kann, obgleich die Strahlen immer mehr senkrecht auffallen, durch fortgesetzte Vergrößerung der Linie cd die Lichtstärke in b ebenfalls beliebig klein gemacht werden. Läßt man also den lichtgebenden Punkt von c aus auf der Linie cd heraufrücken, so wird die Lichtstärke in b anfangs zunehmen und dann abnehmen, und bei einer gewissen Höhe des Punktes d ein Maximum erreichen. Wäre z. B. die Fläche, auf welche das Licht fällt, ein Tisch, über dessen Mitte eine Lampe hängt, die herauf- und herunter-

gelassen werden kann, so kann man fragen, wie hoch muß die Lampe gehängt werden, damit auf einen Punkt b, der in einer bestimmten Entfernung cb von der Mitte des Tisches ist, das Maximum der möglichen Beleuchtungsstärke falle.

Die constante Entfernung cb (Fig. 40) heiße a, die veränderliche Höhe cd heiße x, und die nach b fallende veränderliche Lichtstärke L. Die der Höhe x zugehörige Entfernung der Punkte d und b ist $\sqrt{x^2 + a^2}$. Der Sinus des Neigungswinkels dbc ist $\frac{cd}{db}$, also hier $\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Da nun die Beleuchtungsstärke im Punkt b im directen Verhältniß dieses Sinus, und im umgekehrten quadratischen Verhältniß der Entfernung bd oder $\sqrt{x^2 + a^2}$ steht, so erhalten wir den Ausdruck für die Beleuchtungsstärke L, wenn wir den Sinus durch das Quadrat der Entfernung bd dividiren, also

$$L = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + a^2)} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dL}{dx} = \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^3}.$$

Für den Zustand des Maximums ist

$$\frac{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^3} = 0 \text{ oder}$$

$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = 3x^2(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(x^2 + a^2)^3 = 9x^4(x^2 + a^2)$$

$$(x^2 + a^2)^2 = 9x^4$$

$$x^2 + a^2 = 3x^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Hiernach muß für das Maximum der Beleuchtungsstärke die Höhe x zu der constanten Entfernung a sich verhalten wie $1:\sqrt{2}$.

Man wird, wie wir glauben, aus diesen wenigen Beispielen von größten und kleinsten Werthen eine hinlänglich deutliche Vorstellung entnehmen können von der Art, wie die durch die Differentialrechnung dargebotene einfache Auflösungsmethode dieser wichtigen und interessanten Klasse von Aufgaben überall zur Ausführung und Anwendung zu bringen ist.

§. 95.

Das Ziehen der Tangenten bei Parallelcoordinaten.

Durch senkrechte Parallelcoordinaten, welche gemäß irgend einer Function einer Veränderlichen gebildet sind, sei ein beliebiger Zug in der Ebene vorgeschrieben. Sind die Coordinaten gleichmäßig wachsend, so ist dieser Zug bekanntlich eine gerade Linie. Durch die Richtung, welche diese gerade Linie hat bezüglich auf ihre Abscisse, oder durch den Winkel, welchen die gerade Linie mit ihrer Abscisse bildet, ist die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten gegeben, und umgekehrt ist durch die Stärke des Wachsens der Coordinaten dieser Winkel gegeben. Ist der Zug in der Ebene eine krumme Linie, so ist die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Coordinaten stetig veränderlich, aber in jedem Augenblick oder Punkt eine bestimmte, und folglich identisch mit der constanten Stärke des Wachsens der Coordinaten irgend einer geraden Linie von bestimmter Richtung oder bestimmter Lage gegen die Abscisse. Die momentane Richtung der krummen Linie fällt, wie schon oben (§. 31) bemerkt, mit der Richtung dieser Geraden zusammen. Eine durch einen Punkt einer krummen Linie gezogene Gerade, in welcher die momentane Richtung der Curve zur Ausführung kommt, soll im Allgemeinen eine Tangente heißen; ob eine solche Linie die Curve blos berührt, und also eigentlich eine Tangente ist, oder ob sie dieselbe auch schneidet, und unter welchen Umständen das

Eine oder das Andere eintritt, lassen wir hierbei jetzt unentschieden, weil dies erst durch Beachtung des zweiten Differentialquotienten ausgemacht werden kann.

Ist mir also durch irgend eine Function der Veränderlichen x als der Abscisse das Coordinatengesetz einer Curve gegeben, und bildet man den Differentialquotienten dieser Function, so gibt der bestimmte Werth, welchen dieser Differentialquotient bei irgend einem Zahlenwerth der Veränderlichen x annimmt, die Stärke des Wachsens der Coordinaten der Tangente an, welche durch den dem angenommenen Abscissenwerth zugehörigen Curvenpunkt geht. Ist abc (Fig. 41) eine beliebige Curve, af ihre Abscisse, und findet man z. B., daß für den Zahlenwerth der Abscisse, welcher der Länge ad entspricht, der Differentialquotient der Coordinaten gleich $\frac{1}{3}$ ist, so weiß man, daß die Tangente be des Punktes b so gegen die Abscisse geneigt sein muß, daß jede Zunahme der Ordinate $\frac{1}{3}$ mal so groß ist als die zugehörige Zunahme der Abscisse, oder auch daß bd ein Drittel der Linie ed beträgt. Ist mit dem Wachsen der Abscisse ein Abnehmen der Ordinate verbunden, wie bei der Abscisse ab (Fig. 32), wenn dieselbe von a nach b hin wachsend angenommen wird, so ist bekanntlich der Differentialquotient der Coordinaten negativ, und eine Tangente hi muß dann auch so fallen, daß mit dem Wachsen ihrer Abscisse ein Abnehmen ihrer Ordinate verbunden ist, und zwar muß der constante Differenzquotient der Coordinaten der Tangente dem negativen bestimmten einzelnen Werth des Differentialquotienten gleich sein. Wenn sich die Tangente ohne Ende der zur Abscisse parallelen Lage nähert, so nähert sich der Differenzquotient ihrer Coordinaten ohne dem Nullwerth, und wenn die Tangente sich ohne Ende der zur Abscisse senkrechten Lage nähert, so wächst der Differenzquotient endlos. Findet man also für einen gewissen Abscissenwerth den Differentialquotienten der Coordinaten

einer Curve gleich Null, so ist die Tangente mit der Abscisse parallel, und findet man ihn unendlich, so steht die Tangente senkrecht auf der Abscisse. Indem wir in dem Folgenden die Coordinatengleichung der Curve immer als gegeben voraussetzen, und die Abscisse durch x und die Ordinate durch y vorstellen, so sind y und $\frac{dy}{dx}$ als bekannte Functionen von x zu betrachten.

Man hat noch einige andere mit der Tangente zugleich gegebene gerade Linien an der Curve mit besonderen Benennungen versehen, und dieselben sollen hier noch kurz erwähnt werden. Wenn man die Tangente eines Punktes b (Fig. 41) verlängert, bis sie die Abscisse schneidet, so nennt man das zwischen dem Durchschnittspunkt e und dem Fußpunkt der von b aus gezogenen Ordinate enthaltene Stück ed die Subtangente des Punktes b der Curve, oder des Punktes d der Abscisse. Da man durch Abtragung der Subtangente die Construction der Tangente bequem ausführen kann, so braucht man nur die Länge der Subtangente zu berechnen. Diese Berechnung ist aber sehr einfach, da die Ordinate bd dividirt durch die Subtangente ed dem Differentialquotienten der Coordinaten gleich ist, also allgemein $\frac{y}{\text{subtang}} = \frac{dy}{dx}$ und folglich $\text{subtang} = \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Der Werth der Subtangente kann positiv und negativ ausfallen, und man hat daher die räumliche Bedeutung dieser verschiedenen Werthe festzusetzen. Man muß hierbei die einzelnen Fälle durchgehen, je nachdem mit positivem x eine positive oder negative Ordinate y verbunden ist, oder mit einem negativen x ein positives oder negatives y. Setzen wir vorerst nur wachsende positive Abscissen voraus. Ist dabei y positiv, so wird der Werth der Subtangente positiv oder negativ ausfallen, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ positiv oder

negativ ist. Ist aber $\frac{dy}{dx}$ positiv, so ist die Ordinate wachsend, und die Tangente ansteigend gegen die Abscisse; ist $\frac{dy}{dx}$ negativ, so ist die Ordinate abnehmend, und die Tangente absteigend gegen die Abscisse, in so fern man sich nämlich in die Richtung des Wachsens der Abscisse versetzt. Also ist auch bei positivem Werth der Subtangente die Tangente ansteigend gegen die Abscisse, und bei negativem absteigend gegen dieselbe. Mithin ist ein positiver Werth der Subtangente vom Fußpunkt der Ordinate aus abzutragen nach derjenigen Richtung, welche der Richtung des Wachsens der Abscisse entgegengesetzt ist, und ein negativer Werth der Subtangente ist in der Richtung des Wachsens der Abscisse abzutragen. Daß für negative Ordinaten oder für Curvenpunkte, welche unterhalb der Abscisse liegen, bei positivem x dieselbe Regel gilt, nämlich daß eine negative Subtangente in der Richtung des Wachsens der Abscisse, und eine positive in der entgegengesetzten Richtung abzutragen ist, wird man sich hiernach ohne weitere Auseinandersetzung leicht zur Einsicht bringen. Ebenso endlich auch, daß bei negativem x dieselbe Regel gilt, mag y positiv oder negativ sein.

Wollte man die Länge der Tangente selbst, in so fern sie durch den Berührungspunkt und die Abscisse begrenzt ist, durch die Abscisse, oder ihre bekannten Functionen y und $\frac{dy}{dx}$, ausdrücken, so ist, da die Tangente Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten die Ordinate y und die Subtangente $\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ sind,

$$\text{tang} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Errichtet man im Berührungspunkt b (Fig. 41) der Tangente eine Senkrechte auf die Tangente, und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt mit der Abscisse, so heißt diese Linie bg die Normale. Die Länge derselben, als Function von x ausgedrückt, folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke bdg und bde. Denn es verhält sich bg : bd = be : ed oder $\text{Norm} : y = y \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} : \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Folglich $\text{Norm} = y \cdot \frac{dy}{dx} \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$

$$= y \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}.$$

Die Linie dg (Fig. 41), welche vom Fußpunkt der Ordinate bis zum Durchschnittspunkt der Normale mit der Abscisse reicht, heißt die Subnormale. Aus der Proportion dg : db = db : de folgt allgemein

$$\text{Subnorm} : y = y : \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{oder}$$

$$\text{Subnorm} = y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Die Subnormale wird so wie die Subtangente bald positiven, bald negativen Werth haben, je nachdem bei positivem y der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ist, oder bei negativem y das Entgegengesetzte stattfindet. Durch dieselben Schlüsse wie vorher bei der Subtangente wird man leicht die Regel ableiten, daß ein positiver Werth der Subnormale in der Richtung des Wachsens der Abscisse abzutragen ist, und ein negativer Werth derselben in der entgegengesetzten Richtung.

Jede dieser Linien kann gebraucht werden, um vermittelst derselben eine Tangente an eine Curve zu ziehen; man

wählt unter denselben aus, je nachdem die Gleichung der Curve für den einen oder den andern Ausdruck bequemer erscheint.

§. 96.

Beispiele von Tangenten an vorgeschriebene Punkte.

1) Sei die Curve a d e (Fig. 22) die gemeine Parabel. Ihre Gleichung ist $y = \sqrt{p} \cdot \sqrt{x}$, wenn die Axe der Parabel die Abscisse, und ihr Anfangspunkt in dem Scheitelpunkt a ist, und p den Parameter vorstellt. Wollten wir eine Tangente an die Parabel durch Abtragung der Subtangente ziehen, so brauchen wir nur in den allgemeinen Ausdruck $\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ der Subtangente einer Curve die für die Parabel geltenden bestimmten Functionen von x einzuführen. Nun ist bei der Parabel $y = \sqrt{p} \cdot \sqrt{x}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$, und mithin die Subtangente $= \frac{\sqrt{p} \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{\sqrt{p}}$ $= 2x$. Da die Subtangente der Parabel gleich der doppelten Abscisse ist, so braucht man, um an den Punkt d eine Tangente zu ziehen, nur a h gleich der Abscisse a b zu machen, und die Linie h d ist eine Tangente. Die Subnormale, deren allgemeiner Ausdruck $y \cdot \frac{dy}{dx}$ ist, wird bei der Parabel $= \frac{\sqrt{p} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{p}}{2\sqrt{x}} = \frac{p}{2}$, also gleich dem halben Parameter und constant. Man kann mithin auch an einen beliebigen Punkt der Parabel eine Tangente ziehen, wenn man von dem Fußpunkt der Ordinate dieses Punktes in der Richtung des Wachsens der Abscisse den halben Parameter abträgt, alsdann die Normale zieht, und durch den in die Curve fallenden Endpunkt derselben eine Senkrechte legt.

2) Es soll eine Tangente an einen durch seine Abscisse vorgeschriebenen Punkt der Ellipse d f e g (Fig. 42)

gelegt werden. Die große Axe der Ellipse sei die Abscisse, und ihr Anfangspunkt im Mittelpunkt b der Ellipse; die Abscisse sei in der Richtung be wachsend. Nennen wir die halbe große Axe a, die halbe kleine Axe c, so ist die Gleichung der Ellipse $y = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = -\frac{cx}{a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Demnach ist die Subtangente

$$= -\frac{c(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a\cdot cx} = -\frac{a^2-x^2}{x}.$$

Wäre z. B. die halbe große Axe $a = 5$ und eine Tangente an den Punkt h zu ziehen, dessen zugehörige Abscisse $bi = +3$ ist, so wird die Subtangente $= -\frac{25-9}{3}$ $= -5\frac{1}{3}$, und ist als negative Subtangente in der Richtung des Wachsens der Abscisse abzutragen. Da ei nach Annahme $= 2$ ist, so ist ek gleich $3\frac{1}{3}$ zu nehmen, und kh ist die verlangte Tangente. Wäre eine Tangente an den Punkt m zu ziehen, dessen Abscisse $bn = -4$ sein möge, so ist die Subtangente $= -\frac{25-16}{-4} = +2\frac{1}{4}$, und ist als positive Subtangente abzutragen in der Richtung, welche der Richtung des Wachsens der Abscisse entgegengesetzt ist. Und da nach Annahme $dn = 1$ war, so ist qd gleich $1\frac{1}{4}$ zu nehmen, und die Linie qm ist eine Tangente.

Die Subnormale der Ellipse wird $= -\frac{c(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot cx}{a\cdot a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$= -\frac{c^2}{a^2}\cdot x$. Sei wieder $a = 5$, und $c = 3$, und die

Abscisse $bl = +3$, so ist die Subnormale des Punktes $h = -\frac{9}{25}.3 = -1\frac{2}{25}$, und als negative Subnormale abzutragen in der Richtung, welche die Richtung des Wachsens der Abscisse entgegengesetzt ist. Wird lp gleich $1\frac{2}{25}$ gemacht, so ist die Senkrechte auf ph die Tangente. Für den Punkt m, dessen Abscisse $= -4$ ist, wird die Subnormale $= -\frac{9}{25}.-4 = +1\frac{11}{25}$, und ist als positiv in der Richtung ne abzutragen.

Wird c gleich a angenommen, so geht die Ellipse in den Kreis über, und die eben für die Ellipse gefundenen Ausdrücke beziehen sich auf einen Kreis, dessen Abscisse ihren Anfang im Mittelpunkt hat. Die Subnormale $-\frac{c^2}{a^2}.x$ der Ellipse wird für den Kreis $= -x$, woraus zu sehen, daß im Kreise bei jeder Abscisse die Subnormale allemal auf den Anfangspunkt der Abscisse, also auf den Mittelpunkt des Kreises trifft.

3) Die Curve afghi (Fig. 30) hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Da $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$, so ist die Subtangente $= \frac{x^{\frac{3}{2}}.4}{2.3x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{2}{3}x$. Ist also die Abscisse $ad = 3$, und an den Punkt h eine Tangente zu ziehen, so mache man die Linie $db = 2$, und die Linie bh ist die verlangte Tangente.

4) Denken wir uns eine Curve kfg (Fig. 43) construirt nach der Gleichung $y = e^x$, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems und gleich 2,718... ist. Diese Linie heißt die logarithmische. Die Abscisse, die von l nach c hin wachsend angenommen wird, habe ihren Anfangspunkt in a. Für den Punkt a, oder für $x = 0$,

wird $y = e^0 = 1$, und es sei $af = 1$. Ist im Punkt b die Abscisse $= 1$, so ist die Ordinate $bg = e^1 = 2{,}718\ldots$ Ist $ac = 2$, so ist die Ordinate $ch = e^2 = 7{,}38\ldots$ Ist $da = -1$, so ist die Ordinate $di = e^{-1} = 0{,}36\ldots$ Im Punkt l sei $x = -2$, und mithin die Ordinate $kl = e^{-2} = 0{,}13\ldots$ u. s. w. Aus der Gleichung $y = e^x$ folgt $\frac{dy}{dx} = e^x$. Die Subtangente dieser Linie ist also $\frac{e^x}{e^x} = 1$, und mithin für alle Punkte constant. Um an die Punkte i, f, g, h Tangenten zu ziehen, braucht man überall nur die Linie gleich 1 vom Fußpunkt der Ordinaten rückwärts abzutragen. Und da wir die Längen der Linien ld, da, ab, bc sämmtlich $= 1$ angenommen haben, so sind die Linien li, df, ag, bh die Tangenten der Punkte i, f, g, h.

§. 97.

Tangenten in vorgeschriebener Richtung.

Bisher ist immer vorausgesetzt worden, daß eine Tangente an einen vorgeschriebenen Punkt einer Curve gezogen werden sollte, oder vielmehr an einen Curvenpunkt, der durch die ihm zugehörige Abscisse gegeben war. Es kann aber auch ein Punkt außerhalb einer Curve gegeben sein, von welchem aus eine Tangente an die Curve gezogen werden soll, oder es kann endlich die Richtung vorgeschrieben sein, welche eine Tangente der Curve haben soll. In beiden Fällen ist der Curvenpunkt zu suchen, dessen Tangente die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt. Der Curvenpunkt wird aber gefunden sein, wenn man die ihm zugehörige Abscisse hat. Es ist also anzugeben, wie man in diesen Fällen die dem gesuchten Curvenpunkt zugehörige Abscisse findet.

Es sei zuerst die Richtung der Tangente vorgeschrieben, oder der Winkel gegeben, welchen eine zu ziehende Tangente mit der Abscisse bildet. Soll an eine beliebige Curve abc (Fig. 41) eine Tangente gezogen werden, welche die Richtung der Linie hk hat oder mit der Abscisse hf den Win-

kel m bildet, so muß in dem gesuchten Curvenpunkt der Differentialquotient der Ordinate und Abscisse, oder die durch $\frac{dy}{dx}$ vorgestellte Function von x, den bestimmten und gegebenen Zahlenwerth $\frac{ki}{hi}$ haben, d. h. der trigonometrischen Tangente des Winkels m gleich sein. Differentiirt man also die gegebene Coordinatengleichung der Curve, und setzt die für $\frac{dy}{dx}$ erhaltene Function gleich dem gegebenen Zahlenwerth $\frac{ki}{hi}$, so bedarf es nur noch einer Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf x als Unbekannte, um den bestimmten Werth der Abscisse zu finden, für welchen der Differentialquotient den vorgeschriebenen Werth annimmt und die Tangente die vorgeschriebene Richtung hat.

Es sei z. B. an die Ellipse dgef (Fig. 44), deren halbe große Axe a und deren halbe kleine Axe c heißt, und deren Mittelpunktsgleichung demnach $y = \frac{c}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, eine Tangente zu ziehen, in der Richtung der Linie oh, welche mit der Abscisse be einen Winkel von 45° bildet. Da in diesem Falle hi = ik, so ist, für eine in der Richtung be wachsende Abscisse, der constante Differenzquotient der Coordinaten der geraden Linie oh gleich −1. Im gesuchten Berührungspunkt der Tangente muß also der Differentialquotient der Coordinaten der Ellipse auch den Werth −1 haben. Nun folgt aus $y = \frac{c}{a}.(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{a}.\frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.2x = -\frac{cx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Für den gesuchten Berührungspunkt ist also

$$-\frac{cx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = -1$$

$$cx = a\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$c^2x^2 = a^2(a^2 - x^2)$$

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}}.$$

Das doppelte Vorzeichen des Werthes von x zeigt, daß die Abſciſſe, für welche die Tangente die verlangte Richtung annimmt, zwei gleiche und entgegengeſetzte Werthe hat, die alſo vom Nullpunkt b der Abſciſſe nach entgegengeſetzten Richtungen abzutragen ſind. Iſt z. B. $a = 4$, $c = 3$, ſo iſt $x = \pm \frac{16}{5} = \pm 3\frac{1}{5}$. Es werden alſo, wenn wir $bp = +3\frac{1}{5}$ und $bq = -3\frac{1}{5}$ nehmen, die dieſen Abſciſſen zugehörigen Curvenpunkte m und n Tangenten von der vorgeſchriebenen Richtung haben.

§. 98.

Tangenten von einem Punkt außerhalb der Curve.

Es ſoll von einem gegebenen Punkt p außerhalb einer beliebigen Curve abc (Fig. 45), deren Coordinatengleichung übrigens gegeben ſein muß, eine Tangente an die Curve gezogen werden. Die Linie ae ſei die Abſciſſe, und in a ihr Anfangspunkt. Die Lage des Punktes p bezüglich auf die Curve muß beſtimmt ſein, d. h. die Coordinaten ad und pd des Punktes p müſſen bekannt ſein. Die Abſciſſe ad heiße der Kürze wegen k, und die Ordinate pd heiße h. Man denke ſich vorläufig von p aus die verlangte Tangente pb ſchon gezogen. Es ſoll nun die Abſciſſe af, welche dem Berührungspunkt b zugehört, gefunden werden. Die Abſciſſe af heiße x und ihre zugehörige Ordinate y. Nun kann der Werth, welchen der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für den Punkt b annimmt, leicht durch die gegebenen Größen k und h, und durch die Abſciſſe x ausgedrückt werden. Denn zieht man bg parallel mit ad, ſo iſt, da bp eine Tangente ſein ſoll, $\frac{pg}{bg}$ der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für die Ab-

ſciſſe af. Es iſt aber $pg = h - y$, und $bg = k - x$, und folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{h-y}{k-x}$. Da y und $\frac{dy}{dx}$ Functionen von x ſind, welche durch die Coordinatengleichung der Curve gegeben ſind, ſo hat man nach Einführung dieſer Functionen eine Gleichung, in welcher die Abſciſſe x die einzige Unbekannte iſt, und durch deren Auflöſung ſich demnach die dem Berührungspunkt zugehörige Abſciſſe finden läßt.

Die Curve abc (Fig. 45) ſei die gemeine Parabel. Die Axe ae als Abſciſſe, den Anfangspunkt in a, und den Parameter gleich p geſetzt, iſt $y = \sqrt{px}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$. Die allgemeine Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{h-y}{k-x}$ wird demnach bei der Parabel

$$\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}} = \frac{h - \sqrt{px}}{k-x}$$

$$\sqrt{p}.k - \sqrt{p}.x = 2h\sqrt{x} - 2\sqrt{p}.x$$

$$\sqrt{p}.x - 2h\sqrt{x} = -\sqrt{p}.k$$

$$x - \frac{2h}{\sqrt{p}}.\sqrt{x} = -k.$$

Dieſe Gleichung, welche in Bezug auf $\sqrt{x}$ quadratiſch iſt, gibt aufgelöſt

$$\sqrt{x} = \pm\sqrt{\frac{h^2}{p} - k} + \frac{h}{\sqrt{p}}$$

$$x = \frac{2h^2}{p} - k \pm \sqrt{\frac{h^2}{p} - k}.$$

Man ſieht, daß die geſuchte Abſciſſe zwei Werthe hat, und daß alſo von einem Punkt p außerhalb einer Parabel nach zwei verſchiedenen Punkten derſelben Tangenten gezogen werden können. Sei z. B. der Parameter $p = 4$, $k = 3$, $h = 4$, ſo wird $x = 1$ und $x = 9$ gefunden, und macht man $af = 1$ und $ae = 9$, ſo ſind pb und pc Tangenten.

Der Ausdruck $\sqrt{\frac{h^2}{p} - k}$, und folglich auch die Abscisse x, wird unmöglich, wenn $\frac{h^2}{q}$ kleiner ist als k, oder h^2 kleiner ist als pk. Es fragt sich, wie der Punkt p liegen muß, damit dies eintrete, und die Tangente unmöglich ist. Ist die Abscisse ad der Parabel = k, so ist die Ordinate dl der Parabel = $\sqrt{pk}$, und $dl^2 = pk$. Wenn nun h^2 kleiner ist als pk, in welchem Falle die Tangente unmöglich sein sollte, so ist auch h^2 kleiner als dl^2, und h kleiner als dl, und folglich fällt der Punkt p innerhalb der Parabel, und von einem solchen ist natürlich keine Tangente möglich.

§. 99.

Tangenten bei Polarcoordinaten.

Da man sich bei Erzeugung der Curven durch Coordinaten bisher fast gänzlich auf die beiden Systeme der Parallelcoordinaten und der Polarcoordinaten beschränkt hat, so wollen wir auch nur noch das Ziehen der Tangenten für den Fall nachweisen, als ein Zug in der Ebene durch Polarcoordinaten bestimmt ist. Man nennt jede Curve, in so fern sie durch Polarcoordinaten vorgeschrieben ist, eine Spirale. Es sei der Kreis abe (Fig. 46), dessen Radius ca den Zahlenwerth 1 hat, der Abscissenkreis. In a sei der Nullpunkt desselben, oder ca die Anfangsrichtung der Ordinaten. Die Drehung der Ordinate geschehe in der Richtung von a nach b. Eine beliebige Ordinate cd hat man sich ausgedrückt zu denken durch eine Function der Bogenlänge abe, welche für den Radius = 1 die aus der Anfangsrichtung ca bis in die Richtung cd durchlaufene Drehungsgröße angibt. Der veränderliche Bogen des Abscissenkreises heiße w, und die zugehörige Ordinate u. Es werden alle Curven unter der allgemeinen Gleichung $u = f(w)$ befaßt; und es wird gefragt, wie eine Tangente an einen bestimmten Punkt einer Curve gezogen werden kann, wenn

$f(w)$, und folglich auch $\frac{df(w)}{dw}$ oder $\frac{du}{dw}$ bekannte Functionen von w sind.

Man denke sich vorläufig an einen Punkt d der Spirale mdh (Fig. 46) die Tangente schon gezogen. Errichtet man auf der Ordinate cd eine Senkrechte, welche durch den Mittelpunkt des Abschiffenkreises geht, so nennt man das Stück ck derselben, welches die verlängerte Tangente abschneidet, die Subtangente des Punktes d. Es ist klar, daß die Tangente eines Punktes der Curve ohne Weiteres gezogen werden kann, wenn man die Länge der Subtangente weiß. Wir brauchen also nur diejenige Function der Abschisse w aufzusuchen, durch welche die Länge der Subtangente angegeben wird; und dazu gelangen wir durch Beachtung der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der Coordinaten. Lassen wir den Abschiffenbogen vom Punkt e aus wachsen um das Stück ef, so wächst die Ordinate um das Stück gh, in so fern dg ein mit dem Radius od beschriebener Kreisbogen ist. Der Werth, welchem sich der Quotient $\frac{gh}{fe}$, oder der Differenzquotient $\frac{\Delta u}{\Delta w}$, ohne Ende nähert bei fortgesetzter Verkleinerung der zusammengehörigen Zunahmen gh und fe, oder bei der allmäligen Zurückdrehung der Linie ch in die Lage der Linie cd, ist der Differentialquotient der Coordinaten, und gleich $\frac{du}{dw}$ zu setzen. Aus der Betrachtung der Bestandtheile der Figur ergibt sich auf eine einfache Weise zunächst zwar nur der Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{gd}$; daß aber aus demselben, wenn er gefunden ist, auch der Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{ef}$ ohne Weiteres abgeleitet werden kann, ist leicht zu sehen. Denn bei jeder beliebigen Verkleinerung der Zunahme ef behalten die Bogen ef und dg ein unveränderliches Verhältniß, und zwar verhält sich immer ef zu $d'g$ wie ce zu cd, d. h.

wie 1 zu u, oder dg ist immer gleich u.ef. Folglich ist auch der Quotient $\frac{gh}{ef}$ immer u mal so groß als der Quotient $\frac{gh}{dg}$, und ebenso der Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{ef}$, oder der Differentialquotient $\frac{du}{dw}$, u mal so groß als der Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{dg}$. Wir brauchen demnach nur den aus der Betrachtung der Figur ableitbaren Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{dg}$ mit u zu multipliciren, um den Werth von $\frac{du}{dw}$ zu erhalten.

Nun nähert sich aber, indem man die Linie ch in die Lage der Linie cd zurückgedreht denkt, der Bogen gd ohne Ende einer geraden Linie, welche auf der nach cd zurückgedrehten ch senkrecht steht, und der Bogen dh nähert sich ebenfalls einer mit ihm zusammenfallenden Geraden, nämlich der Tangente, und folglich nähert sich das gemischtlinigte Dreieck dgh ohne Ende einem rechtwinkligen, dessen eine Kathete senkrecht auf cd steht, und dessen Hypotenuse in die Richtung der Tangente fällt. Denkt man sich dies im Verschwinden des gemischtlinigten Dreiecks angestrebte rechtwinklige Dreieck zur Ausführung gekommen, so hat es die Gestalt des Dreiecks dck, dessen eine Kathete und dessen Hypotenuse ja in dieselben Richtungen fallen, welche die entsprechenden Seiten des angestrebten rechtwinkligen Dreiecks haben sollten. Der Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{dg}$ ist demnach nichts Anderes als der Quotient $\frac{cd}{ck}$. Nun ist cd die jedesmalige Ordinate u, und ck die Subtangente. Also ist $\frac{u}{\text{subtang}}$ der Grenzwerth des Quotienten $\frac{gh}{dg}$. Nun brauchen wir, wie vorher bemerkt, den Grenzwerth

des Quotienten $\frac{gh}{dg}$, oder den Ausdruck $\frac{u}{\text{subtang}}$, nur mit u zu multipliciren, um den Differentialquotienten $\frac{du}{dw}$ zu erhalten. Folglich ist $\frac{u^2}{\text{subtang}} = \frac{du}{dw}$ oder

$$\text{subtang} = \frac{u^2}{\left(\frac{du}{dw}\right)}.$$

Der Werth der Subtangente wird positiv oder negativ sein, je nachdem $\frac{du}{dw}$ positiv oder negativ ist. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir uns in der Nachweisung der Lage positiver und negativer Subtangenten auf positive Abscissen beschränken. Man denke sich die Linie, welche durch den Mittelpunkt des Abscissenkreises senkrecht auf die Ordinate gezogen ist, und auf welcher durch die Tangente die Subtangente abgeschnitten wird, zu beiden Seiten der Ordinate verlängert. Nach derjenigen Seite der Ordinate, nach welcher die Tangente einen spitzen Winkel mit der Ordinate bildet, wird auch die Subtangente fallen. Sind die Ordinaten positiv, und bildet die Tangente einen spitzen Winkel mit der Ordinate an derjenigen Seite der Ordinate, nach welcher die Drehung geschieht, so ist der Differentialquotient negativ, und bildet die Tangente einen spitzen Winkel an der entgegengesetzten Seite der Ordinate, so ist der Differentialquotient positiv. Mithin wird, da die Subtangente dasselbe Vorzeichen hat als der Differentialquotient, bei positiven Ordinaten eine negative Subtangente abzutragen sein auf derjenigen Seite der Ordinate, nach welcher die Drehung geschieht, und eine positive Subtangente auf der entgegengesetzten Seite. Sind aber die Ordinaten negativ, und bildet die Tangente mit der Ordinate einen spitzen Winkel nach der Seite der Drehung, so ist der Differentialquotient positiv, und im andern Falle negativ. Mithin wird bei negativen Ordinaten eine positive

Subtangente nach der Seite der Drehung, und eine negative nach der entgegengesetzten Seite abzutragen sein.

§. 100.

Beispiele von Tangenten bei Polarcoordinaten.

1) Die Curve b d e a f (Fig. 47) sei construirt nach der Gleichung $u = \frac{1}{2\pi}.w$. Dieselbe heißt die Archimedeische Spirale. Der Nullpunkt des Abscissenkreises sei in a genommen, und also c a die Anfangsrichtung der Ordinate und die Drehung geschehe von c a nach c b. Für diese Spirale ist $\frac{du}{dw} = \frac{1}{2\pi}$. Werden in den allgemeinen Ausdruck $\frac{u^2}{\left(\frac{du}{dw}\right)}$ der Subtangente die für unsern Fall geltenden Werthe eingeführt, so ist subtang $= \frac{w^2.2\pi}{(2\pi)^2} = \frac{w^2}{2\pi}$. Für den Punkt d der Curve, wo die Hälfte des Abscissenkreises durchlaufen und also $w = \pi$ sein möge, ist die Subtangente $= \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$. Ist also c k senkrecht auf c d, und wird c l $= \frac{\pi}{2} = 1,57\ldots$ genommen, so ist l d eine Tangente. Im Punkt e, wo $w = \frac{3\pi}{2}$ sein möge, ist die Subtangente $= \frac{9\pi}{8} = 3,53\ldots$ Wird c m $= 3,53\ldots$. genommen, so ist m e eine Tangente. Nach einer ganzen Umdrehung in a, wo $w = 2\pi$, ist die Subtangente $= 2\pi$. Nach zwei ganzen Umdrehungen in h ist $w = 2.2\pi$, und die Subtangente $= 2^2.2\pi$. Nach m Umdrehungen ist $w = m.2\pi$, und die Subtangente $= m^2.2\pi$, wie schon Archimedes gefunden hat.

2) Denken wir uns eine Curve gebildet nach der Glei-

chung $u = \frac{1}{w}$. Der Kreis aehf (Fig. 48) sei der Abscissenkreis; der Nullpunkt desselben sei in a, und das Wachsen geschehe in der Richtung von a nach b. Im Mittelpunkt des Abscissenkreises denke man sich den Buchstaben c gesetzt. Für den Punkt a, oder für $w = 0$, ist $u = \frac{1}{0}$, oder unendlich. Für den Punkt b, wo $w = \frac{1}{3}$ sein möge, ist u oder $cg = 3$. Ist die Abscisse $ad = \frac{2}{3}$, so ist die Ordinate $cm = \frac{3}{2}$. Für $ae = 1$ ist die Ordinate $ce = 1$. Ist $ah = \frac{\pi}{2}$, so ist die Ordinate $ci = \frac{2}{\pi} = 0{,}63\ldots$ Für den Punkt f, wo $w = \pi$, ist die Ordinate $ck = \frac{1}{\pi} = 0{,}31\ldots$. u. s. w. Man sieht, daß bei Vergrößerung der Abscisse die Ordinaten immer kleiner werden, und die Curve sich immer mehr dem Punkt c nähert, welchen sie jedoch bei jeder endlichen Anzahl von Umdrehungen nicht erreicht. Man setze ferner die Abscisse w negativ, oder $u = -\frac{1}{w}$. Man lasse $-w$ allmälig wachsen, d. h. durch Zusatz von positiven Zahlen sich allmälig seinem negativen Werthe nach verkleinern. Denkt man zuerst ein unendliches negatives w, so ist $u = 0$. Indem aber w von sehr großen negativen Werthen zu kleineren negativen Werthen fortschreitet, und die zugehörigen Ordinaten bestimmt werden, so erhebt sich aus dem Punkt c eine Curve von derselben Gestalt und Größe wie die erstere, nur mit entgegengesetzter Lage ihrer Windungen. Ueber diese Doppelspirale, welche die hyperbolische heißt, äußert sich Johann Bernoulli, der sie zuerst untersuchte, dahin, daß, wenn es noch Sitte wäre, auf dem Grabstein der Mathematiker eine ihrer Entdeckungen einzuzeichnen, er wünschen würde,

daß auf ſeinem Grabſtein dieſe Spirale mit der Inſchrift mutata resurgo eadem eingegraben würde.

Beſtimmen wir, um Tangenten an dieſe Curve zu ziehen, ihre Subtangente. Da $u = \frac{1}{w} = w^{-1}$, ſo iſt $\frac{du}{dw} = -w^{-2}$. Folglich iſt die Subtangente $= \frac{w^{-2}}{-w^{-2}} = -1$, alſo conſtant und gleich dem Radius des Abſciſſenkreiſes. Die Subtangente iſt als negative dem Obigen zu Folge an der Seite der Ordinate abzutragen, nach welcher die Drehung der Ordinate geſchieht. Um an den Punkt e z. B. eine Tangente zu legen, ziehe man cn ſenkrecht auf ce, und die Linie ne iſt Tangente. Ebenſo iſt, da cf ſenkrecht auf ci iſt, die Linie fi eine Tangente.

Drückt man die ſenkrechte Entfernung gq aus, welche ein beliebiger Curvenpunkt g von der verlängerten Anfangsrichtung ca der Ordinaten hat, ſo hat man $gq = cg \cdot \sin ab$, oder, da allgemein in $cg = u$, und der zugehörige Bogen ab die Abſciſſe w iſt, $gq = u \cdot \sin w$. Da aber für unſere Spirale $u = \frac{1}{w}$ iſt, ſo iſt $gq = \frac{\sin w}{w}$. Nun nähert ſich der Werth der Function $\frac{\sin w}{w}$ bei fortgeſetzter Verkleinerung von w ohne Ende der Zahl 1; folglich nähert ſich auch die ſenkrechte Entfernung gq bei Verlängerung des Curvenzweiges ohne Ende dem Zahlenwerth 1, alſo der Länge der Linie ch. Iſt nun hp mit cq parallel, ſo nähert ſich demnach die Curve ohne Ende der Geraden hp, oder dieſe Gerade iſt eine Aſymptote der Curve.

3) Wir wollen noch die Ellipſe als durch Polarcoordinaten erzeugt denken, und die Polargleichung derſelben aufſtellen. Die Ordinaten ſollen von einem Brennpunkt f (Fig. 49) ausgehen, welche Annahme in der Anwendung am gewöhnlichſten vorkommt. Die Anfangsrichtung der Ordinaten ſei fh, und es ſoll eine beliebige Ordinate fd als Function des Drehungswinkels dfh, oder der ihm ent-

sprechenden Bogenlänge mit dem Radius 1 ausgedrückt werden. Der wachsende veränderliche Winkel dfh oder Bogen heiße w. Wir wollen hier, ohne von den allgemeinen Sätzen über Coordinatenverwandlung Gebrauch zu machen, die Gleichung zwischen den Veränderlichen fd und w aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse ableiten. Die halbe große Axe sei gegeben, und heiße a; desgleichen die Entfernung des Brennpunkts f vom Mittelpunkt b, und sie heiße e. Der eine beliebige Radius Vector fd sei durch r, und der andere gd durch R vorgestellt. Bekanntlich ist $r + R = 2a$. Durch die drei Seiten r, R und 2e des Dreiecks fdg läßt sich nach einem bekannten trigonometrischen Satz der Cosinus des Winkels dfg, oder des Winkels $180^0 - w$, ausdrücken; und zwar ist

$$\cos(180 - w) = \frac{4e^2 + r^2 - R^2}{4er}$$

$$-\cos w = \frac{4e^2 + r^2 - R^2}{4er}.$$

Da nun $R = 2a - r$, so ist

$$-\cos w = \frac{4e^2 + r^2 - 4a^2 + 4ar - r^2}{4er}$$

$$-\cos w = \frac{e^2 - a^2 + ar}{er}$$

$$-er\cos w = e^2 - a^2 + ar$$

$$ar + er\cos w = a^2 - e^2$$

$$r(a + e\cos w) = a^2 - e^2.$$

Wenn wir die halbe kleine Axe durch c vorstellen, so ist bekanntlich $a^2 - e^2 = c^2$, und folglich

$$r(a + e\cos w) = c^2$$

$$r = \frac{c^2}{a + e\cos w}.$$

Da a, c, und e constante Größen der Ellipse sind, so ist durch diese Gleichung der veränderliche Radius Vector, oder die Ordinate r, als Function des veränderlichen Bogens w dargestellt. Gewöhnlich führt man nicht den Werth

der Länge fb, welche wir e genannt haben, in die Gleichung ein, sondern ſtatt derſelben den Quotienten $\frac{fb}{hb'}$ oder $\frac{e}{a}$. Den Werth des Quotienten $\frac{e}{a}$ nennt man die Excentricität der Ellipſe. Stellen wir dieſelbe durch E vor, ſo iſt $E = \frac{e}{a}$, und $e = aE$. Und indem wir in die gefundene Polargleichung der Ellipſe aE ſtatt e ſubſtituiren, erhalten wir

$$r = \frac{c^2}{a + aE\cos w} = \frac{c^2}{a(1 + E\cos w)}.$$

Dieſe Gleichung kann noch dadurch vereinfacht werden, daß man ſtatt a und c den Parameter p, oder die durch einen Brennpunkt g gehende Senkrechte mn, einführt, weil man weiß, daß $\frac{1}{2}p = \frac{c^2}{a}$ iſt. Setzen wir alſo in die vorſtehende Gleichung $\frac{1}{2}p$ ſtatt $\frac{c^2}{a}$, ſo erhalten wir

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + E\cos w}$$

oder indem wir die veränderliche Ordinate r wieder wie früher durch u bezeichnen,

$$u = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + E\cos w}.$$

Um nun an die Ellipſe als Spirale betrachtet eine Tangente zu ziehen, müſſen wir die Subtangente darſtellen, und haben alſo zuerſt $\frac{du}{dw}$ zu entwickeln. Aus der Gleichung $u = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + E\cos w}$ folgt

$$\frac{du}{dw} = \frac{(1 + E\cos w).0 - \frac{1}{2}p. - E\sin w}{(1 + E\cos w)^2}$$

$$\frac{du}{dw} = \frac{\frac{1}{2}p \cdot E \sin w}{(1+E\cos w)^2}.$$

Werden in den allgemeinen Ausdruck $\frac{u^2}{\left(\frac{du}{dw}\right)}$ der Subtangente die für die Ellipse geltenden Werthe eingeführt, so haben wir

$$\text{subtang} = \frac{\frac{1}{4}p^2}{\frac{1}{2}p \cdot E \sin w} = \frac{\frac{1}{2}p}{E \sin w}.$$

Sei z. B. in der Ellipse Fig. 49 die halbe große Axe $a = 5$ und die halbe kleine Axe $c = 3$ gegeben. Daraus bestimmen sich die Constanten $\frac{1}{2}p$ und E; denn da $\frac{c^2}{a} = \frac{1}{2}p$, so ist hier $\frac{9}{5} = \frac{1}{2}p$. Ferner ist allgemein $e^2 = a^2 - c^2$, und folglich hier $e = 4$. Da endlich $E = \frac{e}{a}$ ist, so haben wir hier $E = \frac{4}{5}$. Bei dieser in Bezug auf ihre Constanten völlig bestimmten Ellipse ist also

$$\text{subtang} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{4}{5} \cdot \sin w} = \frac{9}{4 \sin w}.$$

Im Punkt h, wo $w = 0$, ist gemäß dieser Gleichung die Subtangente unendlich, oder die Tangente ist mit der Linie, welche durch den Punkt f senkrecht auf fh gezogen ist, parallel. Im Punkt i, wo $w = 90^0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ sein möge, und $\sin w = 1$ ist, ist die Subtangente $fl = \frac{9}{4}$. Im Punkt k, wo $w = \pi$, ist die Subtangente wieder unendlich, und die Tangente schneidet die Verlängerung der Linie

fl gar nicht. Bei weiterer Drehung der Ordinate wird sin w und folglich auch die Subtangente negativ, und fällt als solche auf diejenige Seite der Ordinate, nach welcher hin die Drehung geschieht.

4) Für die Anwendung ist es oft von Wichtigkeit, den Winkel zu wissen, welchen die Tangente mit dem Radius Vector, oder mit der Polarcoordinate macht. Derselbe ist aber sehr leicht zu finden. In der Fig. 46, welche eine beliebige durch Polarcoordinaten gegebene Linie darstellt, sei der Winkel cdk, welcher z heißen möge, zu bestimmen. Da cd als die Ordinate und ck als die Subtangente senkrecht auf einander sind, so ist $\frac{ck}{cd}$, oder allgemein $\frac{\text{subtang}}{u}$, gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels z. Da aber $\text{subtang} = \frac{u^2}{\left(\frac{du}{dw}\right)}$, so ist $\frac{\text{subtang}}{u} = \frac{u}{\left(\frac{du}{dw}\right)}$, und folglich allgemein

$$\text{tang } z = \frac{u}{\left(\frac{du}{dw}\right)}.$$

Für die Ellipse z. B. erhielten wir demnach

$$\text{tang } z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + E\cos w} \cdot \frac{(1 + E\cos w)^2}{\frac{1}{2}p \,.\, E \sin w}$$

$$\text{tang } z = \frac{1 + E\cos w}{E \sin w}.$$

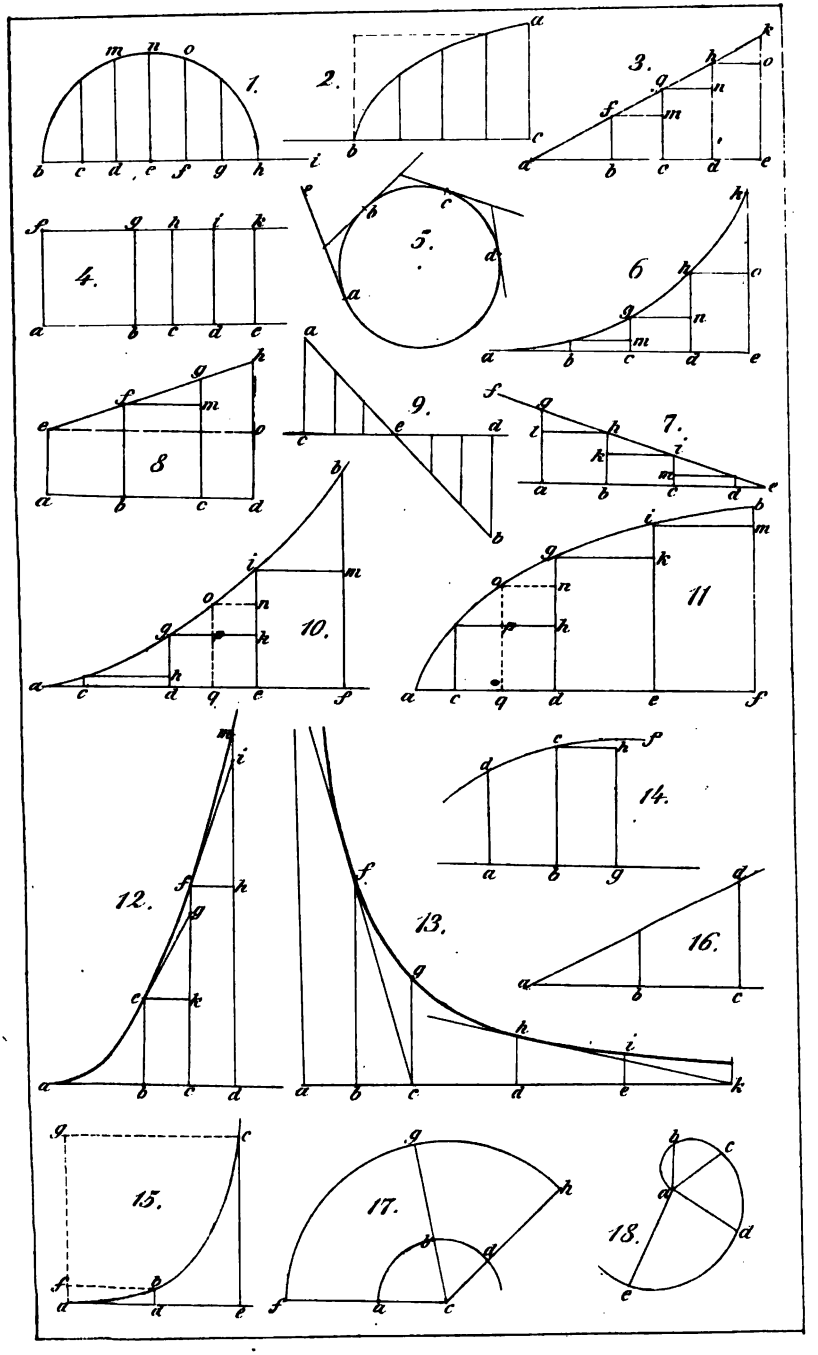
Bei der Ellipse Fig. 49, für welche $E = \frac{4}{5}$ angenommen war, ist im Punkt l, wo $w = \frac{\pi}{2}$, hiernach die Tangente des Winkels $fil = \frac{1 + \frac{4}{5} \cdot 0}{\frac{4}{5} \cdot 1} = \frac{5}{4}$.

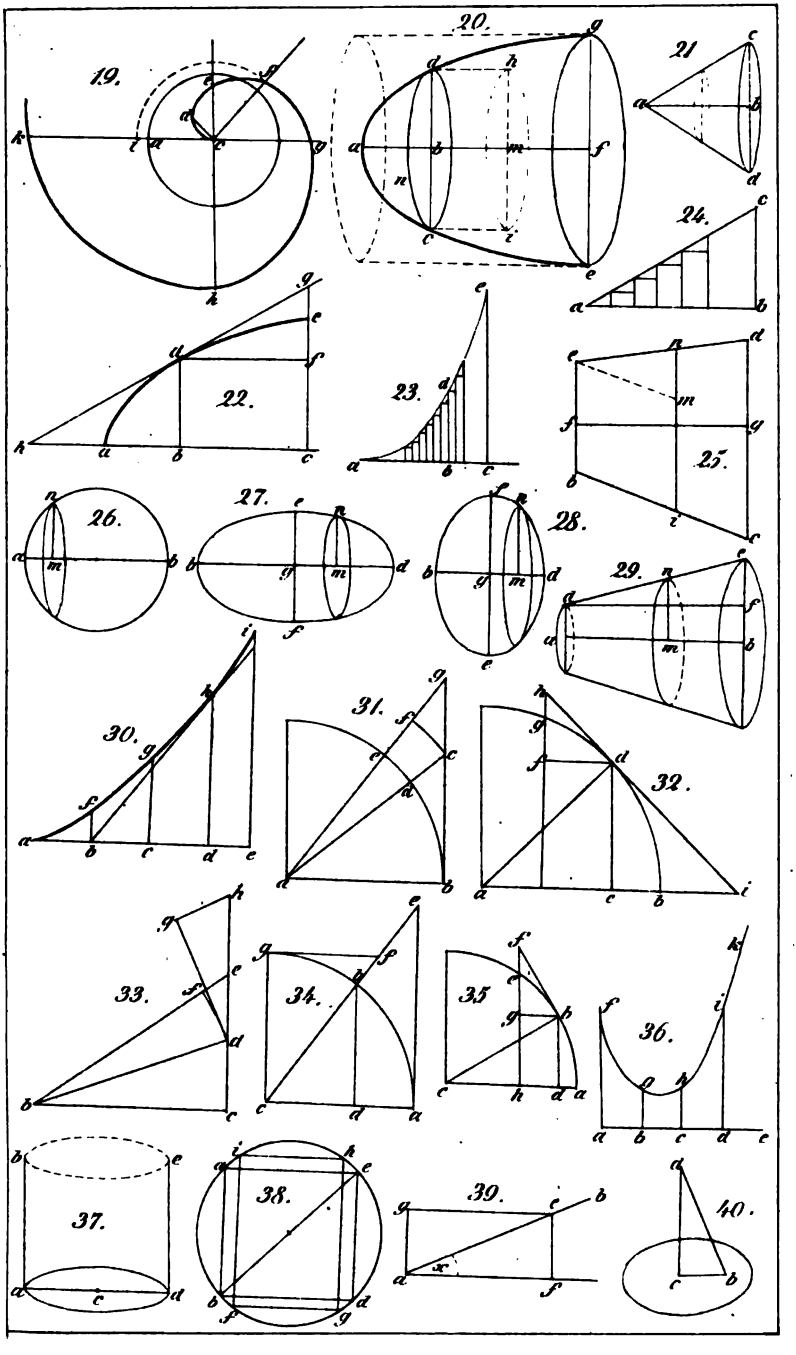
Die in diesem Capitel gegebene allgemeine Auflösung zweier umfassenden Probleme, des Problems der Tangenten für die beiden üblichen Coordinatensysteme, und des Problems vom Größten und Kleinsten werden wohl erkennen lassen, wie sehr durch die Allgemeinheit ihrer Methoden sich die Differentialrechnung zu ihrem Vortheil unterscheidet von allen andern immer nur unter besonderen Umständen anwendbaren Kunstgriffen der Auflösung specieller Probleme. Von welchem Erfolg aber die Allgemeinheit des Standpunkts und der Methoden ist, kann man, wenn es nicht von selbst einleuchtet, aus der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaft hinlänglich ersehen. Diese freie über allem Einzelnen schwebende in dem reinen Aether der Abstraction vollführte Bewegung des Denkens, welche trotz der Höhe der Abstraction sich nicht im Leeren herumdreht, sondern ein Universum individueller Bildungen energisch ausgebiert, wodurch wird sie erreicht? Sie wird dadurch erreicht, daß das Sein aus dem Werden abgeleitet wird, daß das im Proceß des Werdens zugleich Entstehende und Vergehende, das nie Erscheinende und nie zur Realität Kommende als das wahrhaft Reale, als das innere Wesen erfaßt und an die Spitze gestellt wird. Das Sichtbare wird zum wesenlosen Schein, und das Unscheinbare immer in sich verschlossen Bleibende zum urkräftigen erzeugenden Wesen der Dinge. Eine Wissenschaft, die auf der festen Basis des Sichtbaren fortschreiten will, kriecht nur langsam an den Gegenständen hinauf mit zur Erde gebücktem Haupte ohne allen Blick ins Weite und Freie. Eine Wissenschaft aber, welche mit Geistermacht ihren Fuß auf das Unsichtbare setzt, schreitet wie eine Homerische Göttin durch den ätherischen Raum, wo sie eine ganze Welt zu ihren Füßen ausgebreitet erblickt.

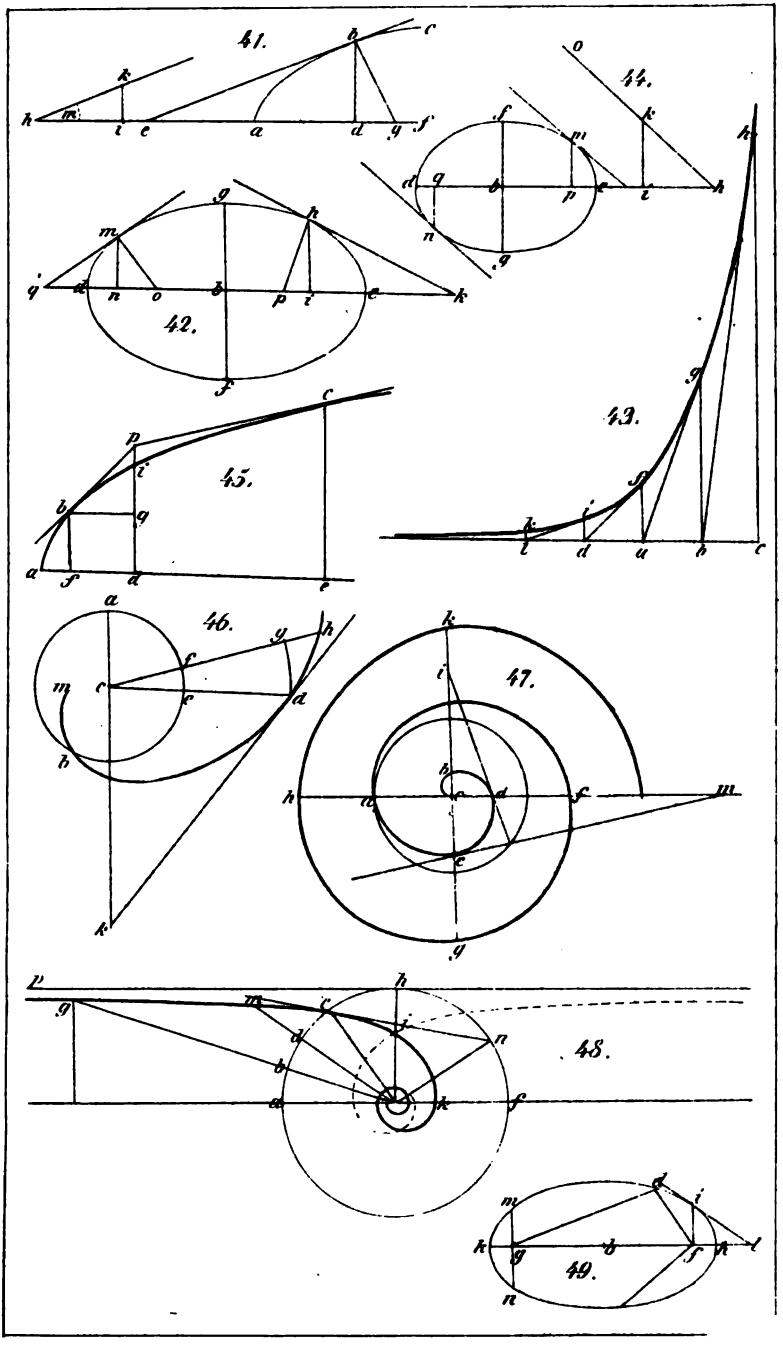
Wir schließen hiermit die Lehre vom ersten Differentialquotienten, oder von dem ersten Grade der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens zweier Veränderlichen. Indem wir in der Begründung und Rechtfertigung dieses

Begriffs, in der Erläuterung seiner Bedeutung und seines Erfolges, so wie endlich in der Vermittelung seines allseitigen Gebrauches durch Aufstellung der Differentiationsregeln beliebiger Functionen nichts Wesentliches übergangen zu haben glauben, dürfen wir das Vorhergehende für hinreichend erachten, eine genügende Einsicht in diesen Theil der Differentialrechnung zu geben. Die Vollendung der hier begonnenen Analyse des Begriffs der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens wird die wesentlichste Aufgabe der zweiten Abtheilung dieser Schrift sein.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8
9.
10.
11
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.


19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.


41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.

Einleitung

in die

Differential- und Integralrechnung.

Zweiter Theil.

(2)

Einleitung

in die

Differential=

und

Integralrechnung

von

Karl Snell,

ordentlichem öffentlichem Professor der Mathematik und Physik an der Universität Jena.

Zweiter Theil.

Von den höheren Differentialquotienten.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

1851.

Vorrede.

Nach einer längeren Verzögerung, deren Gründe, da ſie perſönlicher Natur ſind, mit Stillſchweigen übergangen werden mögen, übergebe ich hiermit den Freunden der höheren Analyſis den zweiten Theil meiner Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Die in demſelben gegebene Erörterung des Weſens und der Bedeutung der höheren Differentialquotienten iſt, ſo viel mir bekannt, die erſte ausführliche und erſchöpfende, welche dieſem wichtigen Zweige der Infiniteſimalrechnung ſeit der Entdeckung dieſer Wiſſenſchaft zu Theil geworden iſt. Der Leſer findet hier dasjenige ausgeführt, was als der Zweck und der Inhalt der Lehre von den höheren Differentialquotienten an einigen Stellen des erſten Theiles im Vorbeigehen angedeutet iſt. Ueber das, was an der gangbaren Auffaſſung dieſer Lehre vermißt wird, und was eine erſchöpfende Darſtellung derſelben zu leiſten hat, habe ich mich in den erſten Paragraphen dieſes Theiles ausgeſprochen, und finde daher nicht nöthig, den Standpunkt, von welchem aus ich meinen Gegenſtand betrachtet habe, und das Verhältniß dieſer Darſtellung zu anderen deſſelben Gegenſtandes hier näher zu bezeichnen. Nur ſo viel will ich noch bemerken, daß die hier gegebene Darſtellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten eine ganz einfache Folge der in dem erſten Theile enthaltenen Lehre vom erſten Differentialquotienten

iſt. Sowie wir bei dieſer letzteren Lehre die gleichmäßig Wachſenden, als die einzigen Größen, welche eine beſtimmte und klare Vorſtellung von der Stärke des Wachſens geben können, an die Spitze geſtellt haben, und den Sinn des momentanen Werthes von $\frac{dy}{dx}$ dadurch erläutert haben, daß wir ihn als mit einem conſtanten Werthe von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zweier gleichmäßig Wachſenden zuſammenfallend nachgewieſen haben, ſo haben wir auch bei der Veränderung der Stärke des Wachſens oder bei der Beſchleunigung des Wachſens die gleichförmig beſchleunigt wachſenden Größen, als die Einzigen, mit denen ſich die Vorſtellung einer beſtimmten Veränderung der Stärke des Wachſens verbinden läßt, an die Spitze geſtellt, und die Erklärung der Bedeutung des momentanen Werthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf einen conſtanten Werth von $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$ zurückgeführt. Ebenſo iſt die Bedeutung von $\frac{d^3y}{dx^3}$ auf einen conſtanten Werth von $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ bezogen, und desgleichen mit den folgenden Differentialquotienten. Hiermit wird alle Vorſtellung von der Natur und Art des Wachſens darauf zurückgebracht, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen in irgend einem Grade der ſucceſſiven Differenzenbildung verbunden ſind, ſei es nun, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entweder unmittelbar gleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden ſind, (gleichmäßig Wachſende ſchlechthin oder im erſten Grade) oder gleiche Zunahmen der Zunahmen, d. h. gleiche Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, oder gleiche Zunahmen der Unterſchiede der Zunahmen u. ſ. w. Wir haben daher gleichmäßig Wachſende im erſten, zweiten, dritten u. ſ. w. Grade, und überhaupt eine Stärke des Wachſens im

ersten, zweiten und dritten Grade unterschieden. Jede solche in irgend einem Grade gleichmäßig Wachsende gibt uns in einem leicht und vollkommen bestimmt angebbaren Ausdrucke eine feste und unveränderliche Regel des Wachsens der Veränderlichen, und ein beliebiger Werth eines höheren Differentialquotienten hat in Bezug auf das Wachsen der Veränderlichen eben den einfachen Sinn, daß er mit gleichmäßig Wachsenden desselben Grades von constanter Stärke des Wachsens zusammenfällt. Wir haben, um die Vorstellung von dem Werthe und der Bedeutung der höheren Differentialquotienten zur Anschaulichkeit und vollkommensten Evidenz zu bringen, nicht versäumt, die geometrische Construction der höheren Differentialquotienten für verschiedene veränderliche Raumgrößen hinzuzufügen. Jedermann hält den constanten Differenzquotienten der Coordinaten der Tangente eines bestimmten Curvenpunktes für die geometrische Construction des dem berührten Curvenpunkte zugehörigen momentanen Werthes von $\frac{dy}{dx}$, in sofern x und y die Parallelcoordinaten der Curve vorstellen. Sowie nun in dem constanten Werthe von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Coordinaten der Tangente der momentane Werth von $\frac{dy}{dx}$ der Coordinaten der Curve zur Ausführung und wirklichen Darstellung kommt, so haben wir gezeigt, wie in den constanten Werthen von $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ u. s. w. der Coordinaten gewisser Linien die momentanen Werthe von $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ u. s. w. der Coordinaten beliebiger Curven zur Ausführung kommen, und man wird dies die geometrische Construction der höheren Differentialquotienten in Bezug auf Parallelcoordinaten zu nennen haben. Wir haben uns bei der geometrischen Construction der höheren Differentialquotienten nicht auf Ordinaten und insbesondere auf Parallelordi-

naten beſchränkt. Sobald der Begriff der höheren Differentialquotienten allgemein, d. h. arithmetiſch, genau feſtgeſtellt iſt, hat es ja gar keine Schwierigkeit, ihn auf alle veränderliche Raumgrößen zu übertragen. Ich finde, daß in mehreren neueren Werken über Differentialrechnung ein Anlauf genommen iſt zur anſchaulichen Erläuterung der Bedeutung der höheren Differentialquotienten und zur geometriſchen Conſtruction derſelben, ſehe aber, daß man in dieſer Aufgabe ſtecken geblieben und zu keinem befriedigenden Ziele gekommen iſt, aus dem einfachen Grunde, weil man die Begriffe der im zweiten, dritten u. ſ. w. Grade gleichmäßig wachſenden Größen nicht an die Spitze geſtellt hat.

Denkt man ſich die in einem Verflußpunkte einer abhängig Veränderlichen vorhandene momentane Stärke des Wachſens eines höheren Grades als zur Ausführung gekommen, und ſtellt man diejenige Function der willkürlich Veränderlichen, in welcher dieſe Ausführung enthalten iſt, dar, ſo hat man in derſelben die Taylor'ſche Reihe, oder, von dieſer etwas ſpeciellen Form einer Reihe abgeſehen, überhaupt eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen, deren Coefficienten beſtimmt ſind durch die verſchiedengradige Stärke des Wachſens desjenigen Verflußpunktes der Veränderlichen, deſſen Stärke des Wachſens eines beliebigen höheren Grades als zur Ausführung gekommen gedacht werden ſoll. Die Taylor'ſche und andere verwandte Reihen ſind nicht etwas Beſonderes zur Lehre von den höheren Differentialquotienten neu Hinzukommendes, ſondern ſie ſtellen allgemein die zur Ausführung gekommene Stärke des Wachſens irgend eines höheren Grades vor. Daß die Taylor'ſche Reihe erſt beinahe vierzig Jahre nach der Bekanntmachung der Differential- und Integralrechnung entdeckt worden iſt, ja daß es dazu überhaupt noch einer Entdeckung bedurfte, zeigt, daß auch die Entdecker und erſten Bearbeiter der Differentialrechnung es verſäumt hatten, ſich die Bedeutung der höheren Differentialquotienten in dem Sinne klar

zu machen, daß sie fragten, wie würden die veränderlichen Größen wachsen, wenn die durch einen höheren Differentialquotienten ausgedrückte Stärke des Wachsens eines beliebigen Grades zur Ausführung käme. In unserer Darstellung gehören die Taylor'sche und verwandte Potenzenreihen als nothwendiger Bestandtheil und als Schlußstein zu der Lehre von den höheren Differentialquotienten, und von der in der Regel de tri schon gebrauchten Vorstellung eines schlechthin gleichmäßigen Wachsens bis zur Taylor'schen Reihe ist die ganze Differentialrechnung ein aus Einem Keime sich entfaltendes Gewächs, oder ein geschlossenes und in Einem Plane erfaßtes Gebäude, in welchem nichts willkürlich von außen angesetzt ist, sondern Alles mit Nothwendigkeit an bestimmter Stelle hervortritt und sich einfügt, weil das Ganze nur die methodische Entfaltung des nach seiner ganzen Tiefe erschöpften Begriffes eines gemeinschaftlichen Wachsens veränderlicher von einander abhängiger Größen ist. Wie einfach und natürlich sich dadurch die Theorie der Reihen gestaltet, welche neue Gesichtspunkte in der Betrachtung derselben, und selbst welche neue Reihen sich dabei ergeben haben, möge der Leser an dem betreffenden Orte selbst nachsehen. Nur will ich bemerken, daß mir die im Capitel 10 aufgestellte Reihe (1), welche allgemein die Entwickelung einer Function $f(x)$ enthält, und bei welcher die Coefficienten mit der Anzahl der Glieder der Reihe gesetzmäßig sich ändern, in sofern von Wichtigkeit erscheint, als man aus derselben sieht, daß eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen convergiren und den Werth einer Function mit unbegrenzter Annäherung darstellen kann, wenngleich bis ins Endlose hin die folgenden Glieder der Reihe immer größer werden, und daß man Functionen von x, welche man bisher nicht in Potenzenreihen des ganzen Zahlenwerthes x mit angebbaren Coefficienten dargestellt hat, wie z. B. $\lg x$, und dergl. m. sehr wol durch diese Reihe als Potenzenreihe von x darstellen und mit beliebiger Annäherung berechnen kann.

Zum Schluß noch ein Wort der Rechtfertigung gegen einige Beurtheilungen, welche der erste Theil dieses Werkes erfahren hat. Ich habe mir nie beikommen lassen zu denken, daß meine Erklärung des Sinnes und der Bedeutung des ersten Differentialquotienten etwas Neues oder irgend einem Mathematiker Unbekanntes wäre, weil ich sah, daß alle einsichtsvollen Mathematiker, sobald sie den Sinn des Differentialquotienten bestimmter veränderlicher Größen erklärten, für den einzelnen Fall ganz dieselbe Erklärung geben, welche ich im Allgemeinen gegeben hatte. Nun ist von Mathematikern, welche selbst Schriftsteller im Gebiete der Differentialrechnung sind, meine auf gleichmäßig Wachsende zurückgeführte Erklärung der Bedeutung des ersten Differentialquotienten als eine verkehrte und thörichte Neuerung angegriffen worden. Es konnte kaum etwas Anderes mir eine so große Zufriedenheit mit meiner Arbeit einflößen als dieser Angriff gethan hat, weil ich einsah, daß meine ausführlichen allgemeinen Erörterungen und Erklärungen viel nöthiger und heilsamer sind als ich selbst gedacht hatte, da selbst Leute, die sich für Fach- und Sachkenner ausgeben, an der Differentialrechnung nichts weiter als einen begrifflosen Mechanismus haben, und ihnen die einfachsten trivialsten Grundbegriffe als etwas Neues erscheinen. Die Widerlegung dieses Angriffes wird mir leicht. Die Herren brauchen sich nämlich nur die Mühe zu nehmen, irgend ein Buch eines einsichtsvollen Mathematikers, in welchem der Sinn des Differentialquotienten bestimmter Größen erläutert wird, nachzuschlagen, so werden sie finden, daß Jeder, der sich überhaupt nur etwas denkt bei einem Differentialquotienten, sich nichts Anderes dabei denkt als was ich angegeben habe. In Poisson's Mechanik z. B. ist die Bedeutung der Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ (Raum und Zeit) und $\frac{dc}{dt}$ (Geschwindigkeit und Zeit) erklärt. Daselbst ist nicht von unendlich kleinen Zeiten und zugehörigen unend-

lich kleinen Räumen oder Geschwindigkeiten die Rede, sondern es heißt, $\frac{ds}{dt}$ bedeute die „Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, die statthaben würde, wenn die Kraft, die auf den Körper wirkt, in diesem Augenblicke aufhörte zu wirken.“ Also werden doch Raum und Zeit als gleichmäßig wachsend vorausgesetzt, um überhaupt eine bestimmte Vorstellung von Geschwindigkeit und von der durch $\frac{ds}{dt}$ ausgedrückten momentanen Geschwindigkeit zu haben. Ebenso heißt es gleich darauf in Bezug auf den Sinn des Differentialquotienten $\frac{dc}{dt}$: „Man bemerke, daß $\frac{dc}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, welche eine beständige Kraft in der Einheit der Zeit hervorbringen würde.“ Also werden auch hier Geschwindigkeit und Zeit wieder als gleichmäßig wachsend vorausgesetzt, und die Kraft während einer Zeit $=1$ als unverändert angenommen, um eine bestimmte Vorstellung von der Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit, und von dem Werthe des Differentialquotienten $\frac{dc}{dt}$ zu haben. Ist dies etwas Anderes als was wir allgemein von einem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ im §. 36 sagen: Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die abhängig Veränderliche y wachsen würde bei einer Zunahme der willkürlich Veränderlichen $=1$, wenn die vorhandene Stärke des Wachsens unverändert bliebe. Es muß auffallen in einem Buche, wie Poisson's Mechanik, in welchem die ganze Differential- und Integralrechnung als bekannt vorausgesetzt ist, den Sinn des Differentialquotienten solcher bestimmten Größen, der doch kein anderer ist als der eines jeden Differentialquotienten, erläutert zu finden, und daß zwar die ganze Rechnung, aber

nicht der einfachste Grundbegriff derselben als bekannt vorausgesetzt wird. Es scheint fast, daß Poisson den Rechnungsmechanismus der Differential- und Integralrechnung seinen Lesern zutraue, aber nicht die geringste Idee von dem Werthe und der Bedeutung eines Differentialquotienten, und daran mag er nun wol, nach dem zu schließen, was ich bei Gelegenheit einiger Recensionen erfahren habe, so Unrecht nicht haben. Bei so bewandten Umständen in Betreff der Einsicht in das Wesen und die Bedeutung des ersten Differentialquotienten kann man leicht denken, wie es hier und da mit der Einsicht in die Bedeutung der höheren Differentialquotienten beschaffen sein mag, und ich darf um so mehr glauben, mit meiner ausführlichen Darlegung dieser Lehre keine überflüssige Arbeit unternommen zu haben.

Das Ziel, welches ich mir bei Abfassung dieses Lehrbuches ursprünglich gesteckt hatte, ist zwar mit diesem zweiten Bande erreicht. Da indessen die Differentiation der Functionen mit mehreren Veränderlichen und die Lehre von den partiellen Differentialquotienten, sowie einige Punkte der Integralrechnung und die Lehre von den bestimmten Integralen noch als Gegenstände von allgemeinerer Bedeutung angesehen werden können, die wol eine ausführlichere Erläuterung bedürfen, als ihnen gewöhnlich zu Theil wird, und da ich mir vorgenommen habe, in dieser Einleitung alle allgemeineren Gegenstände so vollständig abzuhandeln, daß Jeder, der dieselben gefaßt hat, sich das einzelne Material der Wissenschaft aus jedem ausführlichen Lehrbuche mit Leichtigkeit aneignen kann, so gedenke ich noch einen dritten, die eben erwähnten Gegenstände umfassenden Band folgen zu lassen, jedoch freilich, da ich zunächst andere literarische Arbeiten in Angriff genommen habe, erst nach einigen Jahren.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Achtes Capitel.

Vom zweiten Differentialquotienten.

Seite

§. 101. Gegenstand der Lehre von den höheren Differentialquotienten 1
§. 102. Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten ... 4
§. 103. Hieraus fließende Bedeutung der höheren Differentialquotienten 13
§. 104. Constante Beschleunigung des Wachsens 21
§. 105. Allgemeines Maß der constanten Beschleunigung des Wachsens 30
§. 106. Allgemeine Function der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen 39
§. 107. Folgerungen aus dieser allgemeinen Function 44
§. 108. Construction der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen 47
§. 109. Ungleichförmige Beschleunigung des Wachsens 52
§. 110. Berechnung der momentanen Beschleunigung des Wachsens 54
§. 111. Bezeichnung des Grenzwerthes des zweiten Differenzquotienten 58
§. 112. Herleitung des zweiten Differentialquotienten einer Function 63

Dreizehntes Capitel.

Von der geradlinigten Bewegung in einem widerstehenden Medium.

Seite

§. 144. Allgemeine Gesetze der geradlinigten Bewegung 313
§. 145. Maß des Widerstandes in einem flüssigen Medium.. 323
§. 146. Abhängigkeit des Widerstandes von der Form des bewegten Körpers..... 327
§. 147. Bewegung in einem Medium bei bloßer Kraft des Widerstandes..... 334
§. 148. Die Widerstandskraft in Verbindung mit einer constanten Kraft..... 340

Vierzehntes Capitel.

Frühere Rechnungsmethoden, welche als Vorstufen der Differential- und Integralrechnung gelten können.

§. 149. Die Exhaustionsmethode der Alten..... 352
§. 150. Das Untheilbare des Cavaleri..... 357
§. 151. Die Theorie des Maximums und Minimums von Fermat 364
§. 152. Die Differentialrechnung und die Fluxionsrechnung... 369

Achtes Capitel.

Vom zweiten Differentialquotienten.

§. 101.

Gegenstand der Lehre von den höheren Differentialquotienten.

In der vorausgehenden Lehre vom ersten Differentialquotient, welchen wir bisher, weil eine Unterscheidung desselben von andern Differentialquotienten noch nicht nöthig war, gewöhnlich schlechtweg den Differentialquotient genannt haben, ist gezeigt worden, daß jede zwei von einander abhängige veränderliche Größen, deren Gesetz der Abhängigkeit durch irgend eine beliebige Function, welche nicht von der Form $ax+b$ ist, ausgedrückt erscheint, eine stetig veränderliche Stärke ihres Wachsens haben, und daß die jedesmalige Größe dieser momentanen Stärke ihres Wachsens allgemein für jeden beliebigen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x durch den ersten Differentialquotient dieser Function von x gegeben ist. In dieser Auseinandersetzung der Bildungsweise und Bedeutung des ersten Differentialquotienten haben wir uns darauf beschränkt nachzuweisen, wie der für einen beliebigen einzelnen Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen stattfindende Größenwerth der veränderlichen Stärke des Wachsens berechnet werden kann, aber die Veränderungen, welchen diese Stärke des Wachsens selbst im Fortschritt der wachsenden Größe unterworfen ist, haben wir außer Acht gelassen, wenigstens in sofern, als wir nicht unternommen haben, ein Gesetz dieser Verände-

rung aufzustellen, und sie ihrem Größenwerthe nach zu bestimmen. Da es aber bei der Bestimmung der Eigenthümlichkeiten und der Natur des Wachsens der von einander abhängigen veränderlichen Größen, in sofern sie eine erschöpfende soll genannt werden können, offenbar nicht allein darauf ankommt, wie groß in einem einzelnen Verflußpunkt die Stärke des Wachsens ist, sondern auch darauf, um wie viel die Stärke des Wachsens bei dem Uebergang von einem Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen zu einem andern sich verändert hat, oder wie überhaupt das Gesetz der Veränderung der Stärke des Wachsens verläuft, so schließt sich an die schon abgehandelte Frage, wie die Größe der momentanen Stärke des Wachsens gefunden wird, die andere, wie man sich von der Größe der Veränderung der Stärke des Wachsens eine bestimmte Vorstellung bilden und dieselbe ihrem Größenwerthe nach berechnen kann.

Hierbei kann als einfachster Fall der Veränderung der Stärke des Wachsens der eintreten, in welchem die Stärke des Wachsens immer um gleichviel zu- oder abnimmt bei gleichem Zunehmen der willkürlich Veränderlichen, oder in welchem die willkürlich Veränderliche und die Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen sich als gleichmäßig wachsende Größen darstellen. In diesem Falle einer gleichbleibenden Veränderung in der Stärke des Wachsens wird es sich nur darum handeln, das unveränderliche Maß dieser Veränderung in bestimmte Begriffe zu fassen, und dasselbe auf angemessene Weise in der analytischen Zeichensprache auszudrücken, in ähnlicher Weise, wie früher bei Betrachtung der Stärke des Wachsens die gleichmäßig wachsenden Größen und ihr constanter Differenzquotient als unveränderliches Maß der Stärke des Wachsens aufgestellt wurden. Tritt aber der zweite denkbare Fall ein, daß mit allen auch beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer ungleiche Zunahmen der Stärke des Wachsens der beiden veränderlichen Größen verbunden sind, so ist nicht blos die Stärke des Wachsens, sondern auch die Veränderung der

Stärke des Wachsens eine stetig veränderliche Größe, und ist in jeden zwei auch noch so nahe liegenden Punkten der willkürlich Veränderlichen eine verschiedene. Es wird alsdann die Frage entstehen, wie man diese momentane Veränderung der Stärke des Wachsens, die nicht zur Ausführung kommt, sondern nur als Bestreben, eine bestimmte Veränderung der Stärke des Wachsens hervorzubringen, vorhanden ist, ihrem Größenwerthe nach berechnen und auf ein gleichbleibendes Maß der Veränderung der Stärke des Wachsens zurückführen kann.

Da ferner in dem Falle, als die Veränderung der Stärke des Wachsens nicht constant, sondern stetig veränderlich ist, an die eben beregte Frage, wie groß in einem einzelnen Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen die Veränderung der Stärke des Wachsens ist, die andere sich anreihen läßt, nach welchem Gesetz diese Veränderung der Stärke des Wachsens sich selbst verändert, und auch hier wieder das allgemeine Maß und der jedesmalige Größenwerth dieser Veränderung zu bestimmen sein wird, und da endlich diese Frage immer wiederkehrt, sobald das Maß einer weiter hinausliegenden Veränderung sich nicht constant zeigt, so sieht man leicht, daß durch die vorausgehende Lehre vom ersten Differentialquotient die Analyse des Begriffs eines von einander abhängigen gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens der Größen noch lange nicht erschöpft ist, und daß wir, um die Natur des ungleichmäßigen Wachsens auf allen Stufen der in ihm stattfindenden Veränderungen zu verfolgen, und einen klaren Blick in die verborgene Werkstätte des Wachsens der Größen zu bekommen, noch ein ziemlich weitläufiges Begriffsgebiet zu durchmessen haben werden. Die Aufhellung dieses eben angedeuteten Begriffs der stufenweis übereinander liegenden Veränderungen der Stärke des Wachsens und die Nachweisung des Gebrauchs derselben zur Auffindung der Eigenschaften ungleichmäßig wachsender Größen bildet den wesentlichen Inhalt der Lehre von den höheren Differential-

quotienten. Ohne die Erläuterung und Feststellung dieser Begriffe ist es nicht möglich, den höheren Differentialquotienten einen bestimmten, in Worten völlig aussprechbaren Sinn, und in der Anwendung auf concrete continuirlich wachsende Größen, wie Raum, Zeit und Bewegung, eine anschauliche handgreifliche Bedeutung beizulegen, und läuft man Gefahr, sich in leere Formeln zu verlieren, deren operative Entstehung man zwar kennt, deren Sinn und Bedeutung aber für das Wachsen der ursprünglichen Function, deren successive Differentialquotienten man genommen hat, damit noch nicht gegeben ist.

§. 102.

Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten.

Ehe wir zur näheren Entwickelung der das Gebiet der höheren Differentialquotienten beherrschenden Begriffe schreiten, wird es zur Bildung einer bestimmteren Ansicht von der Natur des vorliegenden Problems nicht undienlich sein, die in den Lehrbüchern der Differentialrechnung gangbare ganz kurzgefaßte Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten hier vorläufig mitzutheilen, weil wir auf die Weise durch Darlegung dessen, was an der gangbaren Auffassung vermißt wird, am leichtesten das Bedürfniß einer ausführlicheren Grundlegung und das Interesse für dieselbe erwecken zu können glauben. Diese gangbare Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten läuft im Wesentlichen auf Folgendes hinaus. Ist der Differentialquotient einer Function einer Veränderlichen selbst wieder eine Function dieser Veränderlichen, was bei allen Functionen von x mit Ausnahme des einzigen $ax+b$ der Fall ist, so kann man natürlich diesen Differentialquotient wie jede Function von x von Neuem der Operation des Differentiirens unterwerfen, und erhält dadurch den Differentialquotient von dem Differentialquotient einer Function, welchen man den zweiten Differentialquotient dieser Function nennt. Ist auch dieser zweite Dif-

ferentialquotient nicht constant, sondern eine Function der Veränderlichen, so kann man ihn ebenfalls wieder differentiiren, und erhält so den Differentialquotient von dem zweiten Differentialquotient, welchen man den dritten Differentialquotient nennt u. s. w. Die Möglichkeit der Bildung dieser successiven Differentialquotienten versteht sich so sehr von selbst, daß wir uns im ersten Theile auch ohne Weiteres, wo es nöthig war, derselben bedient haben. In so fern man auch die Begriffsbestimmung der höheren Differentialquotienten nur aus dieser für sich ganz klaren operativen Entstehung derselben entnimmt, ist weiter nichts nöthig, als nur noch die Erklärung der üblichen analytischen Bezeichnungsweise derselben hinzuzufügen, um das Wesentliche der gangbaren Lehre von den höheren Differentialquotienten zu haben. Diese Beziehungsweise wird nun, da die Operation zur Erzeugung der höheren Differentialquotienten eine bloße Wiederholung des einfachen Differentiirens ist, zunächst am natürlichsten so gebildet werden, daß sie auch auf eine bloße Wiederholung der für den ersten Differentialquotient üblichen Bezeichnung hinausläuft. Nun bezeichnet man bekanntlich den Differentialquotient einer Function von x dadurch, daß man vor die Function den Buchstaben d setzt, und dx als Nenner darunterschreibt, wie man z. B. den Differentialquotient der Function $ax^3+x^{\frac{1}{2}}$ durch $\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}$ bezeichnet, oder, da $3ax^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ der Differentialquotient der Function $ax^3+x^{\frac{1}{2}}$ ist, diesen Zusammenhang der Operationen durch die analytische Differentialgleichung $\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}=3ax^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ausdrückt. Betrachtet man nun die linke Seite dieser Gleichung als Zeichen einer Function von x, so wird man den

Differentialquotient dieſer Function wie jeden andern dadurch andeuten können, daß man den Buchſtaben d vor dieſelbe ſetzt, und durch dx dividirt, alſo durch die Bezeichnung $\frac{d\left[\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}\right]}{dx}$. Und da der Differentialquotient der Function $\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}$, d. h. der Function $3ax^2+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ gleich iſt $6ax-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, ſo erhält man die analytiſche Differentialgleichung

$$\frac{d\left[\frac{d\left(ax^3+x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}\right]}{dx}=6ax-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

welche, weil ſie den Zuſammenhang einer urſprünglichen Function und ihres zweiten Differentialquotienten darſtellt, eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung heißt. Dieſe Bezeichnungsweiſe des zweiten Differentialquotienten, welche ſoeben bei gegebenen Functionen von x gebraucht worden iſt, in welchem Falle die entſtehende Differentialgleichung nur dazu dient, eine Regel des Differentiirens auszuſprechen, läßt ſich natürlich auch gebrauchen, um anzudeuten, daß der zweite Differentialquotient einer unbekannten oder auch einer unbeſtimmten durch y vorgeſtellten Function von x gedacht werden ſoll. Denn da in dieſem Fall der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ nur Zeichen einer Function von x iſt, und folglich der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ Zeichen des Differentialquotienten dieſer Function $\frac{dy}{dx}$, ſo wird der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$

den zweiten Differentialquotient der durch y vorgestellten Function bedeuten. Wäre z. B. der Differentialquotient einer unbekannten durch y vorgestellten Function von x direct gegeben, und gleich $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, was durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ auszudrücken wäre, so würde man, da der Differentialquotient der Function $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ gleich ist $\frac{2x-x^{-2}}{2\left(x^2+x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}$, die aus der vorhergehenden Gleichung zu bildende Differentialgleichung der zweiten Ordnung schreiben $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{2x-x^{-2}}{2\left(x^2+x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Man sieht leicht, daß diese Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten ihre Uebelstände und Mängel hat. Denn wollte man auf die Weise fortfahren, und den dritten Differentialquotient einer durch y vorgestellten Function von x durch den Ausdruck $\frac{d\left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}$ andeuten u. s. w., so würde man eine durch ihre gespreizte Form sehr schwerfällige und bei hohen Differentialquotienten fast unausführbare Bezeichnung erhalten, abgesehen von dem Mangel, daß durch dieselbe ein seiner Ordnungszahl nach unbestimmt gelassener Differentialquotient, wie etwa der nte Differentialquotient, direct gar nicht ausgedrückt werden könnte. Man hat daher für gewöhnlich eine andere Bezeichnungsweise der successiven Differentialquotienten in Gebrauch genommen, welche von den berügten Mängeln und Uebelständen frei ist. Obgleich dieselbe, wie wir

bald ſehen werden, noch einen tiefer liegenden Grund ihrer Entſtehung hat, als den einer Abkürzung oder größeren Bequemlichkeit der Schreibart, und auch mit einem ganz andern Sinn der höheren Differentialquotienten als demjenigen, auf welchen die bloße Wiederholung des Differentiirens unmittelbar führt, aufs genaueſte zuſammenhängt, ſo hat man ſich doch ſchon längſt gewöhnt, die Erklärung dieſer zweiten Bezeichnungsart ganz losgeriſſen von dem urſprünglichen Weg ihrer Entſtehung zu geben, und ſie nur als eine andere willkürliche Bezeichnungsart aufzuführen. Auf dieſe gangbare Erklärung kommt es uns aber hier zunächſt allein an. Dieſelbe wird abgeleitet aus der Art, wie man Differentialgleichungen mit iſolirten Differentialen ſchreibt (ſiehe §. 37). Dieſe Schreibart beſteht bekanntlich darin, daß man vor eine Function von x oder vor das Zeichen, welches eine ſolche Function vorſtellen ſoll, den Buchſtaben d ſetzt, und dieſen Ausdruck gleich ſetzt dem Differentialquotienten der Function von x multiplicirt mit dx, wie wenn man für die Function ax^3 die Differentialgleichung $dax^3 = 3ax^2dx$ bildet, oder aus der Gleichung $y = ax^3$ die Differentialgleichung $dy = 3ax^2dx$ herleitet. In einer ſolchen Gleichung mit iſolirten Differentialen hat man, um ihr einen ausſprechbaren beſtimmten Sinn unterzulegen, nach §. 37 ſich unter dx einen beliebigen endlichen Zahlenwerth, und unter dy oder, was daſſelbe iſt, unter $3ax^2dx$ diejenige Zunahme der Function ax^3 zu denken, welche mit der Zunahme dx verbunden ſein würde, wenn die beiden Veränderlichen x und ax^3 diejenige Stärke des Wachſens beibehielten, welche ſie bei dem Zahlenwerth von x haben, von welchem aus man ſich die Zunahme dx geſetzt denkt. So angeſehen hat das Differential dy oder $3ax^2dx$ mit dem Unendlichkleinen gar nichts zu ſchaffen, ſondern es iſt ein endlicher Zahlenwerth, welcher verglichen mit dem Zahlenwerth dx uns die Vorſtellung einer beſtimmten Stärke des Wachſens gibt. In ſofern man nun für alle veränderlichen Werthe des x dem

dx immer einen und denselben Zahlenwerth beilegt, was offenbar, weil der Zahlenwerth dx beliebig, gestattet ist, so kann man das Differential $3ax^2dx$ betrachten als eine endliche Function von x, welche mit einem constanten Factor dx multiplicirt ist, und ebenso wird dy nur Zeichen einer solchen Function sein. Unter diesen Umständen kann auf die Gleichung $dy = 3ax^2dx$ die oben angeführte Regel des Differentiirens mit isolirten Differentialen ohne Weiteres angewandt werden, und man erhält, da für ein als constante Zahl behandeltes dx der Differentialquotient der Function $3ax^2dx$ gleich $6axdx$ ist, die Differentialgleichung $ddy = 6axdx.dx$. Legt man auch bei dieser neuen Differentiation dem dx denselben Zahlenwerth bei, den es vorher in der Function $3ax^2dx$ für alle veränderlichen Werthe des x haben sollte, so kann man die letzte Differentialgleichung auch schreiben $ddy = 6a(dx)^2$. Man sieht leicht, daß, wenn man auf diese Weise bei constant gesetztem dx das Differential von dem Differential einer Function von x nimmt, dieses zweite Differential nichts Anderes sein wird, als der zweite Differentialquotient der Function multiplicirt mit $(dx)^2$, und daß also das Differential von dem Differential einer Function dividirt durch $(dx)^2$ den zweiten Differentialquotient dieser Function geben wird. Mithin wird, wenn wir unter y irgend eine Function von x vorstellen, der Ausdruck $\frac{ddy}{(dx)^2}$ so gut den zweiten Differentialquotient der Function y bedeuten als der Ausdruck $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$. Wendet man auf die Gleichung $ddy = 6ax.(dx)^2$, in welcher dx einen constanten endlichen Zahlenwerth haben möge, und folglich $(dx)^2$ als constanter Factor zu behandeln ist, von Neuem dieselbe Regel des Differentiirens an, so erhält man, da $6a(dx)^2$ der Differentialquotient von $6ax(dx)^2$ ist, die Gleichung $dddy = 6a(dx)^2.dx$, und in so fern auch bei dieser Dif-

ferentiation dx denſelben Zahlenwerth hat wie vorher, die Gleichung $ddd y = 6a.(dx)^3$, und bemerkt ſogleich, daß das dritte Differential einer Function von x dividirt durch $(dx)^3$ oder der Ausdruck $\frac{ddd y}{(dx)^3}$ den dritten Differentialquotient der Function y bedeuten wird. Daß dieſe Bezeichnungsweiſe ſich ebenſo auf die folgenden Differentialquotienten ausdehnen läßt, verſteht ſich von ſelbſt. Sowol um die häufige Wiederholung des Buchſtabens d zu vermeiden, als auch um einen der Ordnungszahl nach unbeſtimmten Differentialquotient ausdrücken zu können, ſchreibt man ſtatt $\frac{dd y}{(dx)^2}$, $\frac{ddd y}{(dx)^3}$ u. ſ. w. $\frac{d^2 y}{(dx)^2}$, $\frac{d^3 y}{(dx)^3}$ und drückt allgemein den nten Differentialquotient der Function y durch $\frac{d^n y}{(dx)^n}$ aus, wobei die in der Weiſe von Exponenten dem Buchſtaben d beigefügten Zahlen natürlich nicht das Mißverſtändniß von Potenzen veranlaſſen können, weil der Buchſtabe d hier kein Zahlzeichen, ſondern ein Operationszeichen iſt. Auch bei den im Nenner vorkommenden Potenzen von dx läßt man gewöhnlich die Klammern weg. Nun bedeuten freilich die Ausdrücke dx^2 und dx^3, wenn ſie ſonſt vorkommen, ſo viel als die Differentiale der Functionen x^2 und x^3, und keineswegs Potenzen von dx, aber man ſieht leicht, daß in dieſem Falle durch Weglaſſung der Klammern kein Mißverſtändniß zu beſorgen iſt, weil durch die Zuſammenſtellung ſelbſt, in welcher hier die Ausdrücke dx^2, dx^3 erſcheinen, einer Verwechſelung dieſer verſchiedenen Bedeutungen vorgebeugt iſt.

Es mag hier noch ausdrücklich darauf aufmerkſam gemacht werden, daß die eben gegebene Regel der Bildung der höheren Differentiale und die daraus fließende Beziehungsweiſe derſelben nur dann völlig gerechtfertigt erſcheint, wenn man in einer Differentialgleichung, wie z. B. $dy = 3ax^2 dx$, die Größen dy und $3ax^2 dx$ nicht als unendlich kleine Größen, ſondern in der oben angegebenen

Weise als Functionen mit endlichen Zahlenwerthen betrachtet. Denn nur unter dieser Voraussetzung ist es ohne Weiteres gestattet, dasselbe Verfahren der Differentiation, welches man bei der Gleichung $y = ax^3$ anwendet, auch auf die Gleichung $dy = 3ax^2dx$ auszudehnen, und dabei dx als constante Zahl zu behandeln. Denkt man aber unter dx und folglich auch unter dy eine unendlich kleine Größe, so ist dx jedenfalls nicht mehr ein beliebiger Zahlenwerth, und man sieht dann nicht recht ein, ob bei den folgenden Differentiationen dx immer als denselben Zahlenwerth behaltend angesehen werden darf, wie denn auch Manche diese Behauptung als eine unbewiesene oder unbeweisbare verworfen haben. Ebenso wenig leuchtet unmittelbar ein, wie man diejenige Operation, die man mit y, als einer Function von x mit endlichem Zahlenwerth vorgenommen denkt, indem man den Buchstaben d davorsetzt und dy schreibt, ohne Weiteres wieder auf eine unendlich kleine Größe dy anwenden und ddy schreiben dürfe. Bei der hier festgehaltenen Annahme endlicher Zahlenwerthe der isolirten Differentiale ist die Befugniß einer Wiederholung desselben Verfahrens des Differentiirens unzweifelhaft. Wenn übrigens aus der vorhergehenden Darstellung nicht recht ersichtlich ist, ob es sich dabei nur um eine mehr oder weniger willkürliche Bezeichnung handelt, oder ob eine solche Bezeichnung wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine gewisse nothwendige Beziehung auf die Eigenthümlichkeit des Wachsens der Größen x und y haben, und etwas Wesentliches damit gesagt sein soll, und wenn es daher, wie fast zu vermuthen, dem Leser bei dieser Darstellung etwas hohl und leer zu Muthe geworden ist, so ist das nicht des Verfassers Schuld; denn er hat schon gesagt, daß er zunächst nur die gangbare Erklärung der Bezeichnungsweise der höheren Differentialquotienten geben wolle. Das Bedeutungsvolle der Bezeichnungen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. und

ihre wesentliche Beziehung auf die durch sie ausgedrückte Veränderung der Stärke des Wachsens der Größen x und y wird uns später von selbst entgegentreten, wenn wir sie aus der Entwickelung des Begriffs einer Veränderung der Stärke des Wachsens als eine sich nothwendig darbietende und inhaltreiche hervorgehen sehen.

Es muß schließlich über die Bezeichnungsweisen der höheren Differentialquotienten noch bemerkt werden, daß man die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten einer durch $f(x)$ ausgedrückten unbestimmten Function von x auch durch Striche, welche dem Buchstaben f beigefügt werden, bezeichnet, sodaß man sich unter $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ u. s. w. der Reihe nach den ersten, zweiten und dritten Differentialquotient der Function $f(x)$ zu denken hat. In sofern man bei diesen Strichen nur ihre Anzahl als das Wesentliche ins Auge faßt, und sich statt ihrer die entsprechenden Zahlen denkt, kann man diese Bezeichnungsweise auch verallgemeinern, und einen seiner Ordnungszahl nach unbestimmten Differentialquotient, wie z. B. den nten, durch $f^{n}(x)$ ausdrücken. Der Vorzug dieser Bezeichnung, wenn man das einen Vorzug nennen will, ist der, daß sie gar keiner Erklärung bedarf. Aber diesen Vorzug verdankt sie nur dem Umstand, daß sie als eine rein willkürliche gar keine Beziehung hat auf die Begriffe, um deren Erörterung und Aufhellung es sich eben handelt, wenn man von den höheren Differentialquotienten eine Anwendung und einen Gebrauch machen will. Uebrigens ist der vermeintliche Vortheil, welcher zur Einführung dieser Bezeichnung Veranlassung gegeben hat, schon früher (§. 38) als trügerisch nachgewiesen worden. Diese Bezeichnung gewährt gar keinen Vortheil als den einer etwas größeren typographischen Bequemlichkeit. Sie hat aber gegen die frühere den wesentlichen Nachtheil, daß sie für sich allein nur den Differentialquotient einer unbestimmt ausgedrückten Function $f(x)$ darstellen kann, nicht aber einer bestimmten, und also zur Aufstellung analytischer Differen-

tialgleichungen, d. h. zur Darstellung von Differentiationsregeln in Einer Gleichung gar nicht gebraucht werden kann. Um z. B. auszudrücken, daß der dritte Differentialquotient der Function lx (natürlicher Logarithmus von x) gleich sei $\frac{2}{x^3}$, reicht in der früheren Bezeichnungsweise die einzige Gleichung $\frac{d^3 lx}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$ hin, während man bei der letzteren die Unbequemlichkeit hat, diese Differentiationsregel nur durch eine Zusammenstellung von zwei Gleichungen ausdrücken zu können, indem man erst $lx = fx$ und dann $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ setzen muß. Man sieht leicht, daß man, um überhaupt nur die Operation des Differentiirens anzudeuten, allemal genöthigt ist, die bestimmten Functionen, wenn man mit solchen zu thun hat, erst durch unbestimmte Functionsbezeichnungen auszudrücken, weil die Operationsbezeichnung höchst ungeschickter Weise an den Buchstaben, der gerade die Unbestimmtheit der Function fordert, angeklebt ist, und daß man die unter der unbestimmten Functionsbezeichnung vorgestellte bestimmte Function immer im Gedächtniß haben muß, während man sie doch bei der früheren Bezeichnungsweise gleich bequem vor Augen haben könnte. Diese letztere Bezeichnungsweise muß also, da sie weder die frühere in allen Beziehungen ersetzt, noch auch etwas Neues hinzufügt, als durchaus nutzlos und überflüssig angesehen werden, und wir wollen von derselben daher auch keinen Gebrauch machen.

§. 103.

Hieraus fließende Bedeutung der höheren Differentialquotienten.

Die Bedeutung, welche den höheren Differentialquotienten der im vorhergehenden Paragraph gegebenen Erklärung gemäß beizulegen sein wird, ist sehr einfach, und folgt ohne Weiteres aus der Entstehung derselben. Denn da hiernach die Bildung der höheren Differentialquotienten

auf einer bloßen Wiederholung der Bildung des ersten beruht, so wird natürlich auch die Bedeutung der höheren Differentialquotienten nur auf eine bloße Wiederholung der Bedeutung des ersten hinauslaufen können. Nun gibt, wenn man sich unter y irgend eine Function von x denkt, der erste Differentialquotient von y, oder der Werth der Function $\frac{dy}{dx}$ allgemein die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von y und x an; folglich wird die durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ vorgestellte Function, als der erste Differentialquotient der Function $\frac{dy}{dx}$, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden veränderlichen Größen $\frac{dy}{dx}$ und x ausdrücken. Ebenso wird der dritte Differentialquotient der Function y, oder die unter dem Ausdruck $\frac{d^3y}{dx^3}$ vorgestellte Function von x, da sie nur als der erste Differentialquotient der Function $\frac{d^2y}{dx^2}$ aufgefaßt wird, die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden veränderlichen Größen $\frac{d^2y}{dx^2}$ und x angeben, und in gleicher Weise wird die Bedeutung aller folgenden Differentialquotienten der Function y sich ergeben. Nimmt man zu dieser eben gegebenen kurzen Erklärung der Bedeutung der höheren Differentialquotienten dasjenige hinzu, was im vorhergehenden Paragraphen über ihre Bezeichnung gesagt worden ist, so hat man die ganze übliche Lehre von den höheren Differentialquotienten. Und wenn man weiter nichts von denselben wissen will als diese Bedeutung und den Rechnungsmechanismus ihrer Bildung und Bezeichnung, so bedarf es zur Darstellung dieser Lehre denn freilich keiner großen Umstände und keines weiteren Ausholens.

Hier ist nun der Ort, wo wir genauer und bestimmter angeben können, was wir von einer vollständigen Lehre von den höheren Differentialquotienten verlangen, und was wir an der gangbaren Lehre vermissen. Nach der vorher erklärten Bedeutung der höheren Differentialquotienten sagt uns z. B. der zweite Differentialquotient einer durch y vorgestellten Function von x nur etwas über die Eigenthümlichkeit des Wachsens der Größen $\frac{dy}{dx}$ und x, keineswegs aber über die der Größen y und x. Ebenso wird man durch den dritten Differentialquotient der Function y wieder auf andere Größen verwiesen, indem derselbe nur die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der beiden Größen $\frac{d^2y}{dx^2}$ und x angibt, direct aber über die Natur des Wachsens der beiden Größen y und x, deren dritten Differentialquotient man hat, und über deren Art des Wachsens man doch wol eigentlich einen Aufschluß erwarten sollte, uns gar nicht belehrt. Nun gibt es doch weitere über die momentane Stärke des Wachsens hinausliegende Eigenthümlichkeiten des Wachsens der Größen y und x. Denn die Stärke des Wachsens derselben ist stetig veränderlich, und es muß also in demselben Punkt, wo eine bestimmte Stärke des Wachsens eintritt, auch schon eine ihrer Größe und ihrem Maße nach zu bestimmende Veränderung der Stärke des Wachsens vorhanden sein, weil die Veränderung nicht wartet, bis die fließenden Größen um einen endlichen Größenwerth gewachsen sind. Dasselbe wird sich auf die Veränderung der Stärke des Wachsens anwenden lassen, wenn sie sich nicht als constant, sondern als stetig veränderlich erweist. Auch die alsdann blos momentane Veränderung der Stärke des Wachsens muß eine nach Größe und Maß zu bestimmende Veränderung zeigen. Alle diese Bestimmungen sind charakteristische Eigenthümlichkeiten des Wachsens der Größen y und x, und sollten uns nicht die höheren Differentialquotienten der

Function y einen Aufschluß über dieselben geben, und vielleicht auch die Regel der Berechnung ihres Größenwerthes enthalten?

Daß die aus der bloßen Wiederholung des Differentiirens abgeleitete Bedeutung der höheren Differentialquotienten, gemäß welcher jeder folgende Differentialquotient einer Function die Stärke des Wachsens des vorhergehenden Differentialquotienten und der willkürlich Veränderlichen dieser Function ausdrückt, nicht hinreicht, um eine deutliche Vorstellung von den erwähnten Eigenthümlichkeiten des Wachsens der ursprünglich Veränderlichen zu geben, ist leicht zu zeigen. Wir wollen dies an einigen geometrischen Beispielen erläutern, und zwar gerade an denjenigen, bei welchen allein man bisher einen Versuch der Nachweisung einer sogenannten geometrischen Bedeutung der höheren Differentialquotienten gemacht hat, worunter man versteht, daß die Werthe der höheren Differentialquotienten durch gewisse räumliche Gebilde repräsentirt erscheinen, und bei denen man also diese Nachweisung als verhältnißmäßig am leichtesten ausführbar angesehen hat. Wenn z. B. die senkrechte Ordinate einer Curve als Function der Abscisse gegeben ist, so drückt bekanntlich der für einen Curvenpunkt berechnete erste Differentialquotient dieser Function den Quotient zusammengehöriger Zunahmen der Coordinaten der diesen Curvenpunkt berührenden graden Linie aus, d. h. er drückt die trigonometrische Tangente des Winkels aus, welchen die berührende Grade mit der Abscisse bildet. Da dieser Winkel stetig veränderlich ist, so gibt es für jeden Verflußpunkt der Abscisse eine verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Tangente des genannten Winkels und der Abscisse. Diese Stärke des Wachsens ist es zunächst nur, welche man als durch den zweiten Differentialquotient der die Ordinate ausdrückenden Function dargestellt ansehen muß. Wenn ich nun z. B. fände, daß der zweite Differentialquotient dieser Function für einen bestimmten Zahlenwerth der Abscisse den Zahlen-

werth 2 hätte, so würde damit gesagt sein, daß die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Tangente jenes Winkels und der Abscisse so groß sei, daß vermöge derselben, wenn sie zur Ausführung käme, mit einer Zunahme der Abscisse $=1$ eine Zunahme der Tangente jenes Winkels $=2$ verbunden sein würde. Diese Behauptung ist nun zwar ohne Zweifel ganz richtig, aber es läßt sich doch unmittelbar aus derselben nicht ersehen, welche Eigenthümlichkeit des Wachsens der Coordinaten der Curve durch ihren zweiten Differentialquotient ausgesprochen ist. Und obgleich es in diesem Falle noch nicht allzuschwierig sein würde, aus der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens der trigonometrischen Tangente jenes Winkels und der Abscisse auf die Natur des Wachsens der Coordinaten der Curve und auf die Größe der Veränderung ihrer Stärke des Wachsens einen Schluß zu machen, so würde man sich doch schon bei dem dritten Differentialquotient in große Schwierigkeiten und Dunkelheiten verwickelt sehen, wenn man seinen Werth auf die Eigenthümlichkeiten des Wachsens der Coordinaten der Curve zurückbeziehen wollte. Nehmen wir ferner an, daß eine Curvenfläche als Function der Abscisse gegeben sei. Da der erste Differentialquotient dieser Function diejenige Function der Abscisse liefert, welche die Ordinate der Curve ausdrückt, so sagt man, der räumliche Repräsentant des ersten Differentialquotienten der Curvenfläche ist die Ordinate der Curve; und da der Differentialquotient der Ordinate die Tangente des Winkels ausdrückt, den die Berührende mit der Abscisse bildet, so sagt man, die Tangente dieses Winkels ist der räumliche Repräsentant des zweiten Differentialquotienten der Curvenfläche. So angesehen haben die höheren Differentialquotienten einer Function, welche eine Fläche ausdrückt, gar nichts mit der Fläche zu schaffen, indem man auf ganz andere räumliche Elemente, erst auf eine Linie und dann auf eine Winkelfunction geräth. Daß es dabei unmöglich wird zu sagen, welche Bestimmungen des Wachsens der Fläche durch die

höheren Differentialquotienten derſelben ausgedrückt werden, verſteht ſich von ſelbſt. Es muß auch auffallen, daß man nur für den erſten und zweiten Differentialquotient der Fläche einen räumlichen Repräſentanten nachweiſt, der dritte und die folgenden aber keine geometriſche Bedeutung haben ſollen. Indeſſen hat man nicht blos in früheren Zeiten, ſondern auch in unſern Tagen dieſe und ähnliche Dinge alles Ernſtes für die geometriſche Bedeutung der höheren Differentialquotienten ausgegeben. Wir werden bald ſehen, daß es, ſobald man nur vorher die allgemeine Bedeutung, welche die höheren Differentialquotienten einer Function für das Wachſen dieſer Function ſelbſt haben, feſtgeſtellt hat, gar nicht ſchwer iſt, für jeden beliebigen höheren Differentialquotienten einen räumlichen Repräſentanten ſeines Werthes nachzuweiſen, und zwar nicht blos für den Fall, daß die räumlichen Elemente Parallelcoordinaten ſind, woran man gewöhnlich nur denkt, wenn von der geometriſchen Bedeutung der höheren Differentialquotienten die Rede iſt, ſondern in allen Fällen, in welchen irgend welche ganz beliebige räumliche Elemente als die von einander abhängigen veränderlichen Größen erſcheinen.

Wenn nun vielleicht noch Jemand einwendete, die ſucceſſiven Differentialquotienten einer durch y vorgeſtellten Function von x ſollen eben weiter nichts bedeuten, als daß jeder folgende Differentialquotient die verhältnißmäßige Stärke des Wachſens des vorhergehenden und der willkürlich Veränderlichen x ausdrückt, keineswegs aber ſollen ſie uns über die Natur des Wachſens der Größen y und x belehren, welches nur der erſte Differentialquotient der Function y zu leiſten hat, indem er die momentane Stärke des Wachſens der Größen y und x angibt, ſo erwidere ich: Nun gut, wenn das iſt, ſo muß denn diejenige Lehre, welche zum Zwecke hat, die früher erwähnten über die bloße momentane Stärke des Wachſens der Veränderlichen hinausreichenden weiteren Eigenthümlichkeiten des Wachſens, die doch offenbar vorhanden ſind, zu entwickeln und

in Gesetze zu fassen, noch neu erfunden werden. Denn jede genügende Theorie der Gesetze des gemeinschaftlich fortschreitenden Wachsens der Größen wird diese Untersuchungen nicht abweisen können, und um einen vollständigen Begriff zu haben von der in jedem Verflußpunkt vorhandenen wahren Beschaffenheit des Wachsens, muß man die Functionen auffinden, welche diese inneren Modificationen des Wachsens anzugeben im Stande sind. Aber diese Functionen brauchen wir zum Glück nicht weit zu suchen, denn die höheren Differentialquotienten leisten, wie wir in dem Folgenden sehen werden, dies Alles aufs Beste.

Es braucht schließlich wol kaum noch bemerkt zu werden, daß dem eben Gesagten nicht die Absicht zu Grunde liegt, die im Eingang dieses Paragraphen erwähnte Bedeutung eines höheren Differentialquotienten, welche er dadurch erhält, daß er als der erste Differentialquotient des vorhergehenden angesehen wird, für eine überflüssige und nutzlose zu erklären. Vielmehr ist dieselbe bei unzähligen Untersuchungen eine wesentliche und unerläßliche, und bei vielen andern eine zureichende, indem sehr häufig ein höherer Differentialquotient grade nur in diesem Sinne in die Rechnung eingeführt wird, daß er der erste Differentialquotient des vorhergehenden ist. Dies läßt sich an ganz einfachen Aufgaben zeigen. Bei der gradlinigten Bewegung z. B. beruht, wie früher (§. 41) schon nachgewiesen worden, die Bestimmung der Größe der Kraft auf der Angabe, um wie viel die Geschwindigkeit zu- oder abnimmt in einer gewissen Zeit vermöge der Kraft, d. h. sie beruht auf der verhältnißmäßigen Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit. Ist also die Geschwindigkeit als Function der Zeit gegeben, so ist sicherlich der Differentialquotient dieser Function ein Ausdruck für die Größe der Kraft. Nun ist aber diejenige Function der Zeit, welche die Geschwindigkeit ausdrückt, der Differentialquotient einer andern Function der Zeit, welche den Raum ausdrückt, wie ebenfalls schon §. 41 gezeigt worden. Mithin

ist der zweite Differentialquotient der den Raum ausdrückenden Function der Zeit der Ausdruck für die Kraft. In sofern ich nun grade diese Beistimmung des Begriffs der Kraft im Sinne habe, daß sie die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit angibt; so ist diejenige Bedeutung des zweiten Differentialquotienten von Raum und Zeit, vermöge welcher er die Stärke des Wachsens des ersten Differentialquotienten und der willkürlich Veränderlichen ausdrückt, vollkommen an ihrer Stelle und führt allein zum Zweck. Freilich kann der Begriff der Kraft auch durch die Art des Wachsens von Raum und Zeit selbst bestimmt werden, indem man angibt, um wie viel der in jeder folgenden Zeiteinheit durchlaufene Raum größer ist als der in der vorhergehenden Zeiteinheit durchlaufene, wenn die Kraft constant ist, oder um wie viel er größer sein würde, wenn die momentan vorhandene Größe der Kraft constant bliebe und zur Ausführung käme. Diese auf die Art des Wachsens von Raum und Zeit bezogene Definition des Begriffs der Kraft ist ebenso wichtig und unerläßlich als die auf das Wachsen von Geschwindigkeit und Zeit bezogene. Daß nun, sowie in dieser zweiten Definition des Begriffs der Kraft der zweite Differentialquotient von Raum und Zeit auf die Natur des Wachsens von Raum und Zeit selbst bezogen wird, überhaupt aus jedem höheren Differentialquotient beliebiger Größen seine Bedeutung für die Art des Wachsens dieser Größen selbst mit Leichtigkeit, Sicherheit, und nach allgemeinen festen Regeln herausgelesen werden könne, ist der Hauptzweck der nun folgenden von der bisherigen abweichenden Darstellung der Lehre von den höheren Differentialquotienten; und durch diesen Zweck wird es gerechtfertigt erscheinen, daß wir zur Begründung dieser Lehre einen andern Weg einschlagen und einen viel weiteren Anlauf nehmen.

§. 104.

In dem ersten Haupttheil unserer Wissenschaft sind wir, nach Vorausschickung des Begriffs der gleichmäßig wachsenden Größen, und der durch dieselben gegebenen Vorstellung einer bestimmten Stärke des Wachsens, zu den ungleichmäßig wachsenden übergegangen, und haben gezeigt, daß bei denselben mit gleichen Zunahmen der Einen immer ungleiche und zwar entweder immer größer oder immer kleiner werdende Zunahmen der Andern verbunden sind, oder daß, bezogen auf ein durch lauter gleiche Zunahmen fortschreitendes Wachsen der willkürlich Veränderlichen die abhängig Veränderliche entweder ein beschleunigtes oder retardirtes Wachsen zeigt. Dieser Begriff eines beschleunigten oder retardirten Wachsens wurde aber dort (§. 24) nur benutzt, um zu zeigen, daß die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens stetig veränderlich und in jedem Verflußpunkt eine bestimmte sei, nicht aber, um die Art oder die Größe dieser Beschleunigung oder Retardation des Wachsens ins Auge zu fassen. Vielmehr bezog sich alles bei der Lehre vom ersten Differentialquotient über die ungleichmäßig Wachsenden weiter Vorgebrachte nur auf die Angabe des Verfahrens, durch welches der einzelne vorübersliegende Moment der veränderlichen Stärke des Wachsens ergriffen und seinem Werthe nach berechnet werden kann, keineswegs aber auf eine Vergleichung dieser momentanen Werthe, und auf ein daraus abzuleitendes Gesetz der Veränderung derselben. Hier nun machen wir die bei allen ungleichmäßig Wachsenden nothwendig vorhandene Beschleunigung oder Retardation des Wachsens, welche so gut als die Stärke des Wachsens zu den Eigenthümlichkeiten des Wachsens gehört, zum Gegenstand der Untersuchung, und reihen an die schon abgehandelte Frage, wie die momentane Stärke des Wachsens gefunden wird, die zweite, wie die mit derselben nothwendig verbundene Beschleunigung der Retardation des Wachsens ihrem Größenwerthe nach bestimmt und berechnet wird.

Constante Beschleunigung des Wachsens.

Es sei hier gleich bemerkt, daß wir in dem Folgenden der Kürze wegen schlechtweg von einem beschleunigten oder retardirten Wachsen der abhängig Veränderlichen sprechen werden, obgleich natürlich eine Größe für sich betrachtet kein beschleunigtes oder retardirtes Wachsen haben kann, sondern nur relativ zu einer andern mit ihr zugleich veränderlichen Größe, die als gleichförmig, d. h. durch lauter gleiche Zunahmen wachsend vorausgesetzt wird. Wenn also hinfort von einer abhängig Veränderlichen gesagt wird, daß sie beschleunigt wächst, oder daß ihre Zunahmen immer größer werden, so soll das heißen, daß die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer größer werden. Aehnlicherweise, wenn einer abhängig Veränderlichen ein retardirtes Wachsen beigelegt wird.

So wie die Vorstellung einer bestimmten Stärke des Wachsens veränderlicher Größen darauf beruht, daß mit gleichen Zunahmen der Einen gleiche Zunahmen der Andern verbunden gedacht werden, so kann man auch von einer bestimmten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens der Größen nur in sofern eine Vorstellung erhalten, als vorausgesetzt wird, daß mit gleichen Zunahmen der Einen immer gleiche Vergrößerungen oder gleiche Verkleinerungen der successiven Zunahmen der Andern verbunden sind, oder daß die mit den gleichen Zunahmen der Einen verbundenen successiven Zunahmen der Andern lauter gleiche Unterschiede haben. Wenn z. B. in einer ungleichförmigen Bewegung mit gleichen Zunahmen der Zeit immer größere Zunahmen des Raumes verbunden sind, und also der Raum beschleunigt wächst, so habe ich von dieser Beschleunigung des Wachsens offenbar eine ganz bestimmte Vorstellung, wenn ich etwa sage, sie ist von der Art, daß der in jeder folgenden Secunde durchlaufene Raum um 20 Fuß größer ist, als der in der vorhergehenden Secunde durchlaufene, oder daß die mit gleichen Zunahmen der Zeit, im Werth von 1 Secunde, verbundenen successiven Zu-

nahmen des Raumes, in Fußen ausgedrückt, den constanten Unterschied 20 zeigen. Man nennt das Wachsen der Größen ein gleichförmig beschleunigtes, und die Beschleunigung selbst eine constante, wenn die mit gleichen, selbst beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um gleichviel größer werden; werden dieselben immer um gleichviel kleiner, so heißt das Wachsen ein gleichförmig retardirtes, und die Retardation des Wachsens eine constante. Nur in sofern eine Beschleunigung oder Retardation des Wachsens constant gedacht wird, kann sie uns die Vorstellung einer bestimmten Größe der Beschleunigung liefern. Denn sind die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen von der Art, daß ihre Unterschiede überall ungleich sind, so wird, wie leicht zu sehen, die Größe der Beschleunigung für einen und denselben Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen verschieden gefunden, je nachdem man größere oder kleinere Zunahmen der willkürlich Veränderlichen setzen, und den Unterschied der zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen als das Maß der Beschleunigung annehmen wollte. Wir haben also aus demselben Grunde, warum wir früher den Untersuchungen über die veränderliche Stärke des Wachsens eine genauere Betrachtung der gleichmäßig wachsenden Größen mit constanter Stärke des Wachsens vorausschickten, jetzt der Lehre von der veränderlichen Beschleunigung des Wachsens eine Erörterung der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen voranzustellen.

Zunächst wollen wir den aufgestellten Begriff der constanten Beschleunigung des Wachsens noch in einigen Beispielen näher betrachten; und da uns in der Regel Begriffsbestimmungen erst dann recht sicher und geläufig werden, wenn wir sie uns durch räumliche Gebilde veranschaulicht, wenn wir sie mit Augen gesehen haben, so wollen wir geometrische Beispiele wählen. Es

sei $y = \frac{1}{3}x^2$ die Gleichung zwischen den senkrechten Parallelcoordinaten einer Curve. Bekanntlich ist dies die Gleichung der gemeinen Parabel für eine gewisse Lage ihrer Coordinatenaxen. In dieser Lage der Coordinatenaxen haben die Ordinaten der Parabel ein gleichförmig beschleunigtes Wachsen, weil, wie leicht zu sehen, in der Function $\frac{1}{3}x^2$ mit gleichen Zunahmen des x solche Zunahmen der Function verbunden sind, die immer um gleich viel größer werden. Sei der Punkt a (Fig. 50) der Nullpunkt der Abscisse, und lassen wir von diesem Punkt aus die Abscisse um gleiche Stücke im Werthe von 1 wachsen, so daß die Abscissen ab, ac, ad, ae der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4 haben, so sind die Zahlenwerthe der Ordinaten bf, cg, dh, ei vermöge der gegebenen Gleichung der Reihe nach gleich $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{16}{3}$. Zieht man jede Ordinate von der darauf folgenden ab, so erhält man in den Zahlen $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, welchen die Linien kg, lh, mi der Figur entsprechen, die Zunahmen der Ordinaten, welche mit den gleichen Zunahmen der Abscisse verbunden sind. Von diesen Zunahmen der Ordinaten ist jede folgende um $\frac{2}{3}$ größer als die vorhergehende, und diese Ordinaten haben also eine durch die Zahl $\frac{2}{3}$ ihrer Größe nach bestimmte Beschleunigung des Wachsens.

Betrachten wir, um ein ebenso anschauliches Beispiel von gleichförmiger Retardation des Wachsens zu haben, die Ordinaten der Curve Fig. 51, deren Gleichung $y = 2x - \frac{1}{4}x^2$ ist. Diese Gleichung liefert ebenfalls die gemeine Parabel nur für eine andere Lage der Coordinatenaxen. Im Punkt a ist der Nullpunkt der Abscisse an-

genommen. Seien die Theile ab, bc, cd, de der Abſciſſe ſämmtlich gleich 1, ſo haben gemäß der gegebenen Gleichung die Ordinaten bf, eg, dh, ei der Reihe nach die Zahlenwerthe $\frac{7}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{16}{4}$. Ziehen wir jede Ordinate von der darauffolgenden ab, ſo geben die Reſte $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, welche den Linien kg, lh, mi entſprechen, die Zunahmen der Ordinaten an, welche mit den gleichen Zunahmen der Abſciſſe im Werthe von 1 verbunden ſind. Von dieſen Zunahmen der Ordinaten iſt jede folgende um $\frac{2}{4}$ kleiner als die vorhergehende, und die Ordinaten der Parabel haben alſo für dieſe Lage ihrer Coordinatenaxen ein gleichförmig retardirtes Wachſen.

Ein anderes ſehr anſchauliches Beiſpiel der conſtanten Beſchleunigung und Retardation des Wachſens bieten die Flächenräume dar, welche durch das Fortrücken der Parallelordinaten einer gegen ihre Abſciſſe geneigten graden Linie gebildet werden. Läßt man in Fig. 52, in welcher ae, bf u. ſ. w. die ſenkrechten Ordinaten der graden Linie eh ſind, die Abſciſſe um gleiche Stücke ab, bc, cd, wachſen, ſo ſind die damit verbundenen Zunahmen der Fläche der Figur von der Art, daß ſie ſich immer um gleich viel vergrößern, nämlich, wie leicht zu ſehen, immer um das Parallelogramm bcki, welches eine von den gleichen Zunahmen der Abſciſſe bc zur Grundlinie und die zugehörige Zunahme gm der Ordinate zur Höhe hat. Die Fläche dieſer Figur iſt alſo bezogen auf die Abſciſſe als willkürlich Veränderliche eine gleichförmig beſchleunigt wachſende Größe. Wenn, wie in Fig. 53, die ſenkrechten Ordinaten der graden Linie eh im Abnehmen begriffen ſind, und die Abſciſſe um gleiche Stücke ab, bc, cd wächſt, ſo werden die damit verbundenen Zunahmen der Fläche der Figur immer um gleich viel kleiner werden, nämlich immer um das Parallelogramm abki, welches eine von den gleichen Zunahmen der Abſciſſe

zur Grundlinie, und die zugehörige Abnahme em der Ordinate zur Höhe hat, und dieſe Fläche zeigt alſo eine conſtante Retardation des Wachſens.

Bisher iſt in den angeführten Beiſpielen ſowol als auch in den vorausgegangenen Begriffsbeſtimmungen immer nur von einer Beſchleunigung und Retardation des Wachſens die Rede geweſen. Es verſteht ſich aber von ſelbſt, daß wenn mit dem Wachſen der willkürlich Veränderlichen ein Abnehmen der abhängig Veränderlichen verbunden iſt, die Abnahmen der abhängig Veränderlichen, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbunden ſind, entweder immer größer oder immer kleiner werden können, und alſo auch eine Beſchleunigung oder Retardation des Abnehmens ſtattfinden kann. Unſere beiden Parabeln Fig. 50 und 51 können, wenn wir ſie in ihren beiden andern auf der entgegengeſetzten Seite der Hauptaxe liegenden Hälften betrachten, gleich dienen, um durch die Abnahme ihrer Ordinaten die Begriffe einer gleichförmigen Beſchleunigung und Retardation des Abnehmens zu veranſchaulichen. Nehmen wir zuerſt die Parabel Fig. 50, und laſſen ihre Abſciſſe vom Punkt q, wo ſie den Werth -4 haben ſoll, durch gleiche poſitive Incremente im Werth von 1 wachſen, ſo daß die Abſciſſe in den Punkten q, p, o, n, a der Reihe nach die Zahlenwerthe $-4, -3, -2, -1, 0$, hat, ſo haben, gemäß der gegebenen Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2$ in den Punkten q, p, o, n, a die Ordinaten der Reihe nach die Zahlenwerthe $\frac{16}{3}, \frac{9}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0$. Zieht man jede Ordinate von der darauffolgenden ab, ſo ſtellen die als negative Zunahmen erhaltenen Zahlen $-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{1}{3}$, welche ihrer Größe nach den Linien uv, tw, sz, rn entſprechen, die Abnahmen der Ordinaten vor, welche mit den gleichen Zunahmen der Abſciſſe im Werthe von 1 verbunden ſind. Da nun von dieſen Abnahmen, als Abnah-

men, d. h. nach ihren absoluten Zahlenwerthen betrachtet, jede folgende um $\frac{2}{3}$ kleiner ist als die vorhergehende, so stellen die Ordinaten dieser Parabel in den Grenzen vom Punkt q bis zum Punkt a eine gleichförmige Retardation des Abnehmens dar, wie sie in den Grenzen von a bis e eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens darstellten.

Betrachten wir ebenso in der Parabel Fig. 51 die andere Hälfte, und nehmen an, daß die Abscisse in den Punkten e, n, o, p, q der Reihe nach die Zahlenwerthe 4, 5, 6, 7, 8 hat, so haben, gemäß der gegebenen Gleichung $y = 2x - \frac{1}{4}x^2$, die den Punkten e, n, o, p, q zugehörigen Ordinaten die Werthe $\frac{16}{4}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{7}{4}$, 0. Zieht man jede Ordinate von der darauffolgenden ab, so stellen die als negative Zunahmen erhaltenen Zahlenwerthe $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} - \frac{7}{4}$, welche den Linien im, rn, sv, tp entsprechen, die Abnahmen dar, welche mit den gleichen Zunahmen der Abscisse im Werthe von 1 verbunden sind. Da nun von diesen Abnahmen, in sofern sie nach ihren absoluten Zahlenwerthen betrachtet werden, jede folgende um $\frac{2}{4}$ größer ist als die vorhergehende, so hat man in den Ordinaten dieser zweiten Hälfte der Parabel eine gleichförmige Beschleunigung des Abnehmens, wie man in denen der ersten Hälfte eine gleichförmige Retardation des Wachsens hatte.

Obgleich man hiernach bei der Veränderung der Stärke des Wachsens eigentlich vier Fälle zu unterscheiden hat, indem dieselbe sich als eine Beschleunigung und Retardation des Wachsens und als eine Beschleunigung und Retardation des Abnehmens darstellen kann, so ist es doch gestattet und der Allgemeingültigkeit des Ausdrucks wegen in vielen Fällen wünschenswerth, in der Art, wie früher

die Abnahmen als negative Zunahmen unter den Begriff der Zunahmen subsumirt, und Wachsen und Abnehmen zusammen in dem Begriff des Wachsens befaßt wurden, auch hier die in der Parabel Fig. 50 vereinigt vorkommenden Fälle der Retardation des Abnehmens und der Beschleunigung des Wachsens unter Einen Begriff zu fassen, und ebenso die in der Parabel Fig. 51 vereinigt vorkommenden Fälle der Retardation des Wachsens und der Beschleunigung des Abnehmens. Wir setzen dabei voraus, daß man den Unterschied zweier Werthe der abhängig Veränderlichen immer so bilde, daß man einen vorhergehenden Werth von einem nachfolgenden abziehe, und daß man den dadurch erhaltenen positiven oder negativen Rest allgemein eine Zunahme nenne. Ebenso daß man unter dem Unterschied der Zunahmen immer versteht den positiven oder negativen Rest, den man durch Abziehung einer vorhergehenden Zunahme von der nachfolgenden erhält. Diesen letzteren Rest kann man allgemein die Zunahme der Zunahme nennen, obgleich er eigentlich in den einzelnen Fällen bald eine Zunahme oder Abnahme der Zunahme, bald eine Zunahme oder Abnahme der Abnahme ist. Betrachten wir nun eine Retardation des Abnehmens, so werden bei derselben die Abnahmen, d. h. die negativen Zunahmen immer kleiner. Die vorhergehende negative Zunahme von der folgenden abgezogen, läßt also einen positiven Rest. Bei der Retardation des Abnehmens entsteht demnach die folgende Zunahme aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer positiven Zahl. Will man das Zusetzen von positiven Zahlen allgemein eine Vergrößerung nennen, so kann man sagen, daß bei der Retardation des Abnehmens ebenso gut als bei der Beschleunigung des Wachsens die Zunahmen immer größer werden. Die in den beiden Hälften der Parabel Fig. 50 enthaltenen Fälle kommen also in sofern auf Einen zurück, als in beiden dasjenige, worauf es bei Bestimmung der Veränderung der Stärke des Wachsens allein ankommt, nämlich der Unterschied der Zunahmen, durch dieselbe positive

Zahl $\frac{2}{3}$ ausgedrückt wird, und demnach die Veränderung der Stärke des Wachsens sich in dem ganzen Verlauf der Parabel als dieselbe erweist. Wenn beide Fälle, in welchen der Unterschied der Zunahmen positiv ist, und im angegebenen Sinne die Zunahmen immer größer werden, mit Einem Wort bezeichnet werden sollen, so wollen wir sie Beschleunigung des Wachsens nennen. Betrachten wir ferner die Beschleunigung des Abnehmens, so werden bei derselben die Abnahmen, d. h. die negativen Zunahmen, immer größer. Die vorhergehende Zunahme von der folgenden abgezogen läßt also einen negativen Rest. Bei der Beschleunigung des Abnehmens entsteht demnach die folgende Zunahme aus der vorhergehenden durch Zufügen einer negativen Zahl. Will man das Zusetzen von negativen Zahlen allgemein eine Verkleinerung nennen, so ist es erlaubt zu sagen, daß bei der Beschleunigung des Abnehmens nicht minder als bei der Retardation des Wachsens die Zunahmen immer kleiner werden. Die in den beiden Hälften der Parabel Fig. 51 enthaltenen Fälle der Veränderung der Stärke des Wachsens fallen also in sofern in Einen zusammen, als in beiden der Unterschied der Zunahmen durch dieselbe negative Zahl $\frac{1}{2}$ gegeben ist, und demnach diese Veränderung sich in dem ganzen Verlauf der Curve als dieselbe darstellt. Wenn beide Fälle, in welchen der Unterschied der Zunahmen negativ ist, oder die Zunahmen in dem obigen Sinne immer kleiner werden, durch einen gemeinschaftlichen Namen bezeichnet werden sollen, so mögen sie eine Retardation des Wachsens heißen.

Indessen wird, wie leicht zu sehen, durch solche Verallgemeinerungen der Ausdrücke, indem man unter Zunahme auch eine Abnahme versteht, und die Verkleinerung einer negativen Zahl eine Vergrößerung derselben nennt, und entsprechend unter einer Beschleunigung des Wachsens auch eine Retardation des Abnehmens versteht u. s. w.,

der Anschaulichkeit der Vorstellungen ebenso viel Abbruch gethan, als der Kürze des Ausdrucks durch die Zusammenfassung verschiedener Fälle Vorschub geleistet wird. Nimmt man das Wort Zunahme allgemein, so kann man sagen, daß in allen vier Fällen einer gleichförmigen Beschleunigung oder Retardation des Wachsens und des Abnehmens die Zunahmen der Zunahmen constant sind. Wenn die Veränderung der Stärke des Wachsens überhaupt mit Einschluß aller vier Fälle und ohne Unterscheidung derselben durch Ein Wort bezeichnet werden soll, so sagen wir schlechtweg Beschleunigung des Wachsens, wie wir auch in der Ueberschrift dieses Paragraphen schon gethan haben. Es braucht wol kaum bemerkt zu werden, daß durch diese Verallgemeinerungen des Ausdrucks die Unterschiede der einzelnen vier Fälle nicht als unwesentliche bezeichnet werden sollen. Vielmehr kommt es häufig, wie wir später sehen werden, auf ihre genaue Unterscheidung an, besonders in der Lehre von den Uebergangspunkten des einen Falles in den andern, deren charakteristische Eigenschaften eben auf der Unterscheidung der einzelnen Fälle beruhen.

§. 105.

Allg. Maß der constanten Beschleunigung des Wachsens.

Bei den in dem Vorhergehenden betrachteten Beispielen der constanten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens haben wir den Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer den Zahlenwerth 1 beigelegt, und uns durch den constanten Unterschied der zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine Vorstellung von der Größe der Beschleunigung des Wachsens gebildet, oder wir haben diesen Unterschied kurzweg als Maß der Beschleunigung des Wachsens angesehen. Aber es ist, um den gehörigen Gebrauch von dem Begriff der constanten Beschleunigung des Wachsens zu machen, nöthig, das constante Maß derselben auf eine Art auszudrücken, welche von der zufälligen Größe der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen unabhängig ist,

und für jede beliebig große Zunahme der willkürlich Veränderlichen immer einen und denselben Zahlenwerth liefert. Bei gleichmäßig wachsenden Größen hatte es gar keine Schwierigkeit, für die constante Stärke des Wachsens einen von der zufälligen Größe der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen unabhängigen constanten Ausdruck zu finden, weil die Zunahmen derselben in gleichem Verhältniß wachsen und abnehmen, und also der Quotient der Zunahmen constant ist. Man würde nun vielleicht erwarten, daß bei gleichförmiger Beschleunigung des Wachsens die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen und die Unterschiede der Zunahmen der abhängig ebenfalls ein constantes Verhältniß hätten, und man also durch den Quotienten beider die constante Beschleunigung des Wachsens ausdrücken könnte. Allein darin irrt man sehr, und die gleichmäßig wachsenden Größen und die gleichförmig beschleunigt wachsenden sind in dieser Hinsicht wesentlich verschieden. Läßt man z. B., um zuerst einen speciellen Fall zu betrachten, in der Function $\frac{1}{3}x^3$ die willkürlich Veränderliche nicht wie früher um den Zahlenwerth 1, sondern um den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ wachsen, und gibt ihr die Werthe $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$ u. s. w., so sind die zugehörigen Werthe der Function $0, \frac{1}{12}, \frac{4}{12}, \frac{9}{12}, \frac{16}{12}$. Zieht man jeden dieser Werthe der Function von dem folgenden ab, so erhält man in den Zahlen $\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ die Zunahmen der Function, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\frac{1}{2}$ verbunden sind. Die Unterschiede dieser Zunahmen der Function sind constant und gleich $\frac{2}{12}$. Nun sahen wir

früher, daß in der Function $\frac{1}{3}x^3$ für Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleich 1, die Unterschiede der Zunahmen der Function gleich $\frac{2}{3}$ waren, und für halb so große Zunahmen der willkürlich Veränderlichen finden wir jetzt diese Unterschiede nicht halb so groß, sondern viermal kleiner. Um zunächst bei der vorliegenden Function zu erfahren, nach welcher Regel mit der Veränderung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen der Unterschied der Zunahmen der Function sich ändert, brauchen wir nur den Unterschied der Zunahmen der Function allgemein für eine unbestimmte Zunahme Δx der willkürlich Veränderlichen auszudrücken. Dies erreicht man, indem man die willkürlich Veränderliche x zweimal um die Größe Δx wachsen läßt, d. h. der willkürlich Veränderlichen die drei Werthe x, $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$ beilegt, die zugehörigen Werthe der Function ausdrückt, und durch Abziehung erst die Zunahmen, und dann den Unterschied der Zunahmen herstellt. Wenden wir dies Verfahren an auf die Function $\frac{1}{3}x^3$, so sind die den drei Werthen x, $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$ der willkürlich Veränderlichen entsprechenden Werthe der Function $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3$ und $\frac{1}{3}(x+2\Delta x)^3$, und nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirung $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2$ u. $\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x\Delta x+\frac{4}{3}(\Delta x)^2$. Ziehen wir jeden Werth der Function von dem Darauffolgenden ab, so erhalten wir in den Ausdrücken $\frac{2}{3}x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x^2)$ und $\frac{2}{3}x\Delta x+\frac{3}{3}(\Delta x)^2$ die Zunahmen der Function; und nach Abziehung der ersten Zunahme von der zweiten stellt der Rest $\frac{2}{3}(\Delta x)^2$ den Un-

terschied der Zunahmen der Function dar für die beliebigen gleichen Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen. Wir sehen also, daß der Unterschied der Zunahmen, da er ein Product aus der constanten Zahl $\frac{2}{3}$ und dem Quadrat von Δx ist, im quadratischen Verhältniß von Δx ab- und zunimmt, wie wir auch vorher in dem Zahlenbeispiel schon sahen, daß für eine halb so große Zunahme der willkürlich Veränderlichen der Unterschied der Zunahmen viermal so klein wurde. Es wird mithin in der Function $\frac{1}{3}x^2$ der Unterschied der Zunahmen der Function dividirt durch das Quadrat der Zunahme von x die von dieser letzteren Zunahme unabhängige gesuchte constante Zahl, nämlich die Zahl $\frac{2}{3}$, liefern, welche als allgemeines Maß der Beschleunigung des Wachsens dieser Function dienen kann.

Wenn man auch in der andern von uns oben als Beispiel der gleichförmigen Retardation des Wachsens gebrauchten Function, nämlich in der Function $2x - \frac{1}{4}x^2$, den Unterschied der Zunahmen der Function allgemein in Bezug auf eine beliebige Zunahme Δx der willkürlich Veränderlichen ausdrücken wollte, und demgemäß für die drei Werthe x, $x + \Delta x$ und $x + 2\Delta x$ der willkürlich Veränderlichen die Werthe der Function berechnete, und durch Abziehung derselben von einander erst die Zunahmen und dann den Unterschied der Zunahmen bildete, so würde man diesen Unterschied allgemein gleich $-\frac{1}{2}(\Delta x)^2$ erhalten, und folglich würde ein beliebiger Unterschied der Zunahmen der Function dividirt durch das Quadrat der zugehörigen Zunahme des x die constante Zahl $-\frac{1}{2}$ liefern.

Obgleich wir nun die allgemeine Function, durch welche

alle Größen, die eine gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens haben, ausgedrückt werden, noch nicht kennen, und wir bisher nur einzelne hierhergehörige Functionen, wie die Functionen $\frac{1}{3}x^3$ und $2x - \frac{1}{4}x^2$ willkürlich herausgegriffen haben, so ist es doch leicht zu beweisen, daß bei allen solchen Größen der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen dividirt werden müsse, um einen constanten Quotient zu erhalten. Denn die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen bilden eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Stellen wir das Anfangsglied dieser Reihe durch A, die Differenz durch D vor, so bedeuten die einzelnen Glieder der Reihe

$$A, \quad A + D, \quad A + 2D, \quad A + 3D, \text{ u. s. w.}$$

die successiven Zunahmen der abhängig Veränderlichen. Nehmen wir nun z. B. an, daß die gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen dreimal kleiner genommen würden, so erhielt man statt jeder der Zunahmen A, $A + D$, u. s. w. drei Zunahmen der abhängig Veränderlichen, welche selbst eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Nennen wir das Anfangsglied der neuen Reihe a, die Differenz derselben d, so werden in der erhaltenen Reihe

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \text{ u. s. w.}$$

die drei ersten Glieder zusammen gleich A und die drei nächsten zusammen $A + D$ sein. Man erhält also die Gleichungen $3a + 3d = A$ und $3a + 12d = A + D$, und daraus durch Abziehung der ersten Gleichung von der zweiten $9d = D$. Man sieht also, daß die Differenz der neuen Reihe 9 Mal so klein ist als die der früheren, d. h. daß der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen 9 Mal kleiner wird, wenn man die Zunahme der willkürlich Veränderlichen 3 Mal kleiner macht. Um den Be-

weis allgemein zu machen, so erinnere man sich, daß aus der Reihe

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \text{u. s. w.}$$

deren Glieder die Zunahmen der abhängig Veränderlichen vorstellen sollen, wieder eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung entsteht, wenn man die Summen von je gleichviel aufeinanderfolgenden Gliedern als die Glieder der neuen Reihe betrachtet. Denkt man sich nun die Zunahme der willkürlich Veränderlichen n mal so groß, so wird die Summe der n ersten Glieder der vorstehenden Reihe gleich der ersten Zunahme der abhängig Veränderlichen, und die Summe der nächstfolgenden n Glieder der Reihe der zweiten Zunahme derselben gleich sein. Die Summe der n ersten Glieder der Reihe ist aber, da a das erste und $a+(n-1)d$ das nte Glied ist, nach der bekannten Regel der Summation einer arithmetischen Reihe gleich $na+\frac{n(n-1)}{2}.d$, und die Summe der nächstfolgenden n Glieder, unter denen $a+nd$ das erste und $a+(2n-1)d$ das letzte ist, wird gleich $na+\frac{n(3n-1)}{2}.d$ sein. Die erste Zunahme der abhängig Veränderlichen ist also $na+\frac{n(n-1)}{2}.d$ und die zweite $na+\frac{n(3n-1)}{2}.d$. Zieht man die erste Zunahme von der zweiten ab, so erhält man n^2d, als den Unterschied der Zunahmen. Wir sehen also, daß, wenn vorher der Unterschied der Zunahmen gleich d war, derselbe für n mal so große Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleich n^2d ist, und folglich im quadratischen Verhältniß der Zunahme der willkürlich Veränderlichen wächst.

Man konnte die Richtigkeit dieses Satzes sehr einfach und anschaulich auch auf geometrischem Wege einsehen. Die Flächenräume Fig. 52 und 53 können als Bild aller gleichförmig beschleunigt oder retardirt wachsenden Größen dienen. Das aus einer von den gleichen Zunahmen der

Abſciſſe und der zugehörigen Zu- oder Abnahme der Ordinate gebildete Parallelogramm hcki oder abki ſtellt den Unterſchied der Flächenzunahmen dar. Nimmt man nun die gleichen Zunahmen der Abſciſſe z. B. halb ſo groß, ſo wird nicht blos die Grundlinie, ſondern auch die Höhe dieſes Parallelogramms halb ſo groß, und folglich wird das den Unterſchied der Flächenzunahmen darſtellende Parallelogramm viermal ſo klein, und ſofort bei allen beliebigen Vergrößerungen oder Verkleinerungen der Zunahmen der Abſciſſe.

Schließlich haben wir noch die Bezeichnungsweiſe zu erwähnen, durch welche die bisher entwickelten Begriffe ausgedrückt werden. Das leicht verſtändlichſte Verfahren, um den Unterſchied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von Δx verbunden ſind, zu finden, iſt allerdings das, welches wir in den obigen Beiſpielen angewendet haben, nämlich daß man der willkürlich Veränderlichen drei Werthe x, $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$ ertheilt, und aus den drei zugehörigen Werthen der Function erſt die Zunahmen und dann den Unterſchied der Zunahmen berechnet. Dieſe Art der Bildung des Unterſchiedes der Zunahmen iſt jedoch für die Erklärung der Bezeichnung nicht bequem. Man konnte denſelben Werth aber auch auf folgendem etwas abweichendem Wege darſtellen. Iſt nämlich y eine Function von x, und ſetzt man in derſelben $x+\Delta x$ ſtatt x, und zieht von dem ſo erhaltenen Werth der Function ihren früheren Werth ab, ſo erhält man diejenige Zunahme der Function y, welche entſteht, indem die willkürlich Veränderliche vom Zahlenwerth x aus um Δx wächſt, allgemein als eine Function von x, welche Function man bekanntlich durch Δy bezeichnet. In ſofern man für alle veränderlichen Werthe von x dem Δx einen zwar beliebigen, aber unveränderlichen Werth beigelegt denkt, iſt Δy nur eine Function der Veränderlichen x. Setzt man in der durch Δy vorgeſtellten Function von Neuem

$x+\Delta x$, so erhält man offenbar diejenige Zunahme der Function y, welche entsteht, indem die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerth $x+\Delta x$ aus um die Zahl Δx wächst. Zieht man nun von diesem zweiten Werth der Function Δy ihren früheren Werth ab, so hat man in dem Rest wieder den Unterschied zweier Zunahmen der Function y, welche dadurch entstehen, daß die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerth x aus zweimal um die Zahl Δx wächst. Hierbei ist genau dasselbe Verfahren der Differenzenbildung, durch welches man aus der Function y die Function Δy bildet, auch auf die Function Δy angewendet worden; und man kann demnach auch dieselbe Bezeichnungsweise wieder auf die Function Δy anwenden, und wird unter dem Ausdruck $\Delta\Delta y$ zu denken haben, erstens, wie sich von selbst versteht, den Unterschied zweier Werthe der Function Δy, welche den Werthen x und $x+\Delta x$ der willkürlich Veränderlichen zugehörig sind, und zweitens, wie soeben nachgewiesen, den Unterschied zweier Zunahmen der Function y, welche dadurch entstehen, daß die willkürlich Veränderliche vom Zahlenwerth x aus zweimal um die Zahl Δx wächst. Die letztere Ausdrucksweise der Bedeutung von $\Delta\Delta y$ ist es, welche sich unserer Erklärung der Beschleunigung des Wachsens zunächst anschließt, und die wir daher auch jetzt gebrauchen wollen. Wir würden nun, da wir früher fanden, daß in der Function $\frac{1}{3}x^3$ der Unterschied zweier Zunahmen der Function, die mit zwei gleichen Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen verbunden sind, gleich $\frac{2}{3}(\Delta x)^3$ ist, dies Resultat durch die analytische Differenzengleichung $\Delta\Delta\frac{1}{3}x^3=\frac{2}{3}(\Delta x)^2$ ausdrücken können, und ebenso das für die Function $2x-\frac{1}{4}x^3$ gefundene Resultat durch die Gleichung $\Delta\Delta(2x-\frac{1}{4}x^3)=-\frac{1}{2}(\Delta x)^2$.

Da nun in allen Fällen, wo eine gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens stattfindet, der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen dividirt durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen einen constanten Quotient gibt, so ist die Gleichung $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2} = a$ ebenso charakteristisch für die gleichförmige Beschleunigung des Wachsens der Größen x und y, wie die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ für das gleichmäßige Wachsen derselben. Wie der Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der erste Differenzquotient heißt, so heißt $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ der zweite Differenzquotient. Gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens kann also auch so definirt werden, daß der zweite Differenzquotient constant ist. Für den Fall, daß man die Zahl Δx gleich 1 annimmt, geht die Gleichung $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2} = a$ über in die Gleichung $\Delta\Delta y = a$, und der constante zweite Differenzquotient wird dem Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gleich. Die Bedeutung einer Zahl a, durch welche eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens bezeichnet wird, kann demnach immer kurz so ausgesprochen werden: Die Zunahmen der abhängig Veränderlichen werden um a größer, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Im gemeinen Leben, in soweit überhaupt in demselben dergleichen Begriffe mit Klarheit gefaßt und ausgesprochen werden, verfährt man immer so, daß man eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens nicht anders als bezüglich auf Zunahmen der willkürlich Veränderlichen vom Zahlenwerth 1 bestimmt, wie man etwa, um die gleichförmig beschleunigte Bewegung des freien Falles der Körper zu bezeichnen, sagt, der in jeder folgenden Secunde durchlaufene Raum ist um 30 Fuß größer, nicht aber, der in jeder folgenden Viertelsecunde

durchlaufene Raum ist um $\frac{30}{16}$ oder um $1\frac{3}{8}$ Fuß größer, obgleich das Eine ganz dasselbe ist, was das Andere. Man weiß ja nicht einmal unmittelbar, daß durch beide Ausdrucksweisen, nämlich durch 30 Fuß Raumvergrößerung für 1 Secunde und durch $1\frac{3}{8}$ Fuß für $\frac{1}{4}$ Secunde, genau dieselbe Größe der Beschleunigung der Fallbewegung bezeichnet wird. Ebensowenig wird man, um die Fallbewegung zu bezeichnen, sagen, die in Fußen ausgedrückten Unterschiede der Zunahmen des Raumes, dividirt durch das Quadrat der in Secunden ausgedrückten gleichen Zunahmen der Zeit, geben den constanten Quotient 30. Denn eine solche Ausdrucksweise hat etwas durchaus Unanschauliches, wie sehr sie auch für die wissenschaftliche Behandlung des Begriffs der Beschleunigung des Wachsens förderlich und selbst unentbehrlich ist.

§. 106.

Allg. Function der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen.

Nachdem wir die Begriffe der constanten Beschleunigung des Wachsens und des Maßes für dieselbe festgestellt haben, entsteht die Frage, welche Form im Allgemeinen eine Function haben muß, wenn bei derselben mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sein sollen, oder in welcher allgemeinen Function alle denkbaren eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens ausdrückenden Functionen als besondere Fälle enthalten sind. Wir wissen, daß die Function $a + bx$ alle Fälle eines gleichmäßigen Wachsens in sich begreift, und zwar deswegen in sich begreift, weil sie, wie §. 18 geschehen, aus der Voraussetzung des gleichmäßigen Wachsens abgeleitet werden kann. Ebenso werden wir die allgemeine alle denkbaren Fälle der gleichförmigen Beschleunigung des Wachsens in sich enthaltende Function finden, wenn wir im

Stande ſind, dieſelbe aus der Vorausſetzung der gleichförmigen Beſchleunigung des Wachſens abzuleiten. Dieſe Vorausſetzung ſchließt in ſich, daß die den gleichen beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung bilden. Wir wollen die willkürlich Veränderliche vom Nullwerth aus wachſend denken und die der erſten Zunahme derſelben entſprechende Zunahme der abhängig Veränderlichen möge A heißen; die nächſte Zunahme der abhängig Veränderlichen heiße A + D, und es ſind mithin die ſucceſſiven Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch die einzelnen Glieder der Reihe

$$A,\ A+D,\ A+2D,\ A+3D,\ \ldots\ A+(n-1)D$$

vorgeſtellt. Den Werth, den die abhängig Veränderliche wachſend erreicht, wird man offenbar erhalten, wenn man die Summe aller ſucceſſiven Zunahmen der abhängig Veränderlichen nimmt, und den zufälligen Zahlenwerth, den die abhängig Veränderlichen für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen hat, hinzufügt. Man kann ſich das Geſagte leicht veranſchaulichen durch den Hinblick auf die Coordinaten einer krummen Linie Fig. 54. Auf der Abſciſſenlinie ſind vom Punkt a, als dem Nullpunkt, lauter gleiche Zunahmen ab, bc, u. ſ. w. geſetzt. Der Werth einer beliebigen Ordinate ek, als der abhängig Veränderlichen, wird augenſcheinlich erhalten, wenn man zu der Linie gk, d. h. zu der Summe der Zunahmen gm, hn, io, kp der Ordinate, die Linie fa, d. h. den Werth, den die Ordinate für den Nullwerth der Abſciſſe hat, hinzufügt. Unſere Abſicht iſt nun die Summe der durch obige Reihe vorgeſtellten Zunahmen der abhängig Veränderlichen als Function des Zahlenwerths der willkürlich Veränderlichen darzuſtellen. Man ſieht indeſſen leicht, daß man die Summe der obigen Reihe, abgeſehen von den conſtanten Größen A und D, zunächſt durch die beliebig zu ſetzende Anzahl der Glieder ausgedrückt erhalten wird, und daß die Summenformel folglich als Function der veränderlichen An-

zahl der Glieder der Reihe, oder, was daſſelbe iſt, als Function der Anzahl der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen erſcheinen wird, nicht aber als Function des Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen. Da man jedoch den Zunahmen der willkürlich Veränderlichen einen beſtimmten Zahlenwerth beilegen kann, und in dieſem Fall der Uebergang von der Anzahl der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen zu dem Zahlenwerth dieſer willkürlich Veränderlichen leicht zu finden iſt, ſo iſt es auf dieſem Wege auch möglich, die Summenformel als Function des Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen darzuſtellen. Die obige Reihe habe n Glieder; das letzte Glied derſelben iſt alſo $A + (n-1)D$. Die Summe der Reihe iſt nach bekannter Regel $= [A + A + (n-1)D]\frac{n}{2}$, oder, nach Potenzen von n geordnet, $= \left(A - \frac{D}{2}\right)n + \frac{D}{2}n^2$. Nehmen wir nun zunächſt an, daß die Reihe mit dem Anfangsglied A und der Differenz D entſtanden ſei, indem man der willkürlich Veränderlichen vom Nullwerth aus Zunahmen vom Zahlenwerth 1 ertheilt hat, ſo fällt die Zahl n, d. h. die Anzahl der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen ohne Weiteres zuſammen mit dem ganzen Zahlenwerth, den die willkürlich Veränderliche wachſend erreicht hat. Nennen wir dieſen ganzen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen x, ſo iſt die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch die Function $\left(A - \frac{D}{2}\right)x + \frac{D}{2}x^2$ von x gegeben.

Es iſt leicht zu beweiſen, daß, wenn die willkürlich Veränderliche nicht den Werth einer ganzen Zahl, ſondern den eines beliebigen Bruches $\frac{n}{m}$ wachſend erreicht hat, die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen dennoch durch dieſelbe Function des Zahlenwerths der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt wird. Der Beweis iſt fol-

gender. Die willkürlich Veränderliche wachse vom Nullwerth aus nicht um Zunahmen gleich 1, in welchem Falle die Zunahmen der abhängig Veränderlichen eine Reihe mit dem Anfangsglied A und der Differenz D bildeten, sondern um Zunahmen gleich $\frac{1}{m}$. Die Zunahmen der abhängig Veränderlichen bilden dann eine andere arithmetische Reihe der ersten Ordnung, deren Anfangsglied a und deren Differenz d heißen möge. Die Größen a und d stehen in leicht nachweisbarem Zusammenhang mit A und D. Denn da die Zunahme der willkürlich Veränderlichen jetzt m mal so klein gesetzt ist, so ist, wie im vorhergehenden Paragraphen nachgewiesen, die Differenz d der neuen Reihe m^2 mal so klein als die Differenz D, oder es ist $d = \frac{D}{m^2}$. Was den Zusammenhang von a und A betrifft, so ist klar, daß die Summe der m ersten Glieder der neuen Reihe gleich A ist. Diese Summe ist aber $= [a + a + (m-1)d]\frac{m}{2}$ $= ma + \frac{m(m-1)d}{2}$. Führt man in diese Formel D ein, indem man $\frac{D}{m^2}$ statt d setzt, so erhält man $ma + \frac{m(m-1)D}{2m^2} = A$ und folglich $a = \frac{A}{m} - \frac{(m-1)D}{2m^2}$. Nachdem durch diese Gleichungen der Uebergang von den Größen a und d zu den Größen A und D ermöglicht ist, läßt sich der Beweis leicht zu Ende führen. Nehmen wir nämlich in der Reihe mit dem Anfangsglied a und der Differenz d die n ersten Glieder zusammen, so ist ihre Summe, nach Potenzen von n geordnet, gleich $\left(a - \frac{d}{2}\right)n + \frac{d}{2}n^2$. Zu diesen n Zunahmen der abhängig Veränderlichen gehören n Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\frac{1}{m}$; deren Summe $\frac{n}{m}$ ist der Zahlenwerth, den die will-

kürlich Veränderliche wachsend erreicht hat. Wenn wir nun die dem Zahlenwerth $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen zugehörige Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, welche durch die Formel $\left(a-\frac{b}{2}\right)n+\frac{d}{2}n^2$ gegeben war, als Function der Zahl $\frac{n}{m}$ ausdrücken wollen, so brauchen wir in dieser Summenformel nur das erste Glied durch m und das zweite durch m^2 zu multipliciren und zu dividiren, und erhalten $m\left(a-\frac{d}{2}\right)\frac{n}{m}+\frac{m^2d}{2}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^2$. Führen wir in diese Formel die Werthe A und D ein, indem wir den obigen Gleichungen gemäß $\frac{D}{m^2}$ statt d und $\frac{A}{m}-\frac{(m-1)D}{2m^2}$ statt a setzen, so erhalten wir

$$m\left[\frac{A}{m}-\frac{(m-1)D}{2m^2}-\frac{D}{2m^2}\right]\frac{n}{m}+\frac{m^2D}{2m^2}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und nach Zusammenziehung des Coefficienten von $\frac{n}{m}$ die Formel $\left(A-\frac{D}{2}\right)\frac{n}{m}+\frac{D}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^2$. Wir sehen also, daß die Function des beliebigen Zahlenwerthes $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen, durch welche die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen ausgedrückt wird, genau dieselbe ist, welche wir für den ganzen Zahlenwerth x der willkürlich Veränderlichen vorher gefunden haben, und es ist demnach allgemein, wenn die willkürlich Veränderliche den beliebigen Zahlenwerth x hat, die Summe der Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch die Function $\left(A-\frac{D}{2}\right)x+\frac{D}{2}x^2$ von x gegeben, wobei die Zahlen A und D eine aus dem Früheren bekannte Bedeutung haben.

Da man nun, wie wir oben ſahen, den Geſammtwerth der abhängig Veränderlichen erhält, wenn man zu der Summe ihrer Zunahmen noch den zufälligen Werth, den die abhängig Veränderliche für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen hat, hinzufügt, ſo wird, dieſen Werth durch a ausgedrückt, die Function $a + \left(A - \frac{D}{2}\right)x + \frac{D}{2}x^2$ die geſuchte alle denkbaren Fälle einer conſtanten Beſchleunigung oder Retardation des Wachſens oder Abnehmens umfaſſende allgemeine Function ſein. Sehen wir ab von der beſtimmten Bedeutung, welche vermöge der obigen Ableitung aus der Reihe der Zunahmen den Zahlen A und D unſerer Function beizulegen iſt, und beachten blos, daß ſie überhaupt conſtant ſind, ſo können wir alle gleichförmig beſchleunigt wachſenden Größen als durch die Function $a + bx + cx^2$ gegeben betrachten.

§. 107.

Folgerungen aus dieſer allgemeinen Function.

Es iſt leicht zu ſehen, daß nicht blos, wie ſoeben nachgewieſen worden, jede gleichförmig beſchleunigt wachſende Größe durch eine Function von der Form $a + bx + cx^2$ ſich darſtellen läßt, ſondern daß auch umgekehrt jede Größe, deren veränderlicher Werth durch eine derartige Function ausgedrückt erſcheint, eine gleichförmig beſchleunigt wachſende ſein muß, oder daß die mit beliebigen gleichen Zunahmen des x verbundenen Zunahmen der Function gleiche Unterſchiede zeigen müſſen. Denn bilden wir nach dem im Obigen angegebenen Verfahren den Unterſchied der Zunahmen der Function, welche mit zwei gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von Δx verbunden ſind, ſo finden wir denſelben gleich $2c(\Delta x)^2$, was wir durch die analytiſche Differenzengleichung $\Delta\Delta(a + bx + cx^2) = 2c(\Delta x)^2$ darſtellen können. Da dieſer Unterſchied der Zunahmen der Function conſtant iſt, ſo lange Δx conſtant iſt, oder die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen

alle gleich groß genommen werden, so stellt die Function $a+bx+cx^2$ immer eine mit constanter Beschleunigung wachsende Größe dar. Schreiben wir die vorliegende Differenzengleichung in der Form $\frac{\Delta\Delta(a+bx+cx^2)}{(\Delta x)^2}=2c$, so sehen wir, daß das Doppelte des Coefficienten von x^2, als der zweite Differenzquotient der Function, das Maß der constanten Beschleunigung des Wachsens in dem mehrerwähnten Sinne ist, d. h. daß das Doppelte dieses Coefficienten angibt, wie groß die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen sind, wenn die willkürlich Veränderliche mehreremal um den Zahlenwerth 1 wächst. Es folgt hieraus, oder es ist vielmehr nur eine andere Ausdrucksweise der letzterwähnten Eigenschaft der Function $a+bx+cx^2$, daß, wenn man dem x mehrere um 1 verschiedene Werthe beilegt, die dadurch entstehenden successiven Werthe der Function eine Reihe bilden, in welcher die Unterschiede der Unterschiede der Glieder der Reihe constant und gleich $2c$ sind. Setzen wir, um dies durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, $a=3$, $b=-1$, $c=2$, wodurch die unbestimmte Function $a+bx+cx^2$ in die bestimmte $3-x+2x^2$ übergeht, so sind, wenn wir dem x der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 beilegen, die zugehörigen Zahlenwerthe der bestimmten Function 4, 9, 18, 31, 48. Ziehen wir jeden dieser Werthe der Function von dem nachfolgenden ab, so erhalten wir in den Zahlen 5, 9, 13, 17 die successiven Zunahmen der Function. Die Unterschiede dieser Zunahmen sind constant und gleich 4, und also gleich dem Doppelten des für x^2 angenommenen Coefficienten. Alles dies über die Function $a+bx+cx^2$ bisher Gesagte könnte auch aus der Zurückbeziehung derselben auf ihre den Zusammenhang mit der arithmetischen Reihe der Zunahmen ausdrückende Form $a+\left(A-\frac{D}{2}\right)x+\frac{D}{2}x^2$ sehr leicht hergeleitet werden.

Da der Ausdruck für die Beschleunigung des Wach-

Da man nun, wie wir oben sahen, den Gesammtwerth der abhängig Veränderlichen erhält, wenn man zu der Summe ihrer Zunahmen noch den zufälligen Werth, den die abhängig Veränderliche für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen hat, hinzufügt, so wird, diesen Werth durch a ausgedrückt, die Function $a + \left(A - \frac{D}{2}\right)x + \frac{D}{2}x^2$ die gesuchte alle denkbaren Fälle einer constanten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens umfassende allgemeine Function sein. Sehen wir ab von der bestimmten Bedeutung, welche vermöge der obigen Ableitung aus der Reihe der Zunahmen den Zahlen A und D unserer Function beizulegen ist, und beachten blos, daß sie überhaupt constant sind, so können wir alle gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen als durch die Function $a + bx + cx^2$ gegeben betrachten.

§. 107.

Folgerungen aus dieser allgemeinen Function.

Es ist leicht zu sehen, daß nicht blos, wie soeben nachgewiesen worden, jede gleichförmig beschleunigt wachsende Größe durch eine Function von der Form $a + bx + cx^2$ sich darstellen läßt, sondern daß auch umgekehrt jede Größe, deren veränderlicher Werth durch eine derartige Function ausgedrückt erscheint, eine gleichförmig beschleunigt wachsende sein muß, oder daß die mit beliebigen gleichen Zunahmen des x verbundenen Zunahmen der Function gleiche Unterschiede zeigen müssen. Denn bilden wir nach dem im Obigen angegebenen Verfahren den Unterschied der Zunahmen der Function, welche mit zwei gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von Δx verbunden sind, so finden wir denselben gleich $2c(\Delta x)^2$, was wir durch die analytische Differenzengleichung $\Delta\Delta(a + bx + cx^2) = 2c(\Delta x)^2$ darstellen können. Da dieser Unterschied der Zunahmen der Function constant ist, so lange Δx constant ist, oder die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen

alle gleich groß genommen werden, so stellt die Function $a+bx+cx^2$ immer eine mit constanter Beschleunigung wachsende Größe dar. Schreiben wir die vorliegende Differenzengleichung in der Form $\frac{\Delta\Delta(a+bx+cx^2)}{(\Delta x)^2}=2c$, so sehen wir, daß das Doppelte des Coefficienten von x^2, als der zweite Differenzquotient der Function, das Maß der constanten Beschleunigung des Wachsens in dem mehrerwähnten Sinne ist, d. h. daß das Doppelte dieses Coefficienten angibt, wie groß die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen sind, wenn die willkürlich Veränderliche mehreremal um den Zahlenwerth 1 wächst. Es folgt hieraus, oder es ist vielmehr nur eine andere Ausdrucksweise der letzterwähnten Eigenschaft der Function $a+bx+cx^2$, daß, wenn man dem x mehrere um 1 verschiedene Werthe beilegt, die dadurch entstehenden successiven Werthe der Function eine Reihe bilden, in welcher die Unterschiede der Unterschiede der Glieder der Reihe constant und gleich $2c$ sind. Setzen wir, um dies durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, $a=3$, $b=-1$, $c=2$, wodurch die unbestimmte Function $a+bx+cx^2$ in die bestimmte $3-x+2x^2$ übergeht, so sind, wenn wir dem x der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 beilegen, die zugehörigen Zahlenwerthe der bestimmten Function 4, 9, 18, 31, 48. Ziehen wir jeden dieser Werthe der Function von dem nachfolgenden ab, so erhalten wir in den Zahlen 5, 9, 13, 17 die successiven Zunahmen der Function. Die Unterschiede dieser Zunahmen sind constant und gleich 4, und also gleich dem Doppelten des für x^2 angenommenen Coefficienten. Alles dies über die Function $a+bx+cx^2$ bisher Gesagte könnte auch aus der Zurückbeziehung derselben auf ihre den Zusammenhang mit der arithmetischen Reihe der Zunahmen ausdrückende Form $a+\left(A-\frac{D}{2}\right)x+\frac{D}{2}x^2$ sehr leicht hergeleitet werden.

Da der Ausdruck für die Beschleunigung des Wach-

sens der Function $a + bx + cx^2$ nur von dem Coefficienten von x^2 abhängt, so folgt erstens, daß die Coefficienten a und b sowol jeder einzeln, als auch beide zugleich gleich Null sein können, und dennoch eine gleichförmig beschleunigt wachsende Größe durch die Function gegeben ist. Wäre c gleich Null, so stellt die übrigbleibende Function $a + bx$ gleichmäßig wachsende Größen vor, welche ja eben jede Beschleunigung des Wachsens ausschließen. Es folgt ferner, daß aus dem Coefficient c beurtheilt werden kann, welche von den beiden oben bezeichneten Hauptarten der Veränderung der Stärke des Wachsens stattfindet. Ist nämlich c positiv, so entsteht jede folgende Zunahme der abhängig Veränderlichen aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer positiven Zahl. Wenn nun die abhängig Veränderliche im Abnehmen begriffen ist, oder ihre Zunahmen negativ sind, so werden sie durch den Zusatz einer positiven Zahl kleiner, und man hat eine Retardation des Abnehmens, und wenn die abhängig Veränderliche im Wachsen begriffen ist, so werden ihre positiven Zunahmen immer größer, und man hat eine Beschleunigung des Wachsens. Ein positives c begreift also die beiden Fälle, eine Retardation des Abnehmens und eine Beschleunigung des Wachsens in sich, welche wir mit gemeinschaftlichem Namen Beschleunigung des Wachsens genannt haben. Ist c negativ, und entsteht also jede folgende Zunahme aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer negativen Zahl, so werden, wenn die abhängig Veränderliche im Wachsen begriffen ist, ihre Zunahmen immer kleiner, und man hat eine Retardation des Wachsens, und wenn sie im Abnehmen begriffen ist, so werden die Abnahmen immer größer, und man hat eine Beschleunigung des Abnehmens, und mithin begreift ein negatives c die beiden Fälle, eine Retardation des Wachsens und eine Beschleunigung des Abnehmens in sich, welche wir mit gemeinschaftlichem Namen eine Retardation des Wachsens genannt haben. Ob nun innerhalb gewisser Grenzen des Werthes von x von den

beiden unter einem positiven oder negativen c begriffenen Fällen der eine oder der andere statthat, d. h. ob die abhängig Veränderliche im Wachsen oder Abnehmen ist, das läßt sich bekanntlich nur aus dem ersten Differentialquotient der abhängig Veränderlichen beurtheilen, welcher, je nachdem er positiv oder negativ ist, ein Wachsen oder Abnehmen derselben anzeigt. Der Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$ ist $b + 2cx$. Derselbe ist bei beliebigen Werthen von b und c für einen gewissen einzelnen Werth von x gleich Null. Für alle vor diesem einzelnen Werth liegenden Werthe von x ist er negativ und für alle nachfolgenden positiv oder umgekehrt. Aus dem Differentialquotient $b + 2cx$ läßt sich mithin leicht beurtheilen, bis zu welcher Grenze des Werthes von x eine Retardation des Abnehmens, und darüber hinaus eine Beschleunigung des Wachsens stattfindet bei positivem c, oder eine Retardation des Wachsens und eine Beschleunigung des Abnehmens bei negativem c. Ob also die Unterschiede der Zunahmen einer gleichförmig beschleunigt wachsenden Größe positiv oder negativ sind, das hängt von c allein ab, ob die Zunahmen positiv oder negativ sind, das hängt außer x von c und b ab, und ob endlich die Größe selbst positiv oder negativ ist, das hängt natürlich außer x von c, b und a zugleich ab.

§. 108.

Construction der gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen.

Vermöge der für alle gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen aufgefundenen Function können leicht die Bedingungen angegeben werden, unter welchen besondere, ihrer Art nach bestimmte veränderliche Größen eine constante Beschleunigung des Wachsens zeigen. In sofern man mit geometrischen Größen zu thun hat, nennen wir die Bestimmung derjenigen Figur, in welcher gewisse räumliche Elemente eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens haben, die Construction der gleichförmig beschleunigt wach-

senden Größen. So wie man z. B. weiß, daß nur die Parallelcoordinaten einer graden Linie eine constante Stärke des Wachsens haben, so kann man auch fragen, in welcher Figur haben die Parallelcoordinaten eine constante Beschleunigung des Wachsens. Die Antwort darauf ist, in derjenigen Figur, in welcher die Coordinate durch die Function $a + bx + cx^2$ der Abscisse x gegeben ist, oder welche durch die Gleichung $y = a + bx + cx^2$ dargestellt wird. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, oder wir wollen wenigstens hier als bekannt voraussetzen, daß durch diese Gleichung bei allen beliebigen Zahlenwerthen der Buchstaben a, b und c immer die gemeine Parabel ausgedrückt wird, und zwar für eine solche Lage der Coordinatenaxen, daß die Ordinaten mit der Hauptaxe der Parabel parallel laufen. Wir sehen also, daß nur in einer einzigen Linie, nämlich in der gemeinen Parabel, und zwar nur in dem Fall, als ihre Ordinaten mit der Hauptaxe parallel sind, die Parallelcoordinaten eine constante Beschleunigung des Wachsens zeigen können. Beschränken wir uns auf rechtwinklige Coordinaten, so geben die Figuren 50 und 51, welche im Eingang als Beispiele einer constanten Beschleunigung oder Retardation des Wachsens der Parallelordinaten gebraucht worden sind, die einzig möglichen beiden Lagen an, in welchen eine solche Beschleunigung der senkrechten Parallelcoordinaten stattfinden kann. Was das Maß dieser constanten Beschleunigung betrifft, so kann dasselbe natürlich in verschiedenen Parabeln in allen Graden der Größe vorhanden sein, und es fragt sich, von welchem Element der Parabel es abhängt. Aus der analytischen Geometrie weiß man, daß in der Gleichung $y = a + bx + cx^2$ der Parabel bei rechtwinkligen Coordinaten die Zahl c so mit dem Parameter p der Parabel zusammenhängt, daß $c = \frac{1}{p}$ ist. Wir sehen daraus, daß das Maß der Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten, da es von c allein abhängt, im umgekehrten Ver-

hältniß zum Parameter steht, oder daß je größer die Zahl ist, welche den Parameter ausdrückt, desto kleiner die Zahl ist, welche den Unterschied der Zunahmen der Ordinaten ausdrückt bei gleichen Zunahmen der Abscisse.

Um ein zweites Beispiel zu geben, so nehmen wir an, man wollte wissen, in welcher Figur der zwischen den senkrechten Parallelcoordinaten enthaltene Flächenraum eine constante Beschleunigung des Wachsens zeigt bezüglich der Abscisse als der willkürlich Veränderlichen. Alsdann muß $a+bx+cx^2$ diejenige Function der Abscisse x sein, durch welche die Fläche der Figur ausgedrückt wird. Da man nun weiß (§. 49), daß die die Ordinate einer Figur darstellende Function der Abscisse erhalten wird, wenn man den Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse nimmt, welche die Fläche der Figur angibt, so stellt die Function $b+2cx$, als der Differentialquotient der Function $a+bx+cx^2$, die Ordinate der gesuchten Figur dar. Nun ist aber $b+2cx$ die Ordinate einer geraden Linie, und folglich kann eine constante Beschleunigung des Wachsens der Flächen nur dargestellt werden durch Flächenräume, welche durch das Fortrücken der veränderlichen Ordinate einer geraden Linie beschrieben werden, wie die früher als Beispiele gebrauchten Flächenräume in Figur 52 und 53. Da das Maß der Beschleunigung des Wachsens der durch $a+bx+cx^2$ ausgedrückten Fläche nur von der Zahl c abhängt, und für die gerade Linie, deren Ordinate $b+2cx$ ist, durch c nur ihre Neigung gegen die Abscisse vorgeschrieben ist, so sieht man, daß die Beschleunigung des Wachsens der Fläche gar nicht von der Größe der Ordinate, durch deren Fortrücken die Fläche beschrieben wird, abhängt, sondern nur von der Neigung, welche die gerade Linie gegen ihre Abscisse hat. Von der Größe der Ordinate, und von dieser allein, hängt bekanntlich die Stärke des Wachsens der Fläche ab.

Um noch ein drittes Beispiel zu geben, so fragen wir, welche durch Polarcoordinaten beschriebene krumme Linie hat die Eigenschaft, daß mit gleichen Zunahmen des Abscis-

senkreises solche Zunahmen des vom Radiusvecter beschriebenen Flächenraums verbunden sind, die immer um gleichviel größer oder kleiner werden. Für eine Abscisse x ist also die Fläche durch die Function $a+bx+cx^2$ ausgedrückt. Nun weiß man (s. §. 51), daß bei Polarcoordinaten der Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse, welche die Fläche ausdrückt, gleich ist dem halben Quadrat der die Ordinate darstellenden Function. Es wird also, wenn wir unter u die unbekannte die Ordinate ausdrückende Function vorstellen, der Differentialquotient von $a+bx+cx^2$, d. h. $b+2cx=\frac{u^2}{2}$ sein, und folglich ist $u=\sqrt{2b+4cx}$ die Gleichung der gesuchten Linie. Eine dieser Gleichung entsprechende Linie ist, in sofern man nur die Art ihres Verlaufs im Allgemeinen im Auge hat, durch die Figur 55 dargestellt. Aus diesen wenigen Beispielen wird es hinreichend klar sein, daß es gar keine Schwierigkeit hat, für alle Arten von räumlichen Elementen diejenige Figur zu finden, in welcher die abhängig Veränderliche eine constante Beschleunigung des Wachsens hat, und daß der Construction aller beliebigen gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen nichts im Wege steht.

Zum Schluß dieser Lehre von den gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen bemerken wir noch, daß man diese Lehre auch auf folgendem Wege darstellen konnte. Man hätte, wenn eine veränderliche Stärke des Wachsens vorausgesetzt ist, als den einfachsten denkbaren Fall dieser Veränderung den angenommen, in welchem mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleich große Veränderungen der Stärke des Wachsens verbunden sind, so daß die willkürlich Veränderliche und die Stärke des Wachsens der beiden Veränderlichen, d. h. ihr Differentialquotient, gleichmäßig wachsende Größen sind. Hätte man nun die unbekannte Function von x, welche in diesem Falle die abhängig Veränderliche ausdrückt, durch y vorgestellt, so würde man, da der Differentialquotient dieser Function mit

x gleichmäßig wachsend angenommen ist, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = a + bx$, und aus derselben durch Integration, und nach Zufügung einer unbestimmten Constanten c, die Gleichung $y = c + ax + \frac{b}{2}x^2$ erhalten haben. Aus dieser allgemeinen für die abhängig Veränderliche gefundenen Function hätte man dann die Sätze, daß die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen gleiche Unterschiede haben, daß die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im quadratischen Verhältniß der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen wachsen, daß man eine Beschleunigung und Retardation des Wachsens und Abnehmens zu unterscheiden habe, und überhaupt alles über die gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen Gesagte in ziemlicher Kürze herleiten könne. Diejenigen, deren Ansprüche an die Methode schon befriedigt sind bei willkürlich vorgenommenen und ganz unmotivirten Combinationen und Umformungen von Formeln, deren Zweck und Bedeutung erst ersichtlich wird, wenn man am Resultat angelangt ist, und denen mit Formeln zu würfeln ein ebenso methodisches und wissenschaftliches Verfahren dünkt, als auf einem durch die Natur der Aufgabe überall vorgeschriebenen Weg begrifflicher Entwickelung vorzuschreiten, oder diejenigen, welche Ueberraschungen lieben, und eine Ehre suchen in den Künsten einer solchen Beweisart, die man elegant zu nennen pflegt, oder diejenigen endlich, denen der kürzeste Weg auch schlechtweg der beste ist, weil es ihnen nur auf die Menge der Resultate ankommt, und weil ihnen Wissenschaft nichts weiter ist als eine Sammlung von bewiesenen Sätzen, alle diese werden natürlich dem letzteren Weg unbedingt den Vorzug geben.

§. 109.

Ungleichförmige Beschleunigung des Wachsens.

Nachdem wir unsere Begriffe über gleichförmige Beschleunigung des Wachsens, über Eigenschaften und Arten sowie über Maßbestimmung derselben festgestellt haben, können wir zur Untersuchung und näheren Bestimmung der Veränderung der Stärke des Wachsens schreiten in den Fällen, in welchen diese Veränderung nicht mehr constant ist. Jede abhängig veränderliche Größe, deren fließender Zahlenwerth nicht durch eine Function der willkürlich Veränderlichen x von der Form $a+bx+cx^2$ ausgedrückt ist, wird nothwendig eine ungleichförmige Beschleunigung des Wachsens zeigen, weil, wie schon nachgewiesen, aus der Voraussetzung einer constanten Beschleunigung des Wachsens immer die Function $a+bx+cx^2$ als Werth der abhängig Veränderlichen folgt. Ist die abhängig Veränderliche durch eine von der Form $a+bx+cx^2$ abweichende Function ausgedrückt, so kann dieselbe auch nicht in der kleinsten denkbaren Strecke dieselbe unveränderte Beschleunigung des Wachsens zeigen. Denn wären für eine beliebig kleine Strecke mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden, so würden für beliebige innerhalb dieser Strecke gesetzte Veränderungen des x die Werthe der abhängig Veränderlichen richtig berechnet werden durch eine Function von der Form $a+bx+cx^2$, was der Voraussetzung, daß der Werth der abhängig Veränderlichen überall durch eine andere Function gegeben sein soll, widerspricht. Wenn nun die Beschleunigung des Wachsens auch nicht innerhalb der kleinsten angebbaren Strecke unverändert dieselbe bleiben kann, eine Beschleunigung des Wachsens aber doch jedenfalls vorhanden sein muß, sobald die Größen nicht gleichmäßig wachsend sind, so folgt, daß jede vorhandene bestimmte Größe der Beschleunigung keine Ausbreitung gewinnt über einen einzelnen Verflußpunkt

der willkürlich Veränderlichen hinaus, sondern rein momentan vorhanden ist, und daß die Beschleunigung des Wachsens stetig veränderlich ist.

Alles, was in dem ersten Theil unserer Wissenschaft von der Art und den Bedingungen des Vorhandenseins eines momentanen Zustandes und von der stetigen Veränderung gesagt worden ist, findet ohne Weiteres hier seine Anwendung, und unter durchgehender Voraussetzung der dort entwickelten Begriffszusammenhänge werden die Schlüsse, denen früher eine ausführlichere Begründung vorausgeschickt werden mußte, jetzt in der Kürze bündig aneinandergereiht werden können. Als Bedingung der Möglichkeit und Denkbarkeit eines momentanen Zustandes ist aufgestellt worden, daß derselbe nur als Verflußpunkt innerhalb einer stetigen Veränderung statthaben kann, wobei in dem Begriff des Stetigen dies zu urgiren ist, daß in demselben nach jedem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern die ganze Unendlichkeit aller denkbaren Zwischenstufen factisch durchlaufen worden ist. Bezogen auf die stetig veränderliche Beschleunigung des Wachsens wird daraus folgen, daß je kleiner man den Spielraum der Veränderung der willkürlich Veränderlichen setzt, desto geringer auch die innerhalb dieses Spielraums stattfindende Veränderung der Beschleunigung des Wachsens zu denken ist, und desto unbedeutender auch der Fehler wird, welcher daraus entsteht, daß man die Beschleunigung des Wachsens innerhalb dieses kleinen Spielraums constant annimmt. Nun kommt bei constanter Beschleunigung des Wachsens auf die Größe des Spielraums, innerhalb dessen man die willkürlich Veränderliche wachsend denkt, gar nichts an, vielmehr ist die Größe einer constanten Beschleunigung des Wachsens völlig bestimmt, wenn man nur den für zwei beliebig kleine gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen stattfindenden Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen kennt, indem dieser Unterschied dividirt durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen

das constante Maß der Beschleunigung liefert. Setzt man mithin in einer Function von x mit veränderlicher Beschleunigung des Wachsens zwei gleiche kleine Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen, und dividirt den Unterschied der zugehörigen Zunahmen der abhängig Veränderlichen durch das Quadrat der Zahl Δx, so wird, wenn man von der innerhalb der beiden Zunahmen Δx stattfindenden geringen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens absieht, und den gebildeten zweiten Differenzquotient als Maß einer constanten Beschleunigung des Wachsens gelten läßt, der aus dieser Annahme erwachsende Fehler um so geringer sein, je kleiner die Zahl Δx genommen wird, und man wird sich der wahren Größe der momentanen Beschleunigung des Wachsens, welche für denjenigen Werth des x, von welchem aus die Zunahmen Δx gesetzt sind, stattfindet, durch fortgesetzte Verkleinerung des Δx so annähern können, daß es keine feste Grenze dieser Annäherung gibt, oder daß der übrigbleibende Fehler jede beliebig kleine vorgeschriebene Zahl überschreitet. Indessen wird, so lange Δx noch irgend einen angebbaren Zahlenwerth behält, der aus dem zweiten Differenzquotienten entnommene Werth der Beschleunigung des Wachsens niemals vollkommen richtig sein, sondern er wird entweder immer zu groß ausfallen, wenn die Beschleunigung des Wachsens im Zunehmen begriffen ist, und die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer größer werden, oder er wird immer zu klein ausfallen, wenn die Beschleunigung des Wachsens im Abnehmen begriffen ist.

§. 110.

Berechnung der momentanen Beschleunigung des Wachsens.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, daß man, um aus dem zweiten Differenzquotienten einer Function von x den wahren Werth der momentanen Beschleunigung des Wachsens zu erhalten, die Zunahmen Δx nicht blos sehr stark, sondern ins Endlose verkleinern, d. h. sie annulliren

müßte. Und obgleich mit den Zunahmen der willkürlich Veränderlichen auch jede Zunahme der abhängig Veränderlichen, sowie der Unterschied solcher Zunahmen und überhaupt Alles, worauf die Vorstellung einer Beschleunigung des Wachsens sich gründen kann, verschwindet, so bildet doch dieser Umstand nach dem, was in dem ersten Theil über dasselbe Verhalten der veränderlichen Stärke des Wachsens gesagt worden ist, für uns keine Schwierigkeit mehr dar. Vielmehr wird daraus, daß der zweite Differenzquotient einer Function von x durch fortgesetzte Verkleinerung des Δx eine Annäherung ohne Grenze gestattet an den wahren Werth der momentanen Beschleunigung des Wachsens, und daraus, daß dieser zweite Differenzquotient sich einem festen Grenzwerth ohne Ende nähert, in welchen er mit Annullirung des Δx übergeht, folgen, daß dieser Grenzwerth zugleich die wahre Größe der momentanen Beschleunigung des Wachsens angibt. Die wirkliche Berechnung einer momentanen Beschleunigung des Wachsens bei gegebener Function von x hat demnach nicht die geringste Schwierigkeit. Will man, um sich die Sache erst im Einzelnen zu erläutern, die momentane Beschleunigung des Wachsens nur für einen bestimmten einzelnen Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen berechnen, so hat man nur für diesen bestimmten Zahlenwerth des x und eine unbestimmte durch Δx ausgedrückte Zunahme desselben den zweiten Differenzquotient aufzustellen, und zu sehen, in welchen bestimmten Zahlenwerth derselbe mit Annullirung des Δx übergeht, oder will man, worauf es natürlich in der Regel ankommt, einen allgemeinen für jeden beliebigen Werth x der willkürlich Veränderlichen geltenden Ausdruck, d. h. eine Function von x haben, welche die momentane Beschleunigung des Wachsens allgemein angibt, so braucht man nur den zweiten Differenzquotient für ein unbestimmt gelassenes x und ein unbestimmtes Δx aufzustellen, und zu sehen, in welche Function von x derselbe mit Annullirung des Δx übergeht.

Soll die Bedeutung, welche der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten für das Wachsen der beiden Veränderlichen hat, ausgesprochen werden, so ist klar, daß der Zahlenwerth, in welchen derselbe für ein bestimmtes x übergeht, in dem Sinne zu nehmen ist, in welchem überhaupt eine bestimmte Zahl eine Beschleunigung des Wachsens ausdrücken kann, nämlich als Ausdruck einer constanten Beschleunigung des Wachsens. Da nun bei constanter Beschleunigung des Wachsens der zweite Differenzquotient angibt, wie groß die Unterschiede der abhängig Veränderlichen sind, wenn die willkürlich Veränderliche mehrere mal um die Zahl 1 wächst, so wird, wenn bei veränderlicher Beschleunigung des Wachsens der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten bei bestimmtem x gleich der Zahl a gefunden wird, dies heißen: Die momentane Beschleunigung des Wachsens ist bei diesem bestimmten Werth des x so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe oder zur Ausführung käme, die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von 1 verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen den Unterschied a zeigen würden.

Wir wollen das Vorhergehende durch das Beispiel einer bestimmten Function erläutern. Die Function sei $\frac{1}{4}x^3$. Geben wir der willkürlich Veränderlichen die drei Werthe x, $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$, so sind die drei zugehörigen Werthe der Function $\frac{1}{4}x^3$, $\frac{1}{4}(x+\Delta x)^3$ und $\frac{1}{4}(x+2\Delta x)^3$, oder nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirungen, $\frac{1}{4}x^3$, $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2\Delta x+\frac{3}{4}x(\Delta x)^2+\frac{1}{4}(\Delta x)^3$, und $\frac{1}{4}x^3+\frac{6}{4}x^2\Delta x+\frac{12}{4}x(\Delta x)^2+\frac{8}{4}(\Delta x)^3$. Ziehen wir den ersten Werth der Function von dem zweiten, und den zweiten von dem dritten ab, so erhalten wir die Reste $\frac{3}{4}x^2\Delta x+\frac{3}{4}x(\Delta x)^2+\frac{1}{4}(\Delta x)^3$ und $\frac{3}{4}x^2\Delta x$

$+\frac{9}{4}x(\Delta x)^2+\frac{7}{4}(\Delta x)^3$, und in denselben die beiden Zunahmen der Function, die mit den zwei gleichen Zunahmen Δx verbunden sind. Der Unterschied dieser Zunahmen ist $\frac{3}{2}x(\Delta x)^2+\frac{3}{2}(\Delta x)^3$. Wird derselbe durch $(\Delta x)^2$ dividirt, so stellt der Ausdruck $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Delta x$ den zweiten Differenzquotient der Function $\frac{1}{4}x^3$ dar, was wir durch die analytische Gleichung $\frac{\Delta\Delta\frac{1}{4}x^3}{(\Delta x)^2}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\Delta x$ ausdrücken können. Der Grenzwerth dieses zweiten Differenzquotienten für ein endlos verkleinertes Δx ist $\frac{3}{2}x$, und durch diese Function ist allgemein die momentane Beschleunigung des Wachsens der Veränderlichen $\frac{1}{4}x^3$ dargestellt. An der Stelle z. B., wo x den Zahlenwerth 1 hat, ist die momentane Beschleunigung des Wachsens gleich $\frac{3}{2}$, d. h. sie ist so groß als eine constante Beschleunigung, in welcher jede folgende Zunahme der abhängig Veränderlichen um $\frac{3}{2}$ größer ist als die vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Hat x den Werth -1, so nimmt die Function $\frac{3}{2}x$ den Werth $-\frac{3}{2}$ an, und ein solcher negativer zweiter Differenzquotient bedeutet dem Obigen (§. 104) zu Folge, daß die Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um $\frac{3}{2}$ kleiner, oder die Abnahmen, d. h. die negativen Zunahmen um $\frac{3}{2}$ größer werden, wenn die willkür-

lich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Da übrigens der erste Differentialquotient der Function $\frac{1}{4}x^3$ gleich $\frac{3}{4}x^2$ ist, und derselbe für alle Werthe von x einen positiven Werth hat, so sind die Zunahmen der Function $\frac{1}{4}x^3$ für alle Werthe von x positiv, oder die Function ist immer im Wachsen begriffen. Der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten dieser Function wird also, je nachdem er negativ oder positiv ist, nur eine Retardation des Wachsens oder eine Beschleunigung des Wachsens andeuten. Wollte man sich den Fluß der Werthe der Function $\frac{1}{4}x^3$ versinnlichen etwa durch die Parallelcoordinaten einer Curve, so sei ab (Fig. 56) die Abscisse x, c der Nullpunkt derselben und die Länge cd gleich + 1. Alsdann stellen die Ordinaten der Curve fgchi die successiven Werthe der Function dar. Die Ordinaten dieser Curve verändern sich überall nur durch Zusatz von positiven Theilen, indem die negativen Ordinaten immer kleiner und die positiven immer größer werden. Die Zunahmen sind also durchaus positiv, und werden für alle negativen Werthe von x, d. h. für alle zwischen a und c fallenden Punkte immer kleiner, und es findet innerhalb dieses Spielraumes eine Retardation des Wachsens statt, für alle innerhalb c und b fallenden positiven Werthe von x hingegen werden die Zunahmen immer größer, und es findet also eine Beschleunigung des Wachsens statt.

§. 111.

Bezeichnung des Grenzwerthes des zweiten Differenzquotienten.

Für den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten bedürfen wir einer besonderen Bezeichnung, theils um durch eine Gleichung auszudrücken, daß eine bestimmte Function der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten einer andern

bestimmten Function ist, wie in den zur Aufstellung von Differentiationsregeln dienenden analytischen Differentialgleichungen, oder daß eine gegebene Function als der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten einer unbekannten Function betrachtet werden soll, theils um anzudeuten, daß man sich überhaupt nur den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten einer unbestimmten Function denken soll. Man könnte dies nun, wie es auch in andern Fällen bei Grenzwerthen von Functionen üblich ist, durch Vorsetzung des Wortes Limes bezeichnen, und z. B. aus der oben gefundenen analytischen Differenzengleichung $\frac{\Delta\Delta\frac{1}{4}x^3}{(\Delta x)^2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\Delta x$ die analytische Gleichung $\text{Lim}\ \frac{\Delta\Delta\frac{1}{4}x^3}{(\Delta x)^2} = \frac{3}{2}x$ bilden, und ebenso bei einer unbekannten oder unbestimmten durch y ausgedrückten Function den Grenzwerth ihres zweiten Differenzquotienten durch $\text{Lim}\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ bezeichnen. Man hat aber vorgezogen, die für den Grenzwerth des ersten Differenzquotienten eingeführte Bezeichnung auch auf die folgenden Differenzquotienten auszudehnen. Und so wie man beim ersten Differenzquotienten statt $\text{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Form $\frac{dy}{dx}$ setzt, so auch hier statt $\text{Lim}\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ die Form $\frac{ddy}{(dx)^2}$, welche man aus Gründen, die oben (§. 102) schon angegeben sind, in die Form $\frac{d^2y}{dx^2}$ umändert. Die vorstehende analytische Grenzgleichung für die Function $\frac{1}{4}x^3$ würde demnach zu schreiben sein $\frac{d^2\frac{1}{4}x^3}{dx^2} = \frac{3}{2}x$. Entsprechend dieser Bezeichnung

hat man auch die für den Grenzwerth des ersten Differenzquotienten eingeführte Benennung auf den zweiten übertragen, und nennt den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten den zweiten Differentialquotient.

Hier zeigt sich nun, daß die Bezeichnung $\frac{ddy}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten keine so willkürliche und inhaltleere ist, wie es oben (§. 102) scheinen mochte, indem dieselbe, abgesehen davon, daß sie durch die Entstehung des zweiten Differentialquotienten aus dem zweiten Differenzquotienten $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ fast von selbst gegeben ist, mit derjenigen Bedeutung des zweiten Differentialquotienten, vermöge welcher er eine Beschleunigung des Wachsens der Größen y und x angibt, auf das innigste verknüpft ist. Denn die beiden d im Zähler zeigen an, daß es auf die Zunahme der Zunahme oder auf den Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen ankommt bei Bestimmung der Beschleunigung des Wachsens, und das Quadrat von dx im Nenner zeigt an, daß der Unterschied der Zunahmen nur in sofern ein bestimmtes Maß der Beschleunigung des Wachsens abgeben kann, als er mit dem Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen verglichen wird.

Die Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat auch den Vortheil, daß sie nicht, wie die Bezeichnung $f''(x)$ des zweiten Differentialquotienten einer Function $f(x)$ ein untrennbares Zeichen ist, sondern daß man Zähler und Nenner in derselben trennen, und mit beiden als mit beliebigen Zahlen rechnen kann, in ähnlicher Weise, wie beim ersten Differentialquotienten die isolirten Differentiale als beliebige Zahlen behandelt werden. In Bezug auf Zunahmen der Größen x und y hat freilich der Werth der Function, welche dem Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleichgesetzt wird, nur eine durch Annäherung auszusprechende Bedeutung, indem man nur sagen

kann, je kleiner die Zunahmen dx von x genommen werden, desto näher trifft der Unterschied der Zunahmen von y dividirt durch das Quadrat von dx mit dem Werth des zweiten Differentialquotienten zusammen. Für alle von Null verschiedene Werthe des dx ist dieser Quotient nur der zweite Differenzquotient, und für ein annullirtes dx und folglich auch annullirtes d^2y wird die Rechnung mit Nullen eine unhaltbare und durch keine künstlichen Drehungen zu rechtfertigende Vorstellung. Aber man braucht sich nur die Bedeutung der durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ ausgedrückten Function von x zu vergegenwärtigen, um sich zu überzeugen, daß es gestattet ist, unter dx und d^2y endliche Zahlen zu denken. Denn die Function $\frac{d^2y}{dx^2}$ von x bezeichnet für jeden einzelnen Werth des x eine bestimmte Beschleunigung des Wachsens, welche ihrer Größe nach nicht anders gedacht und ausgesprochen werden kann als durch die bestimmenden Elemente einer constanten Beschleunigung. Wird also die Form $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Ausdruck einer constanten Beschleunigung des Wachsens genommen, so wird, wenn man unter dx eine beliebige Zahl denkt, unter d^2y zu denken sein der Unterschied, den die mit den Zunahmen dx verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen haben würden, wenn die Beschleunigung des Wachsens unverändert bliebe, d. h. d^2y stellt den Unterschied der Zunahmen einer Größe vor, in welcher diejenige Beschleunigung des Wachsens constant ist, welche für y nur momentan vorhanden ist, und welche Größe für jeden andern Werth von x auch eine andere ist. Es verhält sich hier Alles so wie bei den als selbständige Größen behandelten ersten Differentialen. Denn wenn z. B. x und y Parallelcoordinaten eine krumme Linie bedeuten, so ist, wenn man an einen Curvenpunkt eine Tangente zieht, die Zunahme der Ordinate der Tangente dividirt durch die zugehörige Zunahme der Abscisse gleich dem

Werth, den die Function $\frac{dy}{dx}$ für dieſen Curvenpunkt hat. Was hindert mich alſo, dx und dy als zuſammengehörige Zunahmen der Coordinaten der jedesmaligen Tangente und als endliche Zahlen zu betrachten; und folglich dy als die Zunahme einer Größe, in welcher diejenige Stärke des Wachſens conſtant iſt, welche für y ſelbſt nur momentan vorhanden iſt. Und daſſelbe war es, was über die Bedeutung von d^2y geſagt iſt, in ſofern es als ſelbſtändige Größe und als endliche Zahl betrachtet werden ſoll. Wenn man nun aus einer Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2$ durch Multiplication mit dx^2 die Gleichung $d^2y=3x^2dx^2$ mit iſolirten Differentialen bildet, ſo nennt man d^2y das zweite Differential der Function y, und überhaupt den mit dx^2 multiplicirten zweiten Differentialquotient einer Function von x das zweite Differential dieſer Function. Das iſolirte zweite Differential einer abhängig Veränderlichen iſt alſo bei beſtimmtem übrigens beliebigem Werthe von dx eine nur von x abhängige endliche Größe, oder eine Function von x, und hat mit dem Unendlichkleinen, durch welches nur unſichere und nebuloſe Vorſtellungen hineingebracht werden, gar nichts zu ſchaffen; vielmehr läßt ſich ſein Werth ſehr beſtimmt und handgreiflich ausſprechen, wenn man ſagt: So groß als der mit dem Quadrat der beliebigen Zahl dx multiplicirte zweite Differentialquotient iſt, ſo groß würden die Unterſchiede der mit den Zunahmen dx verbundenen Zunahmen der abhängig Veränderlichen ſein, wenn die vorhandene momentane Beſchleunigung des Wachſens unverändert bliebe. Man könnte auch, wie es beim Ausſprechen einer Beſchleunigung des Wachſens durchaus geſchieht, dem dx immer den Zahlenwerth 1 beilegen, und dann würde das zweite Differential einer abhängig Veränderlichen ſchlechtweg dem zweiten Differentialquotient derſelben gleich ſein, und die obige Gleichung geſchrieben werden $d^2y=3x^2$. Es würde dadurch an der ganzen Sache

nichts geändert. Indem man aber $d^2y = 3x^2dx^2$ schreibt, erhält man dem d^2y seine für jeden Werth von dx geltende Allgemeinheit, weil bei jeder constanten Beschleunigung des Wachsens die Zunahme der abhängig Veränderlichen im quadratischen Verhältniß der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu- und abnimmt.

§. 112.

Herleitung des zweiten Differentialquotienten einer Function.

Das operative Verfahren, welches bisher zur Herleitung und Darstellung des zweiten Differentialquotienten einer Function angewendet worden ist, und darin bestand, den zweiten Differenzquotienten dieser Function aufzustellen, und in demselben durch Annullirung des Δx zum Grenzwerth überzugehen, ist allerdings durch den Zweck dieser Operation, die Beschleunigung des Wachsens zu finden, als das nächste und natürlichste gegeben, und schließt sich der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten am einfachsten an. Indessen würde es, wie leicht zu sehen, mühsam und weitläufig sein, auf diesem Wege den zweiten Differentialquotient beliebiger Functionen herzuleiten, und wenn es kein anderes Verfahren gäbe, so müßte man, um in der Anwendung der Differentialrechnung nicht überall durch weitläufige Rechnungsoperationen aufgehalten zu werden, einen neuen Theil der operativen Differentialrechnung ausbilden, welcher zum Zwecke hätte, die Resultate dieser Operation für die Fundamentalfunctionen und die Hauptarten ihrer arithmetischen Zusammensetzung in kurzen Differentiationsregeln aufzustellen, in ähnlicher Weise, wie wir beim ersten Differentialquotient für die Fundamentalfunctionen und die Hauptarten ihrer Zusammensetzung kurze Differentiationsregeln aufgestellt haben, durch welche wir dann der weitläufigen Bildung des ersten Differenzquotienten und des Uebergangs zum Grenzwerth desselben ein- für allemal überhoben werden. Aber wir bedürfen eines solchen neuen Theiles der operativen Differentialrechnung nicht, weil die

für die Bildung des ersten Differentialquotienten aufgestellten Regeln zur Bildung des zweiten Differentialquotienten völlig hinreichen, und eine wiederholte Anwendung dieser Regeln schon zum Ziele führt.

Um dies nachzuweisen, brauchen wir nur zuerst zu zeigen, daß der Unterschied der Zunahmen einer Function dividirt durch das Quadrat der Zunahme der willkürlich Veränderlichen, was wir bisher den zweiten Differenzquotient genannt haben, auch erhalten wird, wenn man den Differenzquotient von dem Differenzquotienten dieser Function nimmt, oder daß für eine durch y vorgestellte Function von x diejenige Folge von Operationen, welche durch die Form $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ angedeutet wird, dasselbe Resultat liefert als diejenige Folge von Operationen, welche in der Form $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ angedeutet ist. Die Nachweisung der Einerleiheit dieser Ausdrücke wird gegeben sein, wenn gezeigt ist, daß die an einer Function $f(x)$ dargestellte schematische Ausführung dieser Ausdrücke auf dieselbe Form hinausläuft. Bilden wir also zuerst nach dem früher angewendeten Verfahren den Unterschied der Zunahmen der Function $f(x)$. Wir geben zu diesem Zweck der willkürlich Veränderlichen die drei Werthe x, $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$. Die zugehörigen Werthe der Function sind $f(x)$, $f(x+\Delta x)$ und $f(x+2\Delta x)$. Durch Abziehung des ersten Werthes der Function von dem zweiten, und des zweiten von dem dritten erhalten wir $f(x+\Delta x)-f(x)$ und $f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)$ als die Zunahmen der Function, und durch Abziehung der ersten Zunahme von der zweiten in dem Ausdruck

$$f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)-[f(x+\Delta x)-f(x)]$$

oder nach ausgeführter Subtraction in dem Ausdruck

$$f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$$

den Unterschied der Zunahmen der Function. Wird dieser

Unterschied der Zunahmen durch $(\Delta x)^2$ dividirt, so gibt uns der Ausdruck

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

das ausgeführte allgemeine Schema des zweiten Differenzquotienten in der Bedeutung, wie wir denselben bisher abgeleitet und gebraucht haben, oder es ist, in Form einer Gleichung ausgedrückt,

$$\frac{\Delta\Delta f(x)}{(\Delta x)^2} = \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

Das Schema des ersten Differenzquotienten der Function $f(x)$ ist bekanntlich $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Wird von dieser Function von Neuem der Differenzquotient genommen nach der bekannten Regel, indem man $x+\Delta x$ statt x in die Function setzt, und von dem so erhaltenen Werth der Function den früheren Werth derselben abzieht und schließlich durch Δx dividirt, so erhalten wir in dem Ausdruck

$$\frac{\frac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

oder nach Ausführung der Subtraction im Zähler und mit einfachem Nenner geschrieben in dem Ausdruck

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

das allgemeine Schema des Differenzquotienten von dem Differenzquotienten der Function $f(x)$, oder es ist, in Form einer Gleichung ausgedrückt,

$$\frac{\Delta\left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x} = \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

Wir sehen also, daß man durch die in den Ausdrücken

$$\frac{\Delta\Delta f(x)}{(\Delta x)^2} \text{ und } \frac{\Delta\left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x}$$

angedeutete verschiedene Folge

von Operationen auf dieſelbe Function von x geführet wird. Folglich fällt auch der durch Annullirung von Δx hervorgehende Grenzwerth des Ausdrucks $\frac{\Delta\Delta y}{(\Delta x)^2}$ mit dem des Ausdrucks $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ zuſammen. Es iſt aber offenbar einerlei, ob man erſt den zweiten Differenzquotient einer Function y in der Form $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ vollſtändig entwickelt, und dann durch Annullirung des Δx zum Grenzwerth übergeht, oder ob man zuerſt blos den erſten Differenzquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ darſtellt, und zu $\frac{dy}{dx}$ oder dem Grenzwerth deſſelben übergeht, und dann den durch $\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\Delta x}$ auszudrückenden erſten Differenzquotient der Function $\frac{dy}{dx}$ entwickelt, und von Neuem zu dem durch $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ zu bezeichnenden Grenzwerth deſſelben übergeht. Aus der Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ iſt erſichtlich, daß man kurzweg durch Bildung des Differentialquotienten vom Differentialquotienten den Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten oder den zweiten Differentialquotient erhält, und daß mithin die bekannten Regeln zur Bildung des erſten Differentialquotienten auch zur Bildung des zweiten hinreichen. Hierdurch wird die Operation ſehr abgekürzt und vereinfacht, und anſtatt alſo in der oben angegebenen weitläuftigen Weiſe für die Function $\frac{1}{4}x^3$ erſt die Zunahmen der

Function, dann den Unterschied dieser Zunahmen zu berechnen, und nach Division mit $(\Delta x)^2$ zum Grenzwerth überzugehen, welcher gleich $\frac{3}{2}x$ gefunden wurde, konnte man ganz kurz zu demselben Resultate kommen, wenn man sagte, der Differentialquotient von $\frac{1}{4}x^3$ ist $\frac{3}{4}x^2$, und der von $\frac{3}{4}x^2$ ist $\frac{3}{2}x$.

Weil man nun zur wirklichen Herleitung des zweiten Differentialquotienten einer Function von demselben nichts weiter zu wissen braucht, als daß er der Differentialquotient von dem Differentialquotienten dieser Function ist, so ist es begreiflich, daß man die ganze Lehre vom zweiten Differentialquotienten auf die aus der Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ zu entnehmende Definition und auf die in derselben Form unmittelbar ausgesprochene Bedeutung desselben kann zusammenschrumpfen lassen, wenn man nur die operativen Handarbeiten zur Darstellung der Formeln und Functionen als das Wesentliche im Auge hat. Die Bezeichnung $\frac{d^2g}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten erscheint dann als eine inhaltleere und überflüssige Zugabe, überflüssig wenigstens in sofern, als man außerdem im Besitz einer kurzen willkürlichen Bezeichnung wie $f''(x)$ ist, die sich bequem auf höhere Ordnungen ausdehnen läßt, was bei der Bezeichnung $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ nicht der Fall ist. In den beiden Bezeichnungen $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten ist aber vielmehr eine Hinweisung enthalten auf die beiden Bedeutungen desselben, vermöge welcher der zweite Differentialquotient erstens die Beschleunigung des Wachsens der Größen y und x angibt, was durch die

Form $\frac{d^2y}{dx^2}$ angedeutet ist, und zweitens die verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Größen $\frac{dy}{dx}$ und x ausdrückt, worauf die Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ hinweist. Von diesen beiden Bedeutungen des zweiten Differentialquotienten macht man überall nach Belieben, wie es das Bedürfniß und die Natur einer Aufgabe mit sich bringt, Gebrauch.

§. 113.

Constructive Ausführung der moment. Beschleunigung d. Wachsens.

Durch die in dem Vorhergehenden enthaltene Erklärung der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten wird die Größe der constanten Beschleunigung des Wachsens, welche bei einer ungleichförmig beschleunigt wachsenden Größe momentan eintritt, zunächst nur arithmetisch durch den Zahlenwerth des Unterschiedes der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gegeben. Alle Begriffe jedoch, welche die stetige Veränderung der Stärke des Wachsens betreffen, haben, wie in dem ersten Theile unserer Wissenschaft (§. 31) bereits nachgewiesen, ihre wahre objective Realität nur in den wachsenden continuirlichen Größen. Und wenn man einer Function von x eine momentane Beschleunigung des Wachsens beilegt, so thut man dies doch nur in sofern, als man sich die Zahl x stetig wachsend denkt. Unter einer stetig wachsenden Zahl ist aber in der That nichts weiter als ein wachsendes Continuum, nur statt eines bestimmten ein Continuum in abstracto gedacht, wenn überhaupt der Unterschied von discreten und continuirlichen Größen, wie er es denn ist, ein wahrer und wesentlicher ist, und darauf beruht, daß beim Wachsen des Continuums alle zwischen zwei Größenzuständen denkbaren unendlich vielen Mittelstufen der Größe factisch durchlaufen werden, beim Wachsen der Zahlen aber, durch wie kleine Theile auch stattfin-

bend, immer unendlich viele Zwischenstufen der Größe nothwendig übersprungen werden müssen, indem das Zählen als ein Denkact die Unendlichkeit nicht erschöpfen kann, welche in dem Wachsen des Continuums als einem Anschauungsact real vorhanden ist. Sowie die Vorstellung einer momentanen Stärke des Wachsens erst sinn- und lebenvoll wird durch die Anschauung derselben in wachsenden Continuis, so verhält es sich auch mit der Vorstellung der momentanen Beschleunigung des Wachsens. Wenn z. B. das Verhältniß, welchem sich die Zunahmen der Ordinaten einer Curve in einem bestimmten Curvenpunkt mit Verkleinerung dieser Zunahmen ohne Ende nähern, oder mit welchem sie verschwinden, dadurch, daß es in den Zunahmen der Ordinaten der Tangente dieses Curvenpunktes zur Ausführung kommt, sinnlich anschaulich wird trotz des angenommenen Verschwindens der Zunahmen, und man in den Ordinaten der Tangente sieht, wie die Ordinaten der Curve verlaufen würden, wenn die momentane Stärke des Wachsens sich realisirte, so kann man auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten einer Curve zur Anschauung bringen, wenn man an den Ordinaten einer andern Linie zeigt, wie diese Ordinaten der Curve verlaufen würden, wenn die momentane Beschleunigung sich realisirte. Diese Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens, welche an allen beliebigen veränderlich gesetzten räumlichen Elementen ausgeführt werden kann, trägt nicht wenig bei zur Aufhellung und Befestigung unserer Begriffe von den höheren Graden der Stärke des Wachsens.

Nehmen wir z. B. die Curve fgchi (Fig. 56), welche nach der Gleichung $y = \frac{1}{4} x^3$ construirt ist, wobei der Nullpunkt der Abscisse im Punkte c und die Linie cd gleich 1 gesetzt ist. Der zweite Differentialquotient der Function $\frac{1}{4} x^3$ ist gleich $\frac{3}{2} x$, und folglich ist im Punkte h z. B.,

für welchen x den Zahlenwerth 1 hat, die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten gleich $\frac{3}{2}$. Es wird gefragt, wie die Curve vom Punkte h aus verlaufen würde, wenn die in diesem Punkte vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten zur Ausführung käme. Eine constante Beschleunigung des Wachsens der Parallelcoordinaten findet sich nur in den Ordinaten der gemeinen Parabel bei einer gewissen Lage der Ordinatenaxe, wie oben (§. 108) schon gezeigt worden. Es fragt sich also nur, wie construirt man diejenige Parabel, welche im Punkte h mit der Curve zusammentrifft, und welche mit derselben außer der Stärke des Wachsens der Coordinaten auch die Beschleunigung des Wachsens derselben gemeinschaftlich hat. Wir haben die Gleichung der Parabel, bezogen auf dieselbe Abscisse und auf denselben Anfangspunkt der Abscisse, aufzusuchen. Die gesuchte Gleichung wird die Form $y = a + bx + cx^2$ haben, und es sind die unbestimmten Coefficienten a, b und c zu bestimmen. Dies ist leicht zu bewerkstelligen, weil wir drei Bedingungsgleichungen aufstellen können, in welchen außer a, b und c keine Unbekannten vorkommen. Es soll nämlich erstens für den Punkt h oder den Zahlenwerth 1 der Abscisse die Ordinate der Parabel dieselbe Größe haben wie die Ordinate dh der Curve, und da für $x = 1$ die Ordinate der Parabel gleich $a + b + c$, und die der gegebenen Curve gleich $\frac{1}{4}$ ist gemäß der Function $\frac{1}{4}x^3$, so erhalten wir als erste Gleichung

$$a + b + c = \frac{1}{4}.$$

Es sollen ferner beide Curven im Punkte h eine gemeinschaftliche Stärke des Wachsens ihrer Coordinaten haben, d. h. es soll der erste Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$ so groß sein als der erste Differentialquotient

der Function $\frac{1}{4}x^3$, wenn in beiden 1 statt x gesetzt wird. Die Differentialquotienten der beiden Functionen, nämlich $b+2cx$ und $\frac{3}{4}x^2$, geben uns also die zweite Bedingungsgleichung

$$b+2c=\frac{3}{4}.$$

Endlich muß, da die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Parabel mit der der gegebenen Curve im Punkte h zusammenfallen soll, 2c als der zweite Differentialquotient der Function $a+bx+cx^2$ gleich dem zweiten Differentialquotienten der Function $\frac{1}{4}x^3$ oder gleich $\frac{3}{2}x$ sein, wenn man 1 statt x setzt. Es ist also drittens

$$2c=\frac{3}{2} \text{ oder } c=\frac{3}{4}.$$

Gehen wir mit diesem Werth von c in die zweite Gleichung zurück, so erhalten wir $b+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$ oder $b=-\frac{3}{4}$. Werden schließlich diese für b und c gefundenen Werthe in die erste Gleichung gesetzt, so erhalten wir $a-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ oder $a=\frac{1}{4}$. Die vorausgesetzte unbestimmte Gleichung der Parabel, $y=a+bx+ex^2$ nimmt also unter den gegebenen Bedingungen die bestimmte Form $y=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}x^2$ an. Legen wir einige Punkte der Parabel fest. In den Punkten e, k, d, l, e, wo die Abscisse der Reihe nach die Zahlenwerthe 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$ hat, erhält man als Werthe der Ordinaten der Parabel die Zahlen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{7}{4}$, und dadurch die Parabel mnhop. Fragte

man alſo, wie würde die Curve fgchi vom Punkte h aus verlaufen, wenn nur die momentane Stärke des Wachſens ihrer Coordinaten zur Ausführung käme, ſo iſt die Antwort, in derjenigen geraden Linie, für deren Ordinaten dieſe Stärke des Wachſens conſtant iſt, d. h. in der Tangente hq des Punktes h. Fragt man aber, wie würde die Curve vom Punkt h aus verlaufen, wenn bei der in dieſem Punkt vorhandenen Stärke des Wachſens ihrer Ordinaten die daſelbſt vorhandene Beſchleunigung des Wachſens ihrer Ordinaten zur Ausführung käme, ſo iſt die Antwort, in derjenigen Linie, für deren Ordinaten dieſe Beſchleunigung des Wachſens conſtant iſt, d. h. in der Parabel mnhop.

Durch dieſe Conſtruction der momentanen Beſchleunigung des Wachſens wird das, was früher (§. 110) über die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten, ſowie das, was (§. 111) über die Bedeutung des iſolirten zweiten Differentials geſagt worden iſt, vollkommen augenfällig und kann zugleich auf faßlichere und concretere Weiſe ausgedrückt werden. Wenn wir die §. 110 gegebene allgemeine Erklärung der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten auf die Ordinate y einer beliebigen Curve übertragen, ſo ſtellt der zweite Differentialquotient der Function y nichts weiter vor als die Unterſchiede der Zunahmen der Ordinaten der jedesmaligen Parabel bei Zunahmen der Abſciſſe $= 1$. Und wenn §. 111 von dem iſolirten und folglich als endliche Zahl betrachteten zweiten Differential d^2y geſagt wurde, daß es nicht Unterſchiede der Zunahmen von y, ſondern den Unterſchied der mit den beliebigen Zunahmen dx verbundenen Zunahmen einer Größe angebe, in welcher diejenige Beſchleunigung des Wachſens conſtant iſt, die für y ſelbſt momentan vorhanden iſt, ſo können wir jetzt, wo wir für den Fall, daß y eine Ordinate iſt, jene Größe mit conſtanter Beſchleunigung des Wachſens kennen, kurzweg ſagen, das zweite Differential d^2y einer Ordinate y ſtellt nicht den Unterſchied der Zunahmen von y ſelbſt,

sondern den Unterschied der mit den beliebigen Zunahmen dx der Abscisse verbundenen Zunahmen der Ordinaten einer Parabel vor.

Die Parabel schließt sich dem Lauf der gegebenen Curve in der Nähe des Punktes h nothwendig viel enger an als die Tangente hq dieses Punktes, weil bei der Tangente nur die Zunahme ihrer Ordinate um so näher mit der Zunahme der Ordinate der Curve zusammenfällt, je kleiner die Zunahme der Abscisse gesetzt wird, bei der Parabel aber auch der Unterschied der Zunahmen ihrer Ordinaten um so näher mit dem Unterschied der Zunahmen der Ordinaten der Curve zusammenfällt, je kleiner die Zunahmen der Abscisse gesetzt werden. Es läßt sich sogar beweisen, daß man durch Annäherung an den Punkt h zu Curvenpunkten gelangen kann, deren Entfernung von der Parabel beliebig vielmal kleiner ist als ihre Entfernung von der Tangente, beide Entfernungen in der Richtung der Ordinaten gemessen. (Dieser Beweis soll später im umfassenderen Zusammenhang mit den höheren Differentialquotienten berührt werden.) Nichts desto weniger hat die Parabel so gut wie die Tangente mit der gegebenen Curve an der Berührungsstelle nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich, was erstens daraus folgt, daß die Ordinaten beider krummen Linien durch verschiedene Functionen der Abscisse gegeben sind, und zweitens auch daraus ersichtlich ist, daß die Beschleunigung des Wachsens, welche für die Ordinaten der Parabel constant ist, für die Ordinaten der andern Curve stetig veränderlich ist, und mithin die Letzteren innerhalb jeder beliebig kleinen über den Berührungspunkt hinausgehenden Strecke ein anderes Gesetz des Wachsens haben, und folglich auch eine andere Größe erreichen müssen. Man sagt von zwei Linien, welche im Punkte ihres Zusammentreffens außer der Stärke des Wachsens auch die Beschleunigung des Wachsens ihrer Coordinaten gemeinschaftlich haben, oder welche den ersten und zweiten Differentialquotienten ihrer Ordinaten gleich haben, daß sie sich im zweiten

Grade berühren, während man die Berührung zweier Linien, welche nur den ersten Differentialquotient ihrer Ordinaten gleich haben, eine Berührung im ersten Grade nennt. Es versteht sich, daß zur Berührung im zweiten oder im ersten Grade nicht erfordert wird, daß der zweite oder erste Differentialquotient der Ordinaten der Einen Linie constant ist, wie es hier bei der Parabel und bei der Tangente der Fall ist.

Auf dieselbe Weise, wie für den Punkt h der Curve fgchi Fig. 56 die momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten construirt worden ist, kann es für jeden andern Punkt geschehen. Die berührende Parabel hat in jedem Punkt einen andern der jedesmaligen Beschleunigung des Wachsens angemessenen und von derselben allein abhängigen Parameter. Verlangt man nur die Größe dieses Parameters zu wissen, so muß man sich erinnern, daß in der Gleichung $y = a + bx + cx^2$ der Parabel der Coefficient c mit dem Parameter p der Parabel so zusammenhängt, daß $p = \frac{1}{c}$ ist. Da nun 2c, als der zweite Differentialquotient der Function $a + bx + cx^2$, die constante Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Parabel und folglich auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Curve in dem von der Parabel berührten Punkte ausdrückt, so ist ersichtlich, daß man den für einen Curvenpunkt berechneten zweiten Differentialquotient der Ordinaten nur zur Hälfte zu nehmen und damit in 1 zu dividiren braucht, um den Parameter der diesen Punkt berührenden Parabel zu erhalten. Im Punkt i z. B. unserer Curve, wo x den Zahlenwerth 2 hat, nimmt der zweite Differentialquotient $\frac{3}{2}x$ den Zahlenwerth 3 an, und es ist demnach der Parameter der im Punkt i im zweiten Grad berührenden Parabel gleich $\frac{2}{3}$. Je kleiner die Abscisse x und folglich auch der zweite Differentialquo-

tient $\frac{3}{2}x$ wird, desto größer wird der Parameter der berührenden Parabel, und derselbe durchläuft bis zum Punkte c alle beliebig großen Zahlenwerthe. Im Punkte c selbst, wo x und folglich auch $\frac{3}{2}x$ gleich Null ist, wird der Parameter unendlich, und die berührende Parabel wird eine gerade Linie und fällt in diesem Falle mit der Linie ab, welche zugleich Tangente im Punkte c ist, zusammen. Im Punkte c wird also die krumme Linie von der geraden ab im ersten und zugleich im zweiten Grade berührt, was begreiflicherweise nur bei solchen Curvenpunkten stattfinden kann, in welchen die Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten der Curve gleich Null ist, weil dieselbe für die Ordinaten der geraden Linie immer und überall gleich Null ist. Hierbei ist übrigens der Fall, in welchem der erste und zweite Differentialquotient der Coordinaten der Curve unendlich ist, vorläufig außer Acht gelassen ist.

Man sieht leicht, daß, wie auch der Lauf einer Curve von einem bestimmten Punkt aus sein mag, es immer möglich ist, eine im zweiten Grad berührende Parabel durch denselben Punkt gehen zu lassen, durch deren Ordinaten die vorhandene Beschleunigung oder Retardation des Wachsens sowie des Abnehmens der Ordinaten der Curve zur Anschauung gebracht wird. Wir wollen diese Construction noch ausführen für einen Fall, in welchem eine Retardation des Wachsens der Ordinaten stattfindet. In dem Viertelkreis acm Fig. 57 werden die Zunahmen der Ordinaten immer kleiner, wenn man die Abscisse ac vom Punkte a aus wachsend denkt. Setzen wir den Halbmesser $ac = 1$ und in a den Nullpunkt der Abscisse, so ist die Gleichung für die senkrechten Parallelcoordinaten des Kreises bekanntlich $y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Im Punkte b habe x den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ und es soll die Gleichung der Parabel aufgestellt werden, welche den Kreis in dem zugehörigen Curvenpunkte d im

zweiten Grade berührt. Der erste Differentialquotient der Function $(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1-x}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, und der zweite ist $\frac{-1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Die unbestimmte Gleichung der Parabel, auf dieselbe Abscisse ac und denselben Anfangspunkt a bezogen, sei $y=a+bx+cx^2$, und es sind die Zahlen a, b und c zu bestimmen. Nun soll erstens die Function $a+bx+cx^2$ gleich sein der Function $(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$, wenn in beiden $\frac{1}{2}$ statt x gesetzt wird, mithin erhalten wir als erste Gleichung $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ferner sollen für $x=\frac{1}{2}$ die ersten Differentialquotienten dieser Functionen gleich sein; dies gibt als zweite Gleichung $b+c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Und endlich sollen die zweiten Differentialquotienten dieser Functionen gleich sein für $x=\frac{1}{2}$. Daraus geht als dritte Gleichung hervor $2c=-\frac{8}{3\sqrt{3}}$. Bestimmen wir durch diese drei Gleichungen die Werthe von a, b und c, so erhalten wir $c=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $b=\frac{7}{3\sqrt{3}}$, und $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Die gesuchte bestimmte Gleichung der Parabel ist also

$$y=\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{7}{3\sqrt{3}}x-\frac{4}{3\sqrt{3}}x^2.$$

Vermöge dieser Gleichung hat die Ordinate der Parabel im Punkte a, wo $x=0$, den Werth $\frac{2}{3\sqrt{3}}$; im Punkte b, wo $x=\frac{1}{2}$, den Werth $\frac{\sqrt{3}}{2}$ wie die Ordinate des Kreises; im Punkte g, wo $x=\frac{7}{8}$, hat die Ordinate ihren größten Werth, und ist gleich $\frac{27}{16\sqrt{3}}$, und die Linie kdh stellt die

gesuchte Parabel vor. Wenn also die im Punkte d vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten des Kreises zur Ausführung käme, so würden diese Ordinaten so wachsen wie die Ordinaten der Parabel kdh.

Es wird nicht überflüssig sein, auch noch für andere räumliche Elemente ein Beispiel der Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens zu geben. Die veränderlichen räumlichen Elemente mögen sein eine gerade Linie als Abscisse und der durch senkrechte Parallelcoordinaten erzeugte Flächenraum. Eine constante Beschleunigung des Wachsens der Fläche findet für diese Coordinaten nur statt, wenn die flächenerzeugenden Ordinaten die Ordinaten einer geraden Linie sind (siehe §. 108), oder in einem Paralleltrapez, dessen parallele Seiten die Ordinaten, und dessen ungleichlaufende Seiten die Abscisse und die durch die Ordinaten vorgeschriebene gerade Linie sind. Die Größe der constanten Beschleunigung des Wachsens der Fläche hängt nur von der Neigung der geraden Linie gegen die Abscisse ab. Da der constante zweite Differenzquotient der Fläche nichts weiter ist als der Unterschied der Zunahmen der Fläche bei zwei Zunahmen der Abscisse im Werthe von 1, so sieht man, daß der Zahlenwerth dieses zweiten Differenzquotienten zusammenfällt mit dem Zahlenwerth, um welchen die Ordinate der geraden Linie wächst, wenn die Abscisse um die Zahl 1 wächst.

Bei jeder krummen Linie findet eine veränderliche Beschleunigung des Wachsens der zwischen ihren Ordinaten enthaltenen Fläche statt, und es fragt sich, wie man dasjenige Paralleltrapez construirt, dessen constante Beschleunigung des Wachsens seiner Fläche mit der momentanen der Curvenfläche zusammenfällt. Wir wissen (§. 49), daß der erste Differentialquotient derjenigen Function der Abscisse, welche die Curvenfläche ausdrückt, identisch ist mit der Function der Abscisse, welche die Ordinate der Curve angibt. Mithin wird der erste Differentialquotient der die Ordinate ausdrückenden Function zugleich der zweite Dif-

ferentialquotient der die Curvenfläche ausdrückenden Function sein. Der für einen beliebigen Curvenpunkt berechnete erste Differentialquotient der Ordinate gibt aber bekanntlich an, um wie viel die Ordinate der Tangente dieses Punktes wächst, wenn die Abscisse um die Zahl 1 wächst. Da nun, wie vorher bemerkt, diese Zunahme der Ordinate einer geraden Linie zusammenfällt mit dem constanten zweiten Differenzquotienten der von den Ordinaten dieser geraden Linie beschriebenen Fläche, so sieht man, daß die Tangente eines Curvenpunktes mit der Abscisse und den Ordinaten dasjenige Paralleltrapez bildet, in dessen Fläche die in diesem Curvenpunkte vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Curvenfläche zur Ausführung kommt oder constant ist. Für die Kreisfläche Fig. 57 wird also das Paralleltrapez dbco die im Punkte d vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens der Curvenfläche angeben, d. h. der für den Punkt d berechnete zweite Differentialquotient der die Kreisfläche ausdrückenden Function gibt an, um wie viel jede folgende Zunahme der Fläche dieses Paralleltrapezes größer ist als die vorhergehende, wenn die Abscisse zweimal um die Zahl 1 wächst. Man übersieht in dieser Construction recht bequem, wie die momentane Stärke des Wachsens mit der Beschleunigung des Wachsens verbunden ist. Käme nämlich nur die im Punkte d vorhandene momentane Stärke des Wachsens der Kreisfläche zur Ausführung, so würde bei wachsender Abscisse die Kreisfläche wachsen wie das Parallelogramm dbep; käme aber bei derselben momentanen Stärke des Wachsens auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Kreisfläche zur Ausführung, so würde sie wachsen wie das durch die Größe der Ordinate und die Neigung der Tangente vorgeschriebene Paralleltrapez.

Wir halten, um für andere in Bezug auf Flächen versuchte räumliche Deutungen der höheren Differentialquotienten keinen Raum zu lassen, es nicht für undienlich, noch ausdrücklich auf die Versehen hinzuweisen, durch welche

es veranlaßt worden ist, daß man bei diesen Versuchen auf falsche Fahrten und als Folge davon schon bei den ersten Schritten ins Stocken gerathen ist. Zuerst ist es, auch ganz abgesehen von dem Differentialquotienten, als eine wenn auch für gewöhnlich unschädliche so doch ungenaue Ausdrucksweise zu bezeichnen, wenn man sagt: Der in Quadraten ausgedrückte Flächeninhalt eines rechtwinkligen Parallelogramms dividirt durch den Zahlenwerth der Einen Seite des Parallelogramms gibt die andere Seite des Parallelogramms. Es ist zwar wahr, daß dieser Quotient mit dem Zahlenwerth der andern Seite des Parallelogramms zusammenfällt; aber wenn ich einen Flächeninhalt, also eine Anzahl von Quadratfußen oder andern Flächeneinheiten durch irgend eine Zahl dividire, so erhalte ich doch nothwendig wieder eine Anzahl Quadratfuße als Quotient und keine Linie. Man sollte also eigentlich sagen: der in Quadraten ausgedrückte Flächeninhalt eines rechtwinkligen Parallelogramms dividirt durch den Zahlenwerth der Einen Seite des Parallelogramms gibt den Flächeninhalt eines von der andern Seite des Parallelogramms und von einer Seite =1 als Nachbarseiten gebildeten Parallelogramms. Wenn man nun auf die eben berügte ungenaue Ausdrucksweise fußend sagt, der erste Differentialquotient der die Fläche ausdrückenden Function der Abscisse wird dargestellt durch die Ordinate, so ist man auf diese Weise schon beim ersten Differentialquotienten aus der Fläche heraus, in die man denn natürlich bei den folgenden Differentialquotienten nie wieder hineinkommt. Man muß sich übrigens in der That die Bedeutung des ersten Differentialquotienten überhaupt niemals klar gedacht und mit klaren Worten ausgesprochen haben, um die Ordinate für den Repräsentanten des ersten Differentialquotienten der Fläche ausgeben zu können. In §. 36 ist der allgemeine Sinn des ersten Differentialquotienten so ausgesprochen: „Der erste Differentialquotient gibt an die Zahl der Einheiten, um welche die abhängig Veränderliche wachsen würde bei einer Zu-

nahme der willkürlich Veränderlichen =1, wenn die vorhandene Stärke des Wachsens unverändert bliebe." Wenn nun gegen diese Erklärung wol Niemand etwas einzuwenden haben wird, so muß, wenn sie auf eine Fläche als abhängig Veränderliche übertragen wird, unmittelbar folgen, daß der erste Differentialquotient der Curvenfläche das Parallelogramm angibt, welches von der jedesmaligen Ordinate und einem gleich 1 gesetzten Abscissenstück als Nachbarseiten gebildet wird. Diese geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten der Curvenfläche ist keine beliebige neben andern Deutungen auch gestattete, sondern die einzig mögliche wahre und reale, da sie aus der allgemeinen Bedeutung des ersten Differentialquotienten unausweichlich folgt. Dasselbe gilt von dem als Repräsentant des zweiten Differentialquotienten der Curvenfläche nachgewiesenen Flächenraum. Man braucht nur die oben (§. 110) gegebene allgemeine Erklärung der Bedeutung des zweiten Differentialquotienten wörtlich und streng auf den vorliegenden Fall anzuwenden, um sich zu überzeugen, daß der räumliche Repräsentant des Werthes des zweiten Differentialquotienten nichts Anderes sein kann, als der Unterschied der Flächenzunahmen des Paralleltrapezes. Wenn wir in dem Kreis Fig. 57 dem Radius einen solchen Zahlenwerth beilegen, daß die gleichen Linien be und ef den Zahlenwerth 1 haben, und demgemäß die Gleichung des Kreises gebildet denken, so wird die die Ordinate ausdrückende Function, als der erste Differentialquotient der die Fläche angebenden Function betrachtet, für den Punkt d berechnet das Parallelogramm dbei bezeichnen, und der zweite Differentialquotient der Flächenfunction nichts Anderes als das Parallelogramm gefr bezeichnen, in sofern angenommen wird, daß die Linie el um das Stück qe größer ist als die Linie bd.

Diese Beispiele von Constructionen der momentanen Beschleunigung des Wachsens werden hinreichen, um eine Einsicht in das Wesentliche dabei zu gestatten, und Jeden in den Stand zu setzen, diese Construction auch bei andern

räumlichen Elementen auszuführen, und sich, wenn es beliebte, die Beschleunigung des Wachsens derselben zu versinnlichen. Wir wollen nur schließlich an diese Flächenconstruction noch eine allgemeine Bemerkung anknüpfen. Sowie die Flächen der Figuren bekanntlich fast immer gebraucht werden, um die Vorstellung des bestimmten Integrals oder überhaupt des Integrals, als Summe von Incrementen betrachtet, zu verdeutlichen (siehe §. 58), so bieten sie auch ein gutes Mittel dar, den Begriff der Differentialquotienten und den Begriff der stetig veränderlichen Stärke des Wachsens überhaupt zu erläutern. Aus dem Begriff einer stetigen Veränderung der Stärke des Wachsens folgerten wir schon bei der Lehre vom ersten Differentialquotienten, daß absolut in demselben Moment, in welchem eine bestimmte Stärke des Wachsens eintritt, auch schon eine Veränderung dieser Stärke des Wachsens eintreten muß, weil mit der Veränderung nicht gewartet werden kann bis zu einem andern, wenn auch noch so nahe liegenden Verflußpunkt. Wie aber die Bestimmtheit der Stärke des Wachsens mit einer Veränderung derselben verbunden zu denken ist, so daß nicht die Stärke des Wachsens als eine bestimmte und zugleich als eine andere erscheint, was ein vollkommen sinnloser Widerspruch wäre, das war vielleicht früher nicht so ganz klar, wird aber jetzt, wo wir die Veränderung der Stärke des Wachsens nach Art und Größe zu bestimmen gelernt haben, ganz deutlich sein. In der für Flächen ausgeführten Construction der momentanen Beschleunigung des Wachsens wird es ganz augenfällig, wie in demselben ausdehnungslosen Verflußpunkt, in welchem eine bestimmte Stärke des Wachsens eintritt, auch schon eine bestimmte Größe der Veränderung der Stärke des Wachsens vorhanden sein kann, weil die Stärke des Wachsens und die Beschleunigung des Wachsens eben zwei so verschiedene Begriffe sind, als ihre Repräsentanten, das Parallelogramm und das Paralleltrapez, verschiedene Figuren sind, die unbeschadet ihrer Verschieden-

heit mit gemeinſchaftlicher Seite in demſelben Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen zuſammenfallen. Von hieraus fällt zugleich noch ein Licht auf die gewöhnliche Vorſtellung vom Unendlichkleinen. Gemäß dieſer Vorſtellung ſoll die Stärke des Wachſens als eine beſtimmte dadurch vorhanden ſein, daß Zunahmen, die zwar unendlichklein genannt werden, die aber dennoch etwas von Null Verſchiedenes bedeuten ſollen, durch ihr Verhältniß die Stärke des Wachſens angeben. Wenn es nun mit dieſen zwar unbeſtimmbaren, aber doch nicht mit Nullen zuſammenfallenden Werthen der unendlichkleinen Zunahmen dx und dy ernſtlich gemeint iſt, und ihnen eine objective Wahrheit und Wirklichkeit beigelegt wird, ſo iſt eigentlich innerhalb der unendlichkleinen Zunahme dx die Stärke des Wachſens unverändert gedacht, und der Begriff der ſtetigen Veränderung in ſeiner Strenge aufgehoben. Die wahre dieſer Anſicht zu Grunde liegende Meinung kann nur ſein, den ſtrengeren Begriff der ſtetigen Veränderung für einen Schein zu erklären, und ſeinen Schwierigkeiten dadurch auszuweichen, daß man als das wahrhaft Reale der ſtetig veränderlich genannten Größen eine unbeſtimmbar große Anzahl von unbeſtimmbar kleinen Theilen oder Elementen betrachtet, die in ſich keine Veränderung zeigen. Eine Veränderung der Stärke des Wachſens kann unter dieſen Annahmen nur dadurch eintreten, daß mit einer folgenden zweiten unendlichkleinen Zunahme der willkürlich Veränderlichen eine andere Zunahme der abhängig Veränderlichen verbunden iſt als mit der erſten. So fielen in der That eine beſtimmte Stärke des Wachſens und eine beſtimmte Größe der Veränderung der Stärke des Wachſens nicht genau in Einen Verflußpunkt zuſammen, ſondern ſie behielten noch einen wenn auch unendlichkleinen Raum ſich auszuweichen. Wer ſich nun aber überzeugt hat, daß eine beſtimmte Stärke des Wachſens und eine Beſchleunigung des Wachſens wahrhaft in Einem Punkt zuſammenfallen können, für den bezeichnet der ſtrenge Begriff der ſtetigen

Veränderung eben das wahrhaft Objective und Reale, und die unendlichklein genannten Zunahmen erscheinen als eine subjective Form der Vorstellung. In der That verlieren die unendlich kleinen Zunahmen, die als eine Art Atome die Größen constituiren und als ein realer Begriff die Grundlage der Differentialrechnung bilden sollen, jeden starren abgesonderten Bestand, und schmelzen in einen stetigen Fluß der Veränderung zusammen.

§. 114.

Das Unendlichkleine der zweiten Ordnung.

Obgleich wir mit der Lehre vom zweiten Differentialquotienten im Wesentlichen zu Ende sind, so haben wir doch bisher eines Begriffs noch nicht Erwähnung gethan, und seiner auch nicht bedurft, der gewöhnlich in dieser Lehre eine Hauptrolle spielt, häufig sogar als der Wesentlichste an die Spitze derselben gestellt wird, wir meinen den Begriff des Unendlichkleinen der zweiten Ordnung. Was unter diesem Begriff gedacht werden muß, kann freilich, nachdem die Lehre von der Stärke und Beschleunigung des Wachsens und von den Zunahmen und Unterschieden der Zunahmen vorausgegangen ist, leicht verständlich gemacht werden. Will man ihn aber ohne Voraussetzung der Kenntniß der Eigenthümlichkeiten eines beschleunigten Wachsens als einen unmittelbar faßbaren Begriff definiren, so kann man nichts Anderes sagen, als eine unendlichkleine Zahl der zweiten Ordnung ist eine solche, welche unendlich vielmal kleiner ist als eine schlechtweg gesetzte unendlichkleine Zahl. So gefaßt ist schwer einzusehen, warum man nicht schon durch die unendlichkleine Zahl als solche jeden denkbaren Grad von Kleinheit sollte ausdrücken und erreichen und sogar überschreiten können, und wozu es noch verschiedener Stufen oder Grade des Unendlichkleinen bedarf, oder wodurch eine solche Annahme gerechtfertigt erscheint.

Gehen wir auf die früher erklärten Eigenthümlichkeiten des beschleunigten Wachsens zurück, so wissen wir, daß

bei conſtanter Beſchleunigung des Wachſens die Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im quadratiſchen Verhältniß der Zunahme Δx der willkürlich Veränderlichen abnehmen. Da nun jede ungleichförmige Beſchleunigung des Wachſens ſich um ſo mehr einer conſtanten nähert, je kleiner die Zunahmen Δx geſetzt werden, ſo folgt, daß überhaupt bei allen Functionen die Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen um ſo mehr im quadratiſchen Verhältniß von Δx abnehmen, je kleiner Δx geſetzt wird. Je mehr ſich nun Δx dem Verſchwinden nähert, deſto mehr wird offenbar $(\Delta x)^2$ gegen Δx ſelbſt verſchwindend klein. Da nun, ſobald nicht etwa die Stärke oder die Beſchleunigung des Wachſens unendlichgroß iſt, von welchem Fall, der nur in einzelnen Punkten eintreten kann, jetzt abgeſehen werden ſoll, die Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, welche durch $\Delta\Delta y$ vorgeſtellt ſein mögen, zu $(\Delta x)^2$ ein endliches angebbares Verhältniß behalten bei allen auch bis zu Null fortgeſetzt gedachten Verkleinerungen von Δx, ſo wird $\Delta\Delta y$ gegen Δx und folglich auch gegen Δy immer mehr verſchwindend klein werden bei fortgeſetzter Verkleinerung von Δx. Je kleiner alſo die Zunahmen der abhängig Veränderlichen werden, deſto mehr werden die Unterſchiede dieſer Zunahmen verſchwindend klein gegen die Größe dieſer kleinen Zunahmen ſelbſt. Und ſowie die Zunahme der abhängig Veränderlichen über jede angebbare Grenze hinaus verkleinert gedacht werden kann, ſo kann auch das Verhältniß von $\Delta\Delta y$ zu Δy über jede angebbare Grenze hinaus verkleinert gedacht werden. Dies iſt das einzig Objective und Thatſächliche in Betreff der unendlichkleinen Größen der zweiten Ordnung. Und wenn man unter den unendlichkleinen Größen der erſten und zweiten Ordnung nichts weiter verſteht als veränderliche Größen, von welchen, indem Beide ſich der Null nähern, die Eine in jedem beliebigen Verhältniß kleiner wird als die Andere, und welche vor dem wirklichen Uebergang in Null relativ zu

einander alle denkbaren Größenverhältnisse factisch durchlaufen, so ist gegen den Gebrauch dieses Wortes nichts einzuwenden.

In sofern man aber nach dem wirklichen Uebergang zu dem Grenzwerth des Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ diesen Grenzwerth noch als einen Quotienten von Zunahmen der veränderlichen Größen x und y betrachtet, denen man, obgleich man sie unendlichklein nennt, noch eine Art von Objectivität oder Realität beilegt, so wird dann natürlich der Unterschied zweier unendlichkleinen Zunahmen Δy unendlich vielmal kleiner als diese Zunahmen selbst. Wer sich vor dem ersten Schritt nicht scheut, und unter dem isolirten ersten Differential dy, im Sinne einer unendlichkleinen Größe genommen, noch eine reale objective Größe denkt, und auch nach dem Uebergang zum Grenzwerth des Differenzquotienten noch eine Art wirklicher Zunahmen der Veränderlichen übrig zu behalten glaubt, der darf auch vor dem zweiten Schritt nicht zurückbeben, und muß das zweite Differential d^2y als eine Zahl betrachten, welche unendlich vielmal kleiner ist als die unendlichkleine Zahl dy. Wir werden bald sehen, daß er auch einen dritten Schritt thun muß, und Zahlenwerthe annehmen, welche unendlich vielmal kleiner sind als die Zahlenwerthe des zweiten Differentials, und sofort ohne Ende. Die Hauptsache bleibt, daß man diese Verhältnisse durchaus nur als solche auffaßt, denen man sich durch Verkleinerung der Zunahmen beliebig nähern kann, und daß man sich dy immer so weit verkleinert denken kann, daß d^2y in seinem Verhältniß zu dy jede beliebige angebbare Grenze der Kleinheit überschreitet. Indem man aber diese Grenze der Annäherung erreicht denkt, hat man überhaupt keine Größen mehr, und folglich weder unendlichkleine Größen der ersten noch der zweiten Ordnung. Was man durch Uebergang zur Grenze der Annäherung wirklich erhält, sind Ausdrücke für die Stärke und die Beschleunigung des Wachsens. Man kann übri-

gens hier bemerken, daß nichts so paradox und abenteuerlich klingt, was nicht irgendwo seine natürliche Entstehung und im Zusammenhange mit derselben seinen einfachen guten Sinn hat.

Man glaube nur nicht, daß man dadurch etwas besonders Deutliches von der Bedeutung des zweiten Differentials und von der durch dasselbe ausgesprochenen Beschleunigung des Wachsens gesagt hat, daß man es als ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung bezeichnet, und diese Definition an die Spitze der Lehre vom zweiten Differentialquotienten stellt. In der Anwendung dieses Begriffs wird man häufig in große Dunkelheiten gerathen. So wird z. B. in den meisten Fällen, wo man das zweite Differential einer unbekannten Function direct bestimmen will, dadurch, daß man es als die unendlichkleine Zunahme einer unendlichkleinen Zunahme der abhängig Veränderlichen auffaßt, etwas sehr Unfaßbares und Nebuloses in die Betrachtung kommen, und das Unsichere, Aengstliche und Scheue, mit welchem eine solche Aufgabe angegriffen wird, kann sich selten verbergen. Allerdings steht leicht zu besorgen, daß man so zarten und gebrechlichen Dingen wie die unendlichkleinen Größen der zweiten Ordnung sind, Gewalt anthue. Will man die Bedeutung des isolirten zweiten Differentials mit verständlichen Worten rund herausſagen, so muß sie so ausgesprochen werden, wie es §. 111 geschehen ist. Dabei ist denn auch ersichtlich, daß man das zweite Differential als eine massive Größe ganz herzhaft anfassen kann, ohne gleich eine Beschädigung zu fürchten.

Es ist vorher gesagt worden, daß im Allgemeinen für alle Werthe der willkürlich Veränderlichen, bei welchen der erste und zweite Differentialquotient einen endlichen Werth haben, durch fortgesetzte Verkleinerung von Δx der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen relativ zu der Zunahme der abhängig Veränderlichen über jede angebbare Grenze hinaus verkleinert werden könne. Es verdient bemerkt zu werden, daß dieser Satz noch eine Aus-

nahme erleidet in dem Falle, in welchem die Zunahmen Δx gesetzt werden von einem Punkte aus, für welchen der erste Differentialquotient gleich Null ist, der zweite aber nicht. Denn in diesem Fall wird bei fortgesetzter Verkleinerung von Δx die Größe Δy verschwindend klein gegen Δx; und da es sich mit $\Delta^2 y$ ebenso verhält, so können beide Größen, Δy und $\Delta^2 y$, von der Art sein, daß ihr Verhältniß auch bei beliebiger Verkleinerung von Δx ein bestimmtes Maß nicht überschreitet, oder daß ihr veränderliches Verhältniß sich einem festen Grenzwerth nähert.

§. 115.

Integration der Differentialformeln des zweiten Grades.

Mit dem Vorhergehenden ist die allgemeine Lehre vom zweiten Differentialquotienten geschlossen, und wir wollen nur noch kurz der durch die Einführung des zweiten Differentialquotienten hervortretenden neuen Regeln der Integration Erwähnung thun. Sowie in der Lehre vom ersten Differentialquotienten jeder neue Schritt der operativen Differentialrechnung uns neue Fundamentalformeln zur Integration lieferte, so wird auch durch die Lehre vom zweiten Differentialquotienten eine Erweiterung der Integralrechnung gegeben sein, in sofern aus der gegebenen Beschleunigung des Wachsens irgend einer Function diese Function selbst hergeleitet werden kann. Da indessen die Bildung des zweiten Differentialquotienten nur auf einer Wiederholung des bei Bildung des ersten Differentialquotienten angewendeten Verfahrens beruht, so ist klar, daß in allen den Fällen, in welchen der zweite Differentialquotient einer Function von x durch eine Function von x selbst und von x allein ausgedrückt erscheint, die Darstellung der ursprünglichen Function aus ihrem zweiten Differentialquotienten nur auf eine Wiederholung des beim ersten Differentialquotienten angewendeten Verfahrens der Integration hinauslaufen wird. Es sei z. B. die Function $-x^{-2}$ als der zweite Differentialquotient einer unbekannten durch y vorgestellten

Function von x gegeben durch die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}=-x^{-1}$. Nimmt man ſtatt der Bezeichnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ des zweiten Differentialquotienten diejenige, welche unmittelbar die Wiederholung der Operation des Differentiirens anzeigt, nämlich $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, ſo hat man $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-x^{-2}$. Betrachtet man zuerſt $\frac{dy}{dx}$ als die zu ſuchende Function, ſo erhält man, da der Differentialquotient derſelben $-x^{-2}$ iſt, durch Integration $\frac{dy}{dx}=x^{-1}$, oder indem man in gewöhnlicher Weiſe die Gleichung mit iſolirten Differentialen ſchreibt $\left(\frac{dy}{dx}\right)=-x^{-2}dx$, hat man $\frac{dy}{dx}=\int -x^{-2}dx=x^{-1}$. In der Gleichung $\frac{dy}{dx}=x^{-1}$ iſt nun y die zu ſuchende Function, und man erhält, da x^{-1} bekanntlich der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus von x iſt, $y=\log x$.

Handelt es ſich bei der Integration nicht blos um den abſtracten Zuſammenhang von urſprünglichen und durch Differentiation ableitbaren Functionen, ſondern ſollen die Geſetze der Abhängigkeit von Größen, deren zweiten Differentialquotienten man auf irgend eine Weiſe direct beſtimmt hat, durch Integration gefunden werden, in welchem Falle die Frage nach der Uebereinſtimmung des Werthes der abhängig Veränderlichen mit dem Werth der durch Integration erhaltenen Formel entſteht, ſo iſt, da man zweimal eine Function zu integriren hat, auch zweimal die Conſtante zu beſtimmen. Es ſei allgemein f(x) als der zweite Differentialquotient einer abhängig Veränderlichen y gegeben durch die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}=fx$ oder $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=fx$. Bil-

det man daraus die Gleichung $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = fx \,.\, dx$ und $\frac{dy}{dx} = \int fx\,dx$, so muß man, da $\frac{dy}{dx}$ zunächst als die abhängig Veränderliche erscheint, um die Constante zu bestimmen, den Werth wissen, den $\frac{dy}{dx}$ für irgend einen einzelnen Werth von x annimmt. Die dadurch bestimmte Constante möge C heißen, und wir erhalten die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \int fx\,dx + C$, oder, wenn wir unter $F(x)$ diejenige Function vorstellen, deren Differentialquotient $f(x)$ ist, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = F(x) + C$. Durch abermalige Integration erhalten wir aus der Gleichung $dy = F(x)dx + C\,dx$ die Gleichung $y = \int F(x)\,dx + Cx$. Um für diese Integration die Constante zu bestimmen, müssen wir den Werth wissen, den y für irgend einen Werth von x annimmt. Stellen wir die durch Kenntniß dieses Werthes bestimmte Constante durch Cj vor, so haben wir $y = \int F(x)\,dx + Cx + Cj$. Wenn wir $F(x)$ wieder durch $f(x)$ ausdrücken, indem wir $\int f(x)dx$ statt $F(x)$ setzen, so erhalten wir $y = \int (\int fx\,dx)\,dx + Cx + Cj$ als die aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ durch zweimalige Integration hervorgehende Gleichung. Wir sehen also, daß man für irgend einen beliebigen Werth von x den zugehörigen Werth von $\frac{dy}{dx}$ und ebenso für irgend einen Werth von x den zugehörigen Werth von y wissen muß, um aus dem gegebenen zweiten Differentialquotienten einer abhängig Veränderlichen dieselbe vollständig zu bestimmen.

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2} = \int f(y)\,dy + C \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \sqrt{2[\int f(y)dy + C]}.$$

Um auf diese letzte Gleichung die Integration anwenden zu können und dadurch die Gleichung zwischen x und y herzuleiten, müssen wir sie in der Form $\frac{1}{\sqrt{2[\int f(y)dy + C]}} \cdot dy = dx$ schreiben, wodurch eine Function der Veränderlichen y mit dem Differential dieser Veränderlichen multiplicirt erscheint. Indem man auf der linken Seite der Gleichung auf gewöhnliche Weise das Integral als eine Function von y darstellt, erhält man in der Gleichung $\int \frac{1}{\sqrt{2[\int f y dy + C]}} \cdot dy = x$ die gesuchte Gleichung zwischen x und y. Um für diese letzte Integration die Constante zu bestimmen, muß man den Werth wissen, welchen die Veränderliche x für irgend einen Werth von y annimmt.

Wir wollen, um den aufgestellten abstracten Formeln etwas Leben einzuhauchen, diese Klasse von Aufgaben noch durch ein angewandtes Beispiel erläutern. Wir nehmen an, ein frei beweglicher Körper habe im Punkt c (Fig. 58) seine Gleichgewichtslage, und er werde, sobald er sich aus dieser Lage entfernt hat, in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben durch eine Kraft, welche um so stärker wirkt, je größer die Ausweichung aus der Gleichgewichtslage ist, welcher Fall z. B. statthat, wenn in einem elastischen Medium irgend ein Theil aus seiner Gleichgewichtslage, in welcher die abstoßenden Kräfte nach allen Richtungen gleich sind, herausgetreten ist. Unter der gemachten Voraussetzung muß der Körper eine in einer geradlinigten Bahn ab hin- und hergehende Bewegung annehmen, weil er immer mit einer bestimmten Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage ankommt, und über dieselbe hinausschreitet, bis durch die der vorhandenen Geschwindigkeit entgegenwirkende Kraft seine Geschwindigkeit auf Null gebracht ist, und er nun mit zunehmender Geschwindigkeit wieder der Gleichgewicht-

lage zueilt. Es soll der Ort berechnet werden, in welchem der oscillirende Körper sich zu irgend einer Zeit befindet, wenn man einen Zeitpunkt, in welchem sich der Körper in irgend einem bestimmten Punkt seiner Bahn sich befindet, als den Anfangspunkt der Zeit setzt, d. h. es soll die Gleichung zwischen dem Raum s und der Zeit t bei dieser oscillirenden Bewegung gesucht werden. Unter dem zu suchenden Raum s ist zu verstehen die jedesmalige Entfernung des Körpers von dem Punkt c der Gleichgewichtslage. Setzen wir in den Punkt c den Nullpunkt des Raumes s, so wird, wenn die Ausweichung nach b hin durch eine positive Zahl ausgedrückt ist, die Ausweichung von c nach a hin durch eine negative Zahl ausgedrückt werden müssen. Wir wissen (s. §. 41), daß bei einer geradlinigten Bewegung der erste Differentialquotient von Raum und Zeit die Geschwindigkeit ausdrückt, und daß der zweite Differentialquotient von Raum und Zeit die Beschleunigung der Bewegung, oder was hier bei der Bewegung eines Punktes, wo von keiner Verschiedenheit der Masse die Rede ist, dasselbe ist, die Kraft ausdrückt. Da die Kraft im geraden Verhältniß mit der Ausweichung aus der Gleichgewichtslage, d. h. im geraden Verhältniß mit der Größe s wachsen soll, so wird der zweite Differentialquotient von s und t im Allgemeinen durch die Function $as+b$, und da für $s=o$ auch die Kraft gleich Null sein soll, kurzweg durch as auszudrücken sein. Um über das Vorzeichen von as zu entscheiden, ist noch Folgendes zu bedenken. Die Geschwindigkeit wird überall durch eine positive oder negative Zahl ausgedrückt, je nachdem die mit den Zunahmen der Zeit verbundenen Zunahmen des Raumes durch positive oder negative Zahlen gegeben sind. Es folgt daraus für unsern vorliegenden Fall, daß die Geschwindigkeit des Körpers auf dem ganzen Weg von a nach b einen positiven, und auf dem Weg von b nach a einen negativen Zahlenwerth erhält. Der Ausdruck für die Kraft, als der erste Differentialquotient von Geschwindigkeit und Zeit, hat überall

mit der Geschwindigkeit gleiches Vorzeichen, wenn die Geschwindigkeit sich vergrößert, und entgegengesetztes, wenn die Geschwindigkeit abnimmt. In unserm Falle ist auf dem Weg von c nach b die Geschwindigkeit positiv und abnehmend, folglich die Kraft negativ zu setzen; auf dem Weg von b nach c ist die Geschwindigkeit negativ und zunehmend, folglich die Kraft ebenfalls negativ. So lange sich also der Körper zwischen c und b befindet, d. h. so lange s einen positiven Werth hat, ist der Ausdruck für die Kraft negativ. Auf dem Weg von c nach a ist die Geschwindigkeit negativ und abnehmend, folglich die Kraft positiv; auf dem Weg von a nach c ist die Geschwindigkeit positiv und zunehmend, folglich die Kraft ebenfalls positiv. Zwischen a und c, d. h. für jeden negativen Werth von s ist die Kraft positiv. Da hiernach allgemein der Ausdruck der Kraft immer das entgegengesetzte Vorzeichen von dem jedesmaligen Vorzeichen von s hat, so erhalten wir als die unserer Aufgabe entsprechende Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = -as$. Es ist uns also hier der zweite Differentialquotient zweier Veränderlichen s und t als Function der abhängig Veränderlichen s gegeben, und die Gleichung zwischen s und t kann auf dem Wege der im Vorhergehenden enthaltenen allgemeinen Auflösung gefunden werden. Wir wollen, da es uns nicht auf die größte Allgemeinheit der Auflösung ankommt, um die Integration zu vereinfachen, statt a die Zahl 1 setzen, und die Gleichung $\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = -s$ oder $d\left(\frac{ds}{dt}\right) = -s\,.\,dt$ auflösen. Beiderseits mit $\frac{ds}{dt}$ multiplicirt, entsteht die Gleichung $\frac{ds}{dt}\,.\,d\left(\frac{ds}{dt}\right) = -s\,.\,ds$, und durch Integration $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2}$. Um die Constante zu bestimmen, müssen wir für irgend einen Werth von s

den zugehörigen Werth von $\frac{ds}{dt}$ oder von der Geschwindigkeit wissen. Im Punkt a, als der größten Ausweichung aus der Gleichgewichtslage, ist die Geschwindigkeit gleich Null. Drücken wir nun die Länge ac durch eine beliebige Zahl, z. B. durch die Zahl 1 aus, so ist für $s = -1$ die Geschwindigkeit gleich Null. Wir erhalten also nach bekannter (s. §. 74) Regel der Constantenbestimmung $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2} - \left(-\frac{1^2}{2}\right)$ oder $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1-s^2}$. Wir konnten die Constante auch dadurch bestimmen, daß wir für den Punkt der Gleichgewichtslage, wo $s=o$ ist, und die Geschwindigkeit ihren größten Werth erreicht, der Geschwindigkeit einen beliebigen Zahlenwerth beilegten. Da die aus der oben gemachten Annahme, daß die Länge ac gleich 1 sei, resultirende Gleichung $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{1-s^2}$ zeigt, daß für $s=o$ die Geschwindigkeit gleich ± 1 wird, so hätten wir aus der Gleichung $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2}$ dieselbe Gleichung wie vorher erhalten, wenn wir zum Zwecke der Constantenbestimmung die Annahme gemacht hätten, daß $\frac{ds}{dt} = \pm 1$ sei für $s=o$. Wir würden dann (nach der allgemeinen für die Constantenbestimmung geltenden Formel §. 74) $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}(\pm 1)^2 - o$, oder wie vorher $\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{1-s^2}$ erhalten haben.

Um nun die Gleichung zwischen s und t zu finden, haben wir die letzte Gleichung in der Form $\frac{ds}{\pm\sqrt{1-s^2}} = dt$ zu schreiben, und beiderseits die Integrale zu nehmen. Bekanntlich ist (siehe §. 62) $\int \frac{ds}{\pm\sqrt{1-s^2}}$ nach Belieben gleich

Arc (sin = x) oder gleich Arc (cos = x), jenachdem wir das positive oder negative Vorzeichen im Nenner nehmen. Beide Functionen müssen also der Aufgabe Genüge leisten. Nur wird es einer verschiedenen Constantenbestimmung bedürfen, jenachdem bei beliebig angenommenem Anfangspunkt der Zeit die eine oder die andere Function der Aufgabe genügen soll. Nehmen wir also zuerst den negativen Werth von $\sqrt{1-s^2}$, so erhalten wir aus der Gleichung $\frac{ds}{-\sqrt{1-s^2}} = dt$ durch beiderseitige Integration Arc(cos = s) = t. Die Zeit t möge gerechnet werden von dem Moment, wo der Körper im Punkt a ist, so daß wir also für $s = -1$ haben $t = o$. Mithin wird Arc (cos = s) — Arc (cos = — 1) = t, oder Arc (cos = s) — π = t. Folglich ist $s = \cos(t + \pi)$ oder $s = -\cos t$. Hätten wir den positiven Werth von $\sqrt{1-s^2}$ genommen, so wäre aus der Gleichung $\frac{ds}{+\sqrt{1-s^2}} = dt$ zunächst erhalten worden Arc (sin = s) = t. Nehmen wir den Anfangspunkt der Zeit wie vorher in dem Augenblick, wo der Körper in dem Punkt a ist, und haben wir also wieder $t = o$ für $s = -1$, so erhalten wir durch Constantenbestimmung Arc (sin = s) — Arc (sin = — 1) = t oder Arc (sin = s) $- \frac{3\pi}{2} = t$; folglich $s = \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$, oder $s = -\cos t$, wie vorher. Hiermit haben wir die aus der ursprünglich gegebenen Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = -s$ abzuleitende Gleichung zwischen Raum und Zeit, und sehen, daß unter den beiden Voraussetzungen, daß die größte Ausweichung durch die Zahl 1 ausgedrückt und der Anfangspunkt der Zeit in dem angegebenen Punkt genommen wird, der Raum s oder die Entfernung aus der Gleichgewichtslage gegeben ist durch den Cosinus des jedesmaligen Zahlenwerthes der Zeit, und zwar diesen Cosinus mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen.

Für einen andern Anfangspunkt der Zeit müßte natürlich auch der Raum durch eine andere Function der Zeit ausgedrückt erscheinen. Setzen wir z. B. den Anfangspunkt der Zeit in den Augenblick, in welchem der Körper in der Gleichgewichtslage ist, so haben wir für $t=o$ auch $s=o$. An den aus der Gleichung $\frac{ds}{\pm\sqrt{1-s^2}}=dt$ abgeleiteten beiden Gleichungen $Arc(cos=s)=t$ und $Arc(sin=s)=t$ wird natürlich nichts geändert. Durch Constantenbestimmung erhält man aus denselben die Gleichungen $Arc(cos=s)-Arc(cos=o)=t$ und $Arc(sin=s)-Arc(sin=o)=t$. In der Bestimmung $s=o$ liegt aber in Betreff des Anfangspunktes der Zeit eine Zweideutigkeit, indem dieser Anfangspunkt in dem Moment genommen sein kann, wo s aus negativen Werthen in positive übergeht, oder in demjenigen, in welchem s aus positiven in negative Werthe übergeht. Nehmen wir den ersten Fall an, so wird, wenn wir in $Arc(cos=s)$ und in $Arc(sin=s)$ die Zahl $s=o$ setzen, $Arc(cos=o)=\frac{3\pi}{2}$ und $Arc(sin=o)=o$. Die beiden obigen Gleichungen sind also $Arc(cos=s)-\frac{3\pi}{2}=t$ und $Arc(sin=s)=t$. Aus beiden geht dieselbe Gleichung $s=\sin t$ hervor. Nehmen wir den zweiten Fall, daß s den Nullwerth hat bei seinem Uebergang aus positiven Werthen in negative, so ist $Arc(cos=o)=\frac{\pi}{2}$ und $Arc(sin=o)=\pi$. Es entstehen also die Gleichungen $Arc(cos=s)-\frac{\pi}{2}=t$ und $Arc(sin=s)-\pi=t$. Aus beiden geht die Gleichung $s=-\sin t$ hervor.

Neuntes Capitel.

Vom dritten und den folgenden Differentialquotienten.

§. 115.

Gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens.

Veränderliche Größen, bei denen mit gleichen Zunahmen der Einen ungleiche Unterschiede der Zunahmen der Andern verbunden sind, haben eine ungleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens, und zwar muß, je nachdem diese Unterschiede der Zunahmen immer größer oder kleiner werden, eine zunehmende oder abnehmende Beschleunigung des Wachsens stattfinden. Die erste hierbei sich darbietende Frage, wie man den momentanen Größenwerth einer veränderlichen Beschleunigung des Wachsens berechnen kann, ist bereits in dem vorhergehenden Capitel beantwortet. Daselbst wurde die Ungleichheit der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen nur in sofern in Betracht gezogen, als aus derselben der Begriff der stetigen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens hergeleitet wurde, nicht aber in sofern, daß die Vergrößerung oder Verkleinerung der Unterschiede der Zunahmen ihrem Werthe nach ins Auge gefaßt und bestimmt worden wäre. Es entsteht nun die neue Frage, wie man bei veränderlicher Beschleunigung des Wachsens den Größenwerth dieser Veränderung der Beschleunigung des Wachsens bestimmen kann, oder wie man für das Wachsen oder Abnehmen der Beschleunigung des Wachsens ein bestimmtes Maß festsetzen, und vermittelst desselben die Stärke dieses Wachsens oder Abnehmens angeben und berechnen kann. Wir haben demgemäß jetzt auf die Größenwerthe, um

welche die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen zu- oder abnehmen, unser Augenmerk zu richten, wobei die willkürlich Veränderliche fortwährend wie früher als durch lauter gleiche Incremente wachsend angenommen wird.

Eine bestimmte und deutliche Vorstellung von der Größe der Veränderung der Beschleunigung des Wachsens können wir unmittelbar natürlich nur in dem Falle haben, in welchem die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um gleich viel größer oder kleiner werden, oder in welchem die Größe der Veränderung der Beschleunigung des Wachsens constant ist, weil nur in diesem Falle die Vergleichung der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen mit den Zunahmen, welche die Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen annehmen, ein bestimmtes Resultat liefern kann. So habe ich z. B. von der Größe der Veränderung einer Beschleunigung des Wachsens eine ganz bestimmte Vorstellung, wenn ich weiß, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von 1 solche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, daß die Unterschiede derselben immer um 3 größer werden. Das Wachsen derjenigen Größen, bei welchen mit allen gleichen selbst beliebig kleinen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, nennen wir eine gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens. Da bei Größen der Art mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen wieder gleiche Zunahmen verbunden sind, nämlich gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen, so kann man diese Größen als eine Art gleichmäßig wachsender, und zwar als im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größen betrachten, und wir wollen sie auch so nennen, wie man entsprechend diejenigen, bei welchen die Zunahmen der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gleich sind, gleichmäßig Wachsende im zweiten Grad, und endlich diejenigen, bei welchen die Zunahmen der abhängig Veränder-

lichen gleich sind, die wir bisher gleichmäßig Wachsende schlechthin genannt haben, gleichmäßig Wachsende im ersten Grad nennen könnte.

Um ein Beispiel von Größen zu geben, bei welchen die Beschleunigung des Wachsens gleichmäßig wächst oder welche gleichmäßig wachsend im dritten Grad sind, so sei die abhängig Veränderliche ausgedrückt durch die Function $\frac{1}{12}x^3$. Lassen wir die Zahl x vom Nullwerth aus mehrmals um die Zahl 1 wachsen, so daß x der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 annimmt, so sind die zugehörigen Werthe der Function $\frac{1}{12}x^3$ der Reihe nach $\frac{1}{12}, \frac{8}{12}, \frac{27}{12}, \frac{64}{12}, \frac{125}{12}$. Ziehen wir jeden Werth der Function von dem nachfolgenden ab, so sind die Reste $\frac{7}{12}, \frac{19}{12}, \frac{37}{12}, \frac{61}{12}$ die Zunahmen der Function. Die Unterschiede dieser Zunahmen sind $\frac{12}{12}, \frac{18}{12}, \frac{24}{12}$ und von denselben ist jeder folgende um dieselbe Zahl $\frac{6}{12}$ größer als der vorhergehende. Um uns zu überzeugen, daß bei dieser Function allgemein mit beliebigen gleichen Zunahmen des x gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der Functionswerthe verbunden sind, und um zugleich zu sehen, auf welche Weise die letztgenannten Zunahmen von der Größe der Zunahmen des x abhängen, brauchen wir nur das x um eine allgemein ausgedrückte Zunahme Δx wachsend zu denken. Wir müssen aber das x dreimal um die Zunahme Δx wachsend annehmen, weil nur aus drei aufeinander folgenden Werthen der Zunahmen der Function entnommen werden kann, um wie viel der Eine Unterschied zweier Zunahmen der Function größer ist als der Andere. Ertheilen wir also in der Function $\frac{1}{12}x^3$ der will-

kürlich Veränderlichen der Reihe nach die Werthe x, $(x+\Delta x)$, $(x+2\Delta x)$, $(x+3\Delta x)$, so sind die zugehörigen Werthe der Function gegeben durch $\frac{1}{12}x^3$, $\frac{1}{12}(x+\Delta x)^3$, $\frac{1}{12}(x+2\Delta x)^3$, $\frac{1}{12}(x+3\Delta x)^3$, oder nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirung durch

$$\frac{1}{12}x^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{3}{12}x(\Delta x)^2+\frac{1}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{6}{12}x^2\Delta x+\frac{12}{12}x(\Delta x)^2+\frac{8}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{9}{12}x^2\Delta x+\frac{27}{12}x(\Delta x)^2+\frac{27}{12}(\Delta x)^3.$$

Wird jeder Werth der Function von dem darauffolgenden abgezogen, so erhalten wir in den Ausdrücken

$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{3}{12}x(\Delta x)^2+\frac{1}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{9}{12}x(\Delta x)^2+\frac{7}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{15}{12}x(\Delta x)^2+\frac{19}{12}(\Delta x)^3,$$

die drei Zunahmen der Function. Die beiden Unterschiede dieser aufeinanderfolgenden Zunahmen sind

$$\frac{6}{12}x(\Delta x)^2+\frac{6}{12}(\Delta x)^3$$
$$\frac{6}{12}x(\Delta x)^2+\frac{12}{12}(\Delta x)^3.$$

Von diesen Unterschieden ist der folgende um $\frac{6}{12}(\Delta x)^3$ größer als der vorhergehende. Wir sehen also, daß bei der vorliegenden Function für beliebige gleiche Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen die Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im-

lichen gleich sind, die wir bisher gleichmäßig Wachsende schlechthin genannt haben, gleichmäßig Wachsende im ersten Grad nennen könnte.

Um ein Beispiel von Größen zu geben, bei welchen die Beschleunigung des Wachsens gleichmäßig wächst oder welche gleichmäßig wachsend im dritten Grad sind, so sei die abhängig Veränderliche ausgedrückt durch die Function $\frac{1}{12}x^3$. Lassen wir die Zahl x vom Nullwerth aus mehrmals um die Zahl 1 wachsen, so daß x der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4, 5 annimmt, so sind die zugehörigen Werthe der Function $\frac{1}{12}x^3$ der Reihe nach $\frac{1}{12}, \frac{8}{12}, \frac{27}{12}, \frac{64}{12}, \frac{125}{12}$. Ziehen wir jeden Werth der Function von dem nachfolgenden ab, so sind die Reste $\frac{7}{12}, \frac{19}{12}, \frac{37}{12}, \frac{61}{12}$ die Zunahmen der Function. Die Unterschiede dieser Zunahmen sind $\frac{12}{12}, \frac{18}{12}, \frac{24}{12}$ und von denselben ist jeder folgende um dieselbe Zahl $\frac{6}{12}$ größer als der vorhergehende. Um uns zu überzeugen, daß bei dieser Function allgemein mit beliebigen gleichen Zunahmen des x gleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der Functionswerthe verbunden sind, und um zugleich zu sehen, auf welche Weise die letztgenannten Zunahmen von der Größe der Zunahmen des x abhängen, brauchen wir nur das x um eine allgemein ausgedrückte Zunahme Δx wachsend zu denken. Wir müssen aber das x dreimal um die Zunahme Δx wachsend annehmen, weil nur aus drei aufeinander folgenden Werthen der Zunahmen der Function entnommen werden kann, um wie viel der Eine Unterschied zweier Zunahmen der Function größer ist als der Andere. Ertheilen wir also in der Function $\frac{1}{12}x^3$ der will-

kürlich Veränderlichen der Reihe nach die Werthe x, $(x+\Delta x)$, $(x+2\Delta x)$, $(x+3\Delta x)$, so sind die zugehörigen Werthe der Function gegeben durch $\frac{1}{12}x^3$, $\frac{1}{12}(x+\Delta x)^3$, $\frac{1}{12}(x+2\Delta x)^3$, $\frac{1}{12}(x+3\Delta x)^3$, oder nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirung durch

$$\frac{1}{12}x^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{3}{12}x(\Delta x)^2+\frac{1}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{6}{12}x^2\Delta x+\frac{12}{12}x(\Delta x)^2+\frac{8}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{1}{12}x^3+\frac{9}{12}x^2\Delta x+\frac{27}{12}x(\Delta x)^2+\frac{27}{12}(\Delta x)^3.$$

Wird jeder Werth der Function von dem darauffolgenden abgezogen, so erhalten wir in den Ausdrücken

$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{3}{12}x(\Delta x)^2+\frac{1}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{9}{12}x(\Delta x)^2+\frac{7}{12}(\Delta x)^3,$$
$$\frac{3}{12}x^2\Delta x+\frac{15}{12}x(\Delta x)^2+\frac{19}{12}(\Delta x)^3,$$

die drei Zunahmen der Function. Die beiden Unterschiede dieser aufeinanderfolgenden Zunahmen sind

$$\frac{6}{12}x(\Delta x)^2+\frac{6}{12}(\Delta x)^3$$
$$\frac{6}{12}x(\Delta x)^2+\frac{12}{12}(\Delta x)^3.$$

Von diesen Unterschieden ist der folgende um $\frac{6}{12}(\Delta x)^3$ größer als der vorhergehende. Wir sehen also, daß bei der vorliegenden Function für beliebige gleiche Zunahmen Δx der willkürlich Veränderlichen die Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im-

Wir wollen bei dieſer Betrachtung der Reihen hauptſächlich zwei Punkte ins Auge faſſen, nämlich die Beſtimmung der Differenzen der Glieder der Reihe durch die einzelnen Glieder der als gegeben betrachteten Reihe, und die Beſtimmung der Glieder der Reihe durch die als gegeben betrachteten Differenzen der Reihenglieder, und erörtern zunächſt den erſten der angegebenen Punkte. Indem wir jedes Glied der obigen Reihe von dem darauffolgenden abziehen, erhalten wir die Zunahmen der Function, welche ſich in folgender Reihe darſtellen.

$$y_1 - y_0,\ y_2 - y_1,\ y_3 - y_2,\ y_4 - y_3, \ldots\ldots y_n - y_{n-1}.$$

Dieſe Reihe der Zunahmen heißt die erſte Differenzenreihe. Indem wir ferner jede vorhergehende Zunahme von der folgenden abziehen, erhalten wir die Reihe der Unterſchiede der Zunahmen der Function. Dieſelbe iſt folgende

$$y_2 - 2y_1 + y_0,\ y_3 - 2y_2 + y_1,\ y_4 - 2y_3 + y_2, \ldots\ldots y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2},$$

und heißt die zweite Differenzenreihe der urſprünglichen Reihe. Um die dritte Differenzenreihe zu bilden, haben wir jedes Glied der zweiten Differenzenreihe von dem darauffolgenden Glied abzuziehen. Nach Ausführung dieſer Subtraction und gehöriger Zuſammenziehung der gleichartigen Theile, ſtellen ſich die Glieder der dritten Differenzenreihe in folgender Form dar

$$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,\ y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1, \ldots\ldots y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}.$$

Daß die Glieder der vierten Differenzenreihe, entſtanden durch Abziehung eines jeden Gliedes der dritten Differenzenreihe von dem nachfolgenden, zuſammengeſetzt ſein müſſen nach Art der beiden folgenden Glieder

$$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0,\ y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1,$$

davon kann man ſich durch wirkliche Ausführung der vorgeſchriebenen Subtraction leicht überzeugen.

Betrachten wir die Glieder der ſucceſſiven Differenzenreihen, ſo ſehen wir, daß zur Bildung eines Gliedes der erſten Differenzenreihe die Kenntniß von zwei Gliedern der

ursprünglichen Reihe vorausgesetzt wird. Zur Bildung eines jeden Gliedes der zweiten Differenzenreihe braucht man drei Glieder der ursprünglichen Reihe, und so fort für jede folgende Differenzenreihe ein Glied mehr. Es fragt sich nur noch, welches Gesetz die Coefficienten der einzelnen Theile, aus denen die Glieder der successiven Differenzenreihen zusammengesetzt sind, haben. Man übersieht sogleich, daß die Coefficienten der Theile, aus denen z. B. ein Glied der dritten Differenzenreihe zusammengesetzt ist, mit den Binomialcoefficienten der dritten Potenz, und ebenso die Coefficienten der einzelnen Theile eines beliebigen Gliedes der vierten Differenzenreihe mit den Binomialcoefficienten der vierten Potenz zusammenfallen, und kann, ohne sich hierüber in einen weitläufigen Beweis einzulassen, aus den vorliegenden Fällen und aus dem ganz conformen Bildungsgesetz der Glieder der folgenden Differenzenreihen, durch Induction den sicheren Schluß ziehen, daß die Coefficienten der einzelnen Bestandtheile eines Gliedes irgend einer beliebigen Differenzenreihe mit den Binomialcoefficienten der entsprechenden Potenz zusammenfallen. Die Vorzeichen der Coefficienten wechseln regelmäßig ab, und der erste hat immer das Vorzeichen +. Das Anfangsglied einer jeden Differenzenreihe enthält als letzten Bestandtheil das Glied y_0 der ursprünglichen Reihe, und ein beliebiges Glied einer jeden Differenzenreihe schließt mit demjenigen Glied der ursprünglichen Reihe, welches ihm in seiner Rangzahl entspricht. Nimmt man zu dem zuletzt Gesagten das vorher angegebene Gesetz der Coefficienten hinzu, so liegt die Regel vollständig vor, nach welcher aus den Gliedern der ursprünglichen Reihe jedes beliebige Glied einer jeden beliebigen Differenzenreihe hergestellt werden kann. So z. B. würde für die oben aufgestellte ursprüngliche Reihe das Anfangsglied der fünften Differenzenreihe gleich sein

$$y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0$$

und etwa das sechste Glied dieser fünften Differenzenreihe gleich

$$y_{11} - 5y_{10} + 10y_9 - 10y_8 + 5y_7 - y_6.$$

Sowie wir nun eine Regel gefunden haben, nach welcher aus einer vom Anfangsglied an gerechneten Anzahl von Gliedern der ursprünglichen Reihe das Anfangsglied jeder beliebigen Differenzenreihe sich darstellen läßt, so können wir auch leicht eine Regel finden, nach welcher umgekehrt aus den Anfangsgliedern der successiven Differenzenreihen ein beliebiges Glied der ursprünglichen Reihe dargestellt werden kann. Um dies nachzuweisen, müssen wir, da jetzt die Glieder der Differenzenreihen und insbesondere ihre Anfangsglieder als das Gegebene betrachtet werden, dieselben nicht wie bisher durch Zusammensetzung aus den Gliedern der ursprünglichen Reihe, sondern durch einfache Zeichen ausdrücken, wobei jedoch diese Bezeichnung so zu bilden ist, daß aus derselben ohne Weiteres entnommen werden kann, das wievielte Glied der wievielten Differenzenreihe durch ein solches Zeichen vorgestellt wird. Es mögen daher, wenn durch $y_0\ y_1\ y_2\ y_3$ u. s. w. die Glieder der ursprünglichen Reihe vorgestellt werden, die successiven Glieder der ersten Differenzenreihe, als der Reihe der Zunahmen, ausgedrückt sein durch

$$\Delta y_0\ \Delta y_1\ \Delta y_2\ \Delta y_3 \ldots\ldots \Delta y_n.$$

Die Reihe der Unterschiede dieser Zunahmen, da sie nur wieder die erste Differenzenreihe der Reihe der Zunahmen ist, wird der eben angewandten Bezeichnung entsprechend auszudrücken sein durch

$$\Delta\Delta y_0\ \Delta\Delta y_1\ \Delta\Delta y_2\ \Delta\Delta y_3$$

wofür man zur Abkürzung setzt

$$\Delta^2 y_0\ \Delta^2 y_1\ \Delta^2 y_2\ \Delta^2 y_3.$$

Nach demselben Princip der Bezeichnung werden die vom Anfangsglied an gerechneten Glieder der dritten Differenzenreihe durch

$$\Delta^3 y_0\ \Delta^3 y_1\ \Delta^3 y_2\ \Delta^3 y_3$$

vorgestellt werden müssen, und so weiter für die folgenden Differenzenreihen.

Setzen wir nun die für die Anfangsglieder der successiven Differenzenreihen angenommenen Zeichen Δy_0 $\Delta^2 y_0$ $\Delta^3 y_0$ u. s. w. denjenigen Werthen gleich, welche diese Anfangsglieder haben, wenn sie auf die oben angegebene Art durch die Glieder der ursprünglichen Reihe ausgedrückt werden, so erhalten wir folgende Gleichungen

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$
$$\Delta^5 y_0 = y_5 - 5y_4 + 10y_3 - 10y_2 + 5y_1 - y_0.$$

In diesen Gleichungen kommen außer dem Anfangsglied so viele Glieder der ursprünglichen Reihe vor, als die Anzahl der Differenzenreihen beträgt, deren Anfangsglieder man hat. Und da die Anzahl der Gleichungen ebenso groß ist, so übersieht man leicht, daß es möglich ist, jedes Glied der ursprünglichen Reihe durch die Anfangsglieder der Differenzenreihen mit Einschluß des Anfangsgliedes der ursprünglichen Reihe auszudrücken, sobald man nur die Anfangsglieder der Differenzenreihen bis zu derjenigen Rangzahl hat, welche mit der Rangzahl des gesuchten Gliedes der ursprünglichen Reihe zusammenfällt. Um das Gesetz dieses Ausdrucks zu finden, brauchen wir nur diese Gleichungen so aufzulösen, daß die Glieder y_1 y_2 y_3 u. s. w. der ursprünglichen Reihe als die gesuchten Größen betrachtet werden, wobei man von den einfacheren Gleichungen zu den zusammengesetzteren fortschreitet, und die durch die ersteren Gleichungen erhaltenen Werthe in die folgenden Gleichungen substituirt. Aus der ersten Gleichung folgt

$$y_1 = \Delta y_0 + y_0.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$y_2 = \Delta^2 y_0 + 2y_1 - y_0$$

und wenn man in diese Gleichung den aus der vorhergehen-

den Gleichung zu entnehmenden Werth von y_1 einführt, so hat man

$$y_2 = \Delta^2 y_0 + 2\Delta y_0 + y_0.$$

Aus der dritten der obigen Gleichungen folgt zunächst

$$y_3 = \Delta^3 y_0 + 3y_2 - 3y_1 + y_0$$

und indem man die soeben für y_2 und y_1 gefundenen Ausdrücke in diese Gleichung einführt, erhält man

$$y_3 = \Delta^3 y_0 + 3\Delta^2 y_0 + 3\Delta y_0 + y_0.$$

Ebenso erhält man aus der vierten der obigen Gleichungen zunächst

$$y_4 = \Delta^4 y_0 + 4y_3 - 6y_2 + 4y_1 - y_0$$

und durch Benutzung der für y_3, y_2 und y_1 gefundenen Ausdrücke

$$y_4 = \Delta^4 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta y_0 + y_0.$$

Es ist unnöthig, in der Bildung dieser Ausdrücke weiter zu gehen, weil die Regel derselben schon hinlänglich übersichtlich hervortritt. Das vierte Glied y_4 der ursprünglichen Reihe z. B. erscheint als zusammengesetzt aus dem Anfangsglied y_0 der ursprünglichen Reihe und den Anfangsgliedern der vier ersten Differenzenreihen, und die Coefficienten dieser Bestandtheile sind die Binomialcoefficienten der vierten Potenz, wenn man diese Bestandtheile entweder so anordnet, daß man von dem Anfangsglied der vierten Differenzenreihe nach der Rangfolge abwärts geht, und mit y_0 schließt, oder so, daß man mit y_0 anfängt und die Anfangsglieder der Differenzenreihen nach ihrer Rangfolge aufwärts nimmt. Diese Regel ist so einfach, daß man sie ohne Weiteres verallgemeinern und auf jedes Glied der ursprünglichen Reihe ausdehnen kann. Das nte Glied y_n der Reihe y_0 y_1 y_2 u. s. w. u. s. w. würde, in sofern wir nur einige seiner ersten Bestandtheile hinschreiben, gegeben durch die Gleichung

$$y_n = \Delta^n y_0 + \frac{n}{1}\cdot\Delta^{n-1} y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\Delta^{n-2} y_0 \ldots\ldots$$

oder wenn wir mit y_0 anfangen, und die Anfangsglieder

der Differenzenreihen aufsteigend nehmen, gegeben durch die Gleichung

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1} \cdot \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \Delta^3 y_0 \ldots$$

Diese zweite Form der Anordnung der Bestandtheile des Werthes von y_n kommt weit öfter zur Anwendung als die erstere, weil die Reihen häufig von der Art sind, daß die Glieder ihrer höheren Differenzenreihen entweder gleich Null sind, oder doch so klein werden, daß man sie vernachlässigen kann, und man in diesem Falle also nur die Anfangsglieder der niedrigsten Differenzenreihen in den Ausdruck von y_n aufzunehmen hat.

Es versteht sich von selbst, daß man nach der eben aufgestellten Regel auch ein beliebiges Glied irgend einer Differenzenreihe durch das Anfangsglied dieser Differenzenreihe und die Anfangsglieder der nächstfolgenden Differenzenreihen ausdrücken kann, weil jede Differenzenreihe in Bezug auf die nachfolgenden Differenzenreihen als die ursprüngliche Reihe betrachtet werden kann.

Endlich hat es auch keine Schwierigkeit, die Summe einer Anzahl von Gliedern der ursprünglichen Reihe durch das Anfangsglied dieser Reihe und die Anfangsglieder der Differenzenreihen auszudrücken. Setzt man nämlich die aufeinanderfolgenden Glieder der ursprünglichen Reihe ihren durch die Anfangsglieder der Differenzenreihen ausgedrückten Werthen gleich, und stellt man demgemäß folgende Gleichungen auf,

$$y_0 = y_0$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$
$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$
$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$
$$y_4 = y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0,$$

so sieht man, daß die Summe aller auf der linken Seite der Gleichungen enthaltenen Werthe eben die Summe der Glieder der ursprünglichen Reihe bis zum vierten Gliede ausmacht, und daß dieselbe gleich sein muß der Summe aller auf der rechten Seite der Gleichungen enthaltenen Bestand-

theile. Bezeichnen wir die Summe der Glieder der ursprünglichen Reihe bis zum vierten Gliede durch Sy_4, so erhalten wir durch Addition auf der rechten Seite der Gleichungen,

$$Sy_4 = 5y_0 + 10\Delta y_0 + 10\Delta^2 y_0 + 5\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0.$$

Diese Summe ist aus den Anfangsgliedern der ursprünglichen Reihe und der aufeinanderfolgenden Differenzenreihen zusammengesetzt, und die Coefficienten dieser nach der Rangfolge der Reihen genommenen Anfangsglieder sind nichts Anderes als die Binomialcoefficienten, mit Ausschluß des ersten Binomialcoefficienten 1, und zwar so, daß bei der Summe der Glieder bis zum vierten die Binomialcoefficienten der fünften Potenz zu nehmen sind, und in ähnlicher Weise für die Summe einer jeden andern Anzahl von Gliedern der Reihe. Die Summe der Glieder bis zum nten Glied, oder Sy_n, wird, wenn wir nur die ersten Bestandtheile derselben hinschreiben, gegeben sein durch die Gleichung

$$Sy_n = (n+1)y_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}\cdot\Delta y_0 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^2 y_0 + \ldots$$

§. 117.

Arithmetische Reihen der verschiedenen Ordnungen.

Diejenigen Reihen, bei welchen die Glieder irgend einer der successiven Differenzenreihen sämmtlich unter einander gleich werden, und bei welchen mithin die folgenden Differenzenreihen verschwinden, nennt man im Allgemeinen arithmetische Reihen, und zwar heißen Reihen, bei denen die Glieder der ersten Differenzenreihe gleich sind, arithmetische Reihen der ersten Ordnung, und diejenigen, bei welchen die Glieder der zweiten, oder der dritten u. s. w. Differenzenreihe gleich sind, arithmetische Reihen der zweiten oder dritten Ordnung u. s. w. Die Lehrsätze des vorhergehenden Paragraphen, denen zu Folge ein beliebiges Glied einer Reihe sowol als die Summe der Glieder der Reihe durch die Anfangsglieder der ursprünglichen Reihe und der successiven Differenzenreihen ausgedrückt werden

kann, werden hauptsächlich wichtig und brauchbar durch ihre Anwendung auf die arithmetischen Reihen der verschiedenen Ordnungen, weil es bei diesen Reihen nur eine bestimmte und beschränkte Anzahl von Differenzenreihen gibt, und folglich sowol die Formel für ein ganz beliebiges Glied der Reihe als auch die allgemeine Summenformel der Reihe sich als ein geschlossener Ausdruck mit einer bestimmten Anzahl von Bestandtheilen darstellen wird.

Wir wollen beispielsweise an einigen arithmetischen Reihen diese Berechnungen ausführen. Zur Herstellung einer derartigen Reihe gelangt man am bequemsten, wenn man eine Function vornimmt von solcher Beschaffenheit, daß die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Functionswerthe eine arithmetische Reihe bilden. Wie man diese Functionen selbst zu bilden hat, das wird sich in dem Folgenden bald zeigen. Jetzt nehmen wir sie als zufällig Gegebene. Die Function sei $2x^2+3$. Geben wir dem x der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, so stellen die zugehörigen Functionswerthe folgende Reihe dar:

3 5 11 21 35 53 75 ....

Die erste Differenzenreihe derselben ist

2 6 10 14 18 22.

In der zweiten Differenzenreihe ist jedes Glied gleich 4, und folglich sind die Glieder der folgenden Differenzenreihen sämmtlich gleich Null zu setzen. Wenn wir die allgemeine Formel des vorhergehenden Paragraphen für das nte Glied einer Reihe, nämlich die Formel

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots.$$

auf unsere gegebene Reihe anwenden wollen, so haben wir statt y_0 die Zahl 3, statt Δy_0 die Zahl 2 und statt $\Delta^2 y_0$ die Zahl 4 zu setzen, und die Größen $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ u. s. w. sämmtlich gleich Null zu setzen, und das sechste

Glied, z. B. in dieſer Reihe wird gegeben ſein durch die Gleichung

$$y_6 = 3 + 6.2 + \frac{6.5}{1.2}.4 = 75.$$

Bezeichnen wir das xte Glied unſerer Reihe durch y_x, ſo werden wir die Gleichung

$$y_x = 3 + \frac{x}{1}.2 + \frac{x(x-1)}{1.2}.4$$

oder nach Potenzen von x geordnet

$$y_x = 3 + 2x^2$$

haben. Daß wir hier die Function, von welcher wir bei Bildung der Reihe ausgegangen ſind, wieder erhalten, iſt nicht zu verwundern, weil der von der willkürlich Veränderlichen erreichte Zahlenwerth x mit der Anzahl der Glieder der Reihe zuſammenfallen muß, wenn man, wie wir gethan haben, die willkürlich Veränderliche von Null aus immer um den Zahlenwerth 1 wachſen läßt, und bezüglich auf dieſe Zunahmen der willkürlich Veränderlichen die Differenzenreihen und ihre Anfangsglieder beſtimmt.

Wenden wir die Formel für die Summe der n erſten Glieder einer Reihe

$$Sy_n = (n+1)y_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta y_0 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^2 y_0 + -$$

auf unſere Reihe an, und berechnen nach derſelben z. B. die Summe der Glieder bis zum ſechſten, ſo erhalten wir

$$Sy_6 = 7.3 + \frac{7.6}{1.2}.2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}.4 = 203,$$

welches Reſultat durch wirkliche Addition der Glieder der Reihe leicht zu beſtätigen iſt.

Bilden wir noch eine Reihe durch die ſucceſſiven Werthe der Function $\frac{1}{2}x^2$. Geben wir dem x der Reihe nach die Zahlenwerthe $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}$ u. ſ. w., ſo ſind die zugehörigen Werthe der Function

$$0, \frac{1}{16}, \frac{8}{16}, \frac{27}{16}, \frac{64}{16}, \frac{125}{16} \ldots$$

Die Glieder der ersten Differenzenreihe sind

$$\frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{19}{16}, \frac{37}{16}, \frac{61}{16},$$

die Glieder der zweiten Differenzenreihe

$$\frac{6}{16}, \frac{12}{16}, \frac{18}{16}, \frac{24}{16},$$

und endlich die Glieder der dritten Differenzenreihe sind constant und gleich $\frac{6}{16}$. Die allgemeinen Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ haben in der vorliegenden Reihe die Werthe $0, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{6}{16}$. Ein beliebiges Glied der Reihe, z. B. das siebente, wird also gegeben durch die Gleichung

$$y_7 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{16} + \frac{7.6}{1.2} \cdot \frac{6}{16} + \frac{7.6.5}{1.2.3} \cdot \frac{6}{16} = \frac{343}{16}.$$

Lassen wir noch in der Function x^3 die willkürlich Veränderliche vom Zahlenwerth -4 aus durch Zunahmen $= 1$ wachsen, oder ertheilen wir dem x die Zahlenwerthe $-4, -3, -2, -1, -0, +1, +2$ u. s. w., so sind die zugehörigen Werthe der Function

$$-64, -27, -8, -1, 0, +1, +8, +27 \text{ u. s. w.}$$

Die Zahlen

$$+37, +19, +7, +1, +1, +7, +19$$

bilden die erste, die Zahlen

$$-18, -12, -6, 0, +6, +12$$

die zweite, und endlich die Zahlen $+6, +6$ u. s. w. die constante dritte Differenzenreihe. Da die Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ jetzt der Reihe nach die Werthe -64, $+37$, -18, $+6$ haben, so wird z. B. das fünfte Glied der vorliegenden Reihe, welches, wie man sieht, gleich $+1$ ist, gegeben sein durch die Gleichung

$$y_5 = -64 + 5 \cdot 37 - \frac{5.4}{1.2} \cdot 18 + \frac{5.4.3}{1.2.3} 6 = +1.$$

Es mag noch bemerkt werden, daß man ein beliebiges Glied einer Reihe auch vermittelst der Summenformel finden kann, da ja ein Glied einer Reihe betrachtet werden kann als bestehend aus dem Anfangsglied der Reihe und der Summe aller Zunahmen, durch deren Zusetzung jedes folgende Glied der Reihe aus dem vorhergehenden entstanden ist. Diese Zunahmen sind aber nichts Anderes als die Glieder der ersten Differenzenreihe. Jedoch hat man, wenn man das nte Glied einer Reihe auf diesem Wege berechnen will, natürlich in der ersten Differenzenreihe nur die Summe der Glieder bis zum (n—1)ten Glied zu nehmen. Für die erste Differenzenreihe, als ursprüngliche Reihe betrachtet, stellt Δy_0 das Anfangsglied, und $\Delta^2 y_0$ das Anfangsglied der ersten Differenzenreihe u. s. w. vor. Nach der allgemeinen Summenformel ist die Summe der Glieder dieser Reihe bis zum (n—1)ten Glied gleich

$$n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}.\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots$$

Setzt man zu dieser Summe der Glieder der ersten Differenzenreihe das Anfangsglied y_0 der ursprünglichen Reihe hinzu, so fällt diese Formel mit der für das nte Glied der ursprünglichen Reihe gegebenen Formel zusammen.

Hat man eine arithmetische Reihe einer beliebigen Ordnung nach irgend einer Regel gebildet, und man will die Glieder einer solchen Reihe betrachten als die successiven Werthe einer Function der willkürlich Veränderlichen x, so ist es nicht schwer eine Function von x zu finden, welche dieser Bedingung Genüge leistet. Freilich können viele Functionen von der Beschaffenheit sein, daß ihre mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen successiven Werthe die Glieder der vorgelegten Reihe liefern. Die Form dieser Function hängt nämlich noch von zwei willkürlichen Annahmen ab. Es muß erstens festgesetzt werden, welchen Werth die Function haben soll für den Nullwerth von x, und zweitens, wie groß die gleichen Zunahmen von x genommen werden sollen, um in den zuge-

hörigen Functionswerthen die Glieder der Reihe darzustellen. Von den Functionen, welche der gegebenen Bedingung genügen, läßt sich diejenige am leichtesten finden, welche für den Nullwerth des x das Anfangsglied der Reihe gibt, und welche der Annahme entspricht, daß die Zunahmen von x gleich 1 gesetzt sind, weil in diesem Falle die für das allgemeine Glied der Reihe aufgestellte Formel unmittelbar die gesuchte Function darbietet. Denn unter den eben gemachten Annahmen fällt der von der willkürlich Veränderlichen wachsend erreichte Zahlenwerth mit der Anzahl der Glieder der Reihe unmittelbar zusammen, und indem man mittelst der für das allgemeine Glied der Reihe geltenden Formel dies allgemeine Glied als Function der Anzahl der Glieder ausdrückt, hat man dasselbe zugleich als Function des jedesmaligen Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt.

Es sei z. B. die folgende Reihe

1 3 6 10 15 21 28

gebildet nach der Regel, daß jedes Glied der Reihe die Summe ist von so viel Gliedern der natürlichen Zahlenreihe, als mit Einschluß des Anfangsgliedes die Rangzahl dieses Gliedes angibt, so daß z. B. dasjenige Glied, welches mit Einschluß des Anfangsgliedes das fünfte ist, die Summe der Zahlen von 1 bis 5 enthält. Es soll die Function von x gesucht werden, deren Werthe die Glieder dieser Reihe darstellen in dem Falle, daß man das x immer um die Zahl 1 wachsen läßt, und das Anfangsglied der Reihe dem Functionswerth gleich ist für $x=0$. Wir haben mithin nur das allgemeine Glied der Reihe als Function der Anzahl der Glieder der Reihe darzustellen. Die erste Differenzenreihe unserer gegebenen Reihe liefert die Zahlen 2, 3, 4, 5, u. s. w. und die Glieder der zweiten Differenzenreihe sind gleich 1. Die allgemeinen Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$ erhalten also die Werthe 1, 2, 1. Das xte Glied der Reihe, oder y_x, ist mithin gleich

$$1 + x : 2 + \frac{x(x-1)}{1.2} . 1$$

oder nach Potenzen von x geordnet gleich

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2} .$$

Gibt man in dieſer Function dem x der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3 u. ſ. w., ſo erhält man die Glieder der gegebenen Reihe als die Werthe der Function.

Die Glieder der Reihe

$-64, -27, -8, -1, 0, +1, +8$ u. ſ. w.

hatten wir oben erhalten als die Werthe der Function x^3, in ſofern wir das x vom Zahlenwerth -4 aus immer um 1 wachſen ließen. Wir nehmen an, dieſe Reihe wäre unmittelbar vorgelegt, und man ſuchte eine Function von x, deren Werthe dieſe Reihe darſtellen. Wenn wir nach der allgemeinen Formel das xte Glied der Reihe darſtellen, ſo werden wir natürlich nicht die Function x^3, ſondern vielmehr eine Function von x erhalten, deren Werthe die Glieder dieſer Reihe geben unter der Annahme, daß das x vom Nullwerth aus immer um die Einheit wächſt. Die allgemeinen Ausdrücke y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ haben für unſere Reihe die Werthe $-64, +37, -18, +6$. Das xte Glied der Reihe, y_x, wird demnach gegeben ſein durch die Gleichung

$$y_x = -64 + x.37 - \frac{x(x-1)}{1.2} . 18 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} . 6$$

oder nach Potenzen von x geordnet durch

$$y_x = -64 + 48x - 12x^2 + x^3 .$$

Die Werthe dieſer Function liefern, wie man ſieht, die Glieder der gegebenen Reihe, wenn man dem x die Zahlenwerthe 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. beilegt. Wenn wir aber eine Function von x haben wollten, deren Werthe die Glieder unſerer Reihe darſtellen unter der Annahme, daß das x vom Zahlenwerth -4 aus um Zunahmen $= 1$ wächſt, ſo iſt dieſelbe leicht aus der gefundenen Function herzuleiten. Denn man ſucht eine Function von x, welche

mit der gegebenen Function gleichen Werth hat, sobald der Zahlenwerth das x in der gesuchten Function um 4 kleiner ist als der Zahlenwerth des x in der gegebenen Function. Setzt man also in die gegebene Function statt x überall $4+x$, so erhält man eine Function von x, welche der an die gesuchte Function gestellten Forderung genügt. Wir setzen also

$$y_x = -64+48(4+x)-12(4+x)^2+(4+x)^3$$

und erhalten nach Ausführung der vorgeschriebenen Potenzirungen

$$y_x = x^3$$

und damit diejenige Function, von welcher wir oben bei der Bildung der gegebenen Reihe ausgegangen waren.

Wenn wir noch für die Reihe

$$0, \frac{1}{16}, \frac{8}{16}, \frac{27}{16}, \frac{64}{16}, \frac{125}{16},$$

deren Glieder wir oben erhielten, indem wir in der Function $\frac{1}{2}x^3$ das x vom Nullwerth aus um Zunahmen $=\frac{1}{2}$ wachsen ließen, das xte Glied suchen, so erhalten wir, da $y_0\ \Delta y_0\ \Delta^2 y_0\ \Delta^3 y_0$ die Zahlenwerthe $0, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{6}{16}$ haben,

$$y_x = 0+x.\frac{1}{16}+\frac{x(x-1)}{1.2}\cdot\frac{6}{16}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\cdot\frac{6}{16}$$

oder nach Potenzen von x geordnet

$$y_x = \frac{x^3}{16}.$$

Die Werthe dieser Function liefern die Glieder der vorgelegten Reihe, wenn wir das x vom Nullwerth aus um die Zahl 1 wachsen lassen. Wollten wir aber eine Function von x haben, welche für Zunahmen des x im Werthe von $\frac{1}{2}$ die Glieder unserer Reihe liefert, so ist die gesuchte Function von der Art, daß sie für halb so große Werthe der willkürlich Veränderlichen dieselben Functionswerthe gibt

als die Function $\frac{x^3}{16}$. Wenn wir demnach $2x$ ſtatt x in die gegebene Function ſetzen, ſo erhalten wir in $\frac{(2x)^3}{16}$ oder in $\frac{1}{2}x^3$ die geſuchte Function. Man wird hieraus ohne Weiteres entnehmen können, wie man allerwärts zu verfahren hat, um eine Function zu finden, deren ſucceſſiven Werthe bei einer vorgeſchriebenen Größe der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen und einem vorgeſchriebenen Anfangswerth derſelben die Glieder irgend einer vorgelegten arithmetiſchen Reihe liefern.

§. 118.

Allg. Function der gleichmäßig wachſenden Beſchleunigung des Wachſens.

Nach dieſer Darſtellung einiger allgemeinen Eigenſchaften der Reihen kehren wir zurück zu den Größen, bei welchen die Beſchleunigung des Wachſens eine gleichmäßig wachſende iſt. Da bei Größen dieſer Art mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen ſolche Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden ſein ſollen, deren Unterſchiede immer um gleichviel größer oder kleiner werden (ſ. §. 115), ſo bilden die ſucceſſiven Werthe der abhängig Veränderlichen eine arithmetiſche Reihe der dritten Ordnung. Es fragt ſich alſo, durch was für eine Function der willkürlich Veränderlichen der Werth einer ſolchen Größe ausgedrückt erſcheinen muß. Wir denken uns die willkürlich Veränderliche vom Nullwerth aus wachſend durch lauter gleiche Incremente im Werth von $\frac{1}{m}$. Der Werth, den die abhängig Veränderliche hat für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen, heiße y_0. Die Größe y_0 iſt alſo das Anfangsglied der Reihe, welche durch die ſucceſſiven Werthe der abhängig Veränderlichen gebildet wird. Da dieſe Reihe eine arithmetiſche Reihe der dritten Ordnung iſt, ſo enthält ſie ein Anfangsglied der erſten, der zweiten und der dritten Differenzenreihe, und dieſe Anfangsglieder

mögen durch Δy_0, $\Delta^2 y_0$ und $\Delta^3 y_0$ vorgestellt sein. Das nte Glied der Reihe, d. h. der Werth der abhängig Veränderlichen, welcher n Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entspricht, wird also gegeben sein durch die Formel

$$y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\Delta^3 y_0$$

oder nach Potenzen von n, als der Veränderlichen in diesem Ausdruck, geordnet, durch

$$y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3}\right)n + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right)n^2 + \frac{\Delta^3 y_0}{6}n^3.$$

Unsere Absicht ist aber nicht, den allgemeinen Werth der abhängig Veränderlichen als Function der Zahl n, d. h. der Anzahl der Glieder einer Reihe zu haben, sondern vielmehr als Function des beliebigen Zahlenwerthes der willkürlich Veränderlichen. Dies Letztere ist aber mit Hülfe der gefundenen Function von n leicht zu erreichen. Denn da bis zum nten Gliede der Reihe n Zunahmen der willkürlich Veränderlichen im Werthe von $\frac{1}{m}$ genommen sind, so ist der Zahlenwerth der willkürlich Veränderlichen, welcher dem aufgestellten Werth der abhängig Veränderlichen zugehörig ist, gleich $\frac{n}{m}$. Wenn wir nun in diesem Werth der abhängig Veränderlichen den zweiten Bestandtheil mit m, den dritten mit m^2 und den letzten mit m^3 multiplicirten und zugleich dividiren, so nimmt er folgende Form an:

$$y_0 + m\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3}\right]\frac{n}{m} + m^2\left[\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2}\right]\left(\frac{n}{m}\right)^2 + m^3\frac{\Delta^3 y_0}{6}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^3$$

und die abhängig Veränderliche erscheint durch eine Function des Zahlenwerthes $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt. Wenn man absieht von der Art, wie die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\frac{n}{m}$ aus den Anfangs-

gliedern der succeſſiven Differenzenreihen zuſammengeſetzt ſind, und nur beachtet, daß dieſe Coefficienten, ſowie die Größe y_0, überhaupt conſtante Zahlen vorſtellen, während $\frac{n}{m}$ die willkürlich Veränderliche iſt, ſo ſieht man, daß jede Größe mit gleichmäßig wachſender Beſchleunigung des Wachſens gegeben iſt durch eine Function des Zahlenwerthes x der willkürlich Veränderlichen von folgender Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Ehe wir an die Folgerungen gehen, welche aus dieſer allgemeinen Function gezogen werden können für die im dritten Grad gleichmäßig wachſenden Größen, wollen wir, um nicht in dem Folgenden bei Betrachtung der in höheren Graden gleichmäßig wachſenden Größen auf dieſe nämliche Art der Ableitung der allgemeinen Function zurückkommen zu müſſen, bei dieſer Gelegenheit gleich mitbeſtimmen, durch welche Functionen der willkürlich Veränderlichen der Werth der abhängig Veränderlichen ausgedrückt erſcheinen muß, wenn die durch gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entſtehenden Werthe der abhängig Veränderlichen eine arithmetiſche Reihe von einer höheren als der dritten Ordnung bilden. Es mögen die Werthe der abhängig Veränderlichen zuerſt eine arithmetiſche Reihe der vierten Ordnung bilden. Die willkürlich Veränderliche wachſe vom Nullwerth aus um Zunahmen im Werthe von $\frac{1}{m}$. Das Anfangsglied der Reihe ſei wieder durch y_0 und die Anfangsglieder der vier erſten Differenzenreihen durch Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ vorgeſtellt. Das nte Glied der Reihe iſt alsdann gleich

$$y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\Delta^4 y_0$$

oder nach Potenzen von n geordnet, gleich

$$y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right) n + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{2} + \frac{11\Delta^4 y_0}{24}\right) n^2 + \left(\frac{\Delta^3 y_0}{6} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right) n^3 + \frac{\Delta^4 y_0}{24} \cdot n^4.$$

Dieser Ausdruck für das nte Glied der Reihe der Functionswerthe stellt denjenigen Werth der abhängig Veränderlichen vor, welcher dem Werth $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen zugehörig ist. Wenn wir in diesem Ausdruck den zweiten Bestandtheil mit m, den dritten mit m^2 u. s. w. multipliciren und dividiren, so stellt er sich dar als eine Function des Zahlenwerthes $\frac{n}{m}$ der willkürlich Veränderlichen. Sehen wir dabei ab von der Art der Zusammensetzung der constanten Coefficienten der Potenzen von $\frac{n}{m}$, und stellen wir den beliebigen Zahlenwerth $\frac{n}{m}$ durch x vor, so ist eine im vierten Grad gleichmäßig wachsende abhängig Veränderliche gegeben durch eine Function von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Auf dieselbe Art wird sich beweisen lassen, daß jede abhängig Veränderliche, deren durch gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entstehenden successiven Werthe eine arithmetische Reihe der fünften Ordnung bilden, dargestellt wird durch eine Function von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5.$$

Allgemein wird eine abhängig Veränderliche, deren successiven Werthe eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung bilden, durch eine endliche Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt erscheinen, und zwar wird die Rangzahl der höchsten Potenz zusammenfallen mit der Rangzahl derjenigen Differenzenreihe, welche aus gleichen Gliedern besteht. Da nun eine abhängig Veränderliche, deren Werthe eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung bilden, oder bei welcher man zuletzt in einer höheren

Stufe auf lauter gleiche Zunahmen der Functionswerthe geführt wird, immer durch eine endliche Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt wird, so sieht man, daß nur eine solche Potenzenreihe eine Größe darstellt, bei welcher das Gesetz des Wachsens zur Ruhe und zum Abschluß gelangt, und welche ein über ihren ganzen Verlauf sich gleichmäßig erstreckendes unveränderliches Gesetz des Wachsens hat.

Kehren wir zurück zu der eine jede gleichmäßig wachsende Beschleunigung des Wachsens ausdrückenden allgemeinen Function $a + bx + cx^2 + dx^3$. Da jede Function, deren Werthe eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung bilden, als besonderer Fall in dieser allgemeinen Function enthalten ist, so fragt es sich zunächst, ob auch umgekehrt die Werthe dieser Function immer eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung bilden, sobald man das x um beliebige gleiche Zunahmen wachsen läßt. Es ist klar, daß man, um hierüber zu entscheiden, nur nöthig hat, den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function allgemein auszudrücken. Zu diesem allgemeinen Ausdruck gelangen wir aber, wenn wir die willkürlich Veränderliche dreimal um die Zunahme Δx wachsen lassen, oder derselben die vier Werthe x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, und $x + 3\Delta x$ beilegen, die zugehörigen Werthe der Function berechnen, und dann durch Abziehung erst die Zunahmen, dann die Unterschiede der Zunahmen, und zuletzt den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen bestimmen. Als Resultat dieser etwas weitschweifigen, übrigens aus dem Vorhergehenden schon geläufigen und deswegen hier nicht weiter auszuführenden Rechnung findet man, daß dieser Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen unserer Function gleich ist $6d(\Delta x)^3$. Bezeichnen wir den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen einer Function $f(x)$ als die dritte Differenz der Function durch $\Delta\Delta\Delta f(x)$ oder abgekürzt durch $\Delta^3 f(x)$, so können wir das eben ausgesprochene Resultat auch darstellen durch die analytische Gleichung

$$\Delta^3[a + bx + cx^2 + dx^3] = 6d(\Delta x)^3.$$

Da für dasselbe Δx der Zuwachs der Unterschiede der Zu-

nahmen unſerer Function conſtant iſt, ſo ſehen wir, daß dieſelbe immer eine im dritten Grad gleichmäßig wachſende Größe ausdrückt. Zugleich ſehen wir, daß dieſer Zuwachs der Unterſchiede der Zunahmen, d. h. die Veränderung der Beſchleunigung des Wachſens, nur von dem Coefficient d abhängt, aber nicht von den Coefficienten a, b und c, und daß dieſe Coefficienten ſich alſo nur beziehen können auf die Stärke des Wachſens und die Beſchleunigung des Wachſens der Function. Da der Zuwachs der Unterſchiede der Zunahmen oder die dritte Differenz unſerer allgemeinen Function im cubiſchen Verhältniß von Δx ab- und zunimmt, ſo werden wir, wenn wir dieſe dritte Differenz durch $(\Delta x)^3$ dividiren, einen von dem zufälligen Größenwerth des Δx unabhängigen conſtanten Ausdruck erhalten, welcher dient als Maß für die conſtante Stärke des Wachſens, mit welcher die Beſchleunigung des Wachſens unſerer Function ſich verändert.

Auf dieſelbe Weiſe, wie in §. 112 gezeigt worden iſt, daß die durch die Ausdrücke $\frac{\Delta^2 fx}{(\Delta x)^2}$ und $\Delta \frac{\left(\frac{\Delta fx}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$ angedeutete verſchiedene Aufeinanderfolge von Operationen auf eine und dieſelbe Function von x führt, läßt ſich auch zeigen, daß man auf daſſelbe Reſultat kommt, mag man nun die Function f(x) der durch den Ausdruck $\frac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2}$ angedeuteten und in dem Vorhergehenden ausgeführten Folge von Operationen unterwerfen, oder mag man von dem Differenzquotienten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ noch einmal den Differenzquotient und von dieſem abermals den Differenzquotient nehmen. Da nun die durch die letztere Folge von Operationen erhaltene Function von x offenbar der dritte Differenzquotient von f(x) iſt, ſo nennt man auch den Ausdruck $\frac{\Delta^3 f(x)}{(\Delta x)^3}$, d. h. die Zunahme des Unterſchieds der Zunahmen der Function dividirt durch die dritte Potenz der Zu-

nahme des willkürlich Veränderlichen, den dritten Differenzquotienten: Nach dem Vorhergehenden ist für alle im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größen der dritte Differenzquotient constant, und die Gleichung $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3} = a$ ist für diese Art von Größen ebenso charakteristisch, als es die Gleichung $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = a$ für die gleichförmig beschleunigt wachsenden Größen, und die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ für die gleichmäßig wachsenden war. Setzt man $\Delta x = 1$, so fällt der constante Werth des dritten Differenzquotienten zusammen mit $\Delta^3 y$, oder mit dem Zuwachs des Unterschiedes der Zunahmen der abhängig Veränderlichen. Die Bedeutung, welche der dritte Differenzquotient $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ für das Wachsen der Größen y und x hat, läßt sich mithin am kürzesten aussprechen, wenn man, wie es im gemeinen Leben bei Bezeichnung jeder Art des Wachsens durchaus üblich ist, die willkürlich Veränderliche immer um die Zahl 1 wachsend denkt. Findet sich also der dritte Differenzquotient einer abhängig Veränderlichen gleich a, so heißt dies: Jeder folgende Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen ist um a größer als der vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst.

Was die Artunterschiede des Wachsens betrifft, welche dadurch eintreten, daß die Beschleunigung des Wachsens veränderlich gesetzt wird, so sieht man sogleich, daß jede von den vier beim zweiten Differentialquotienten aufgeführten Arten des Wachsens im zweiten Grad, nämlich die Beschleunigung und Retardation des Wachsens und Abnehmens, sowol eine wachsende als eine abnehmende sein kann. Sind z. B. die Zunahmen positiv und ebenso die Unterschiede der Zunahmen, d. h. hat man eine Beschleunigung des Wachsens im engeren Sinne, so können diese Un-

schiede der Zunahmen sowol größer als kleiner werden. Im ersteren Falle wird man eine zunehmende Beschleunigung des Wachsens haben, und der dritte Differenzquotient wird positiv sein; im zweiten Falle wird man eine abnehmende Beschleunigung des Wachsens und einen negativen dritten Differenzquotienten haben. Ferner sind bei einer Retardation des Wachsens die Zunahmen positiv und die Unterschiede der Zunahmen negativ. Werden diese negativen Unterschiede immer kleiner, so wird man diese Veränderung als eine abnehmende Retardation des Wachsens zu bezeichnen haben. Und da die negativen Unterschiede der Zunahmen nur durch den Zusatz einer positiven Größe kleiner werden können, so wird man in diesem Falle einen positiven dritten Differenzquotienten haben. Werden aber bei einer Retardation des Wachsens die negativen Unterschiede der Zunahmen immer größer, so wird diese Veränderung als eine zunehmende Retardation des Wachsens zu bezeichnen, und der dritte Differenzquotient negativ sein. Ebenso wird die Beschleunigung des Abnehmens eine zunehmende oder abnehmende sein, jenachdem die negativen Unterschiede der Zunahmen größer oder kleiner werden, d. h. jenachdem der dritte Differenzquotient negativ oder positiv wird. Und endlich wird die Retardation des Abnehmens eine zunehmende oder abnehmende sein, jenachdem die dabei stattfindenden positiven Unterschiede der Zunahmen größer oder kleiner werden, d. h. jenachdem der dritte Differenzquotient positiv oder negativ ist.

Aus den Vorzeichen des ersten und zweiten Differentialquotienten, und dem Vorzeichen des dritten Differenzquotienten läßt sich, wie man sieht, leicht beurtheilen, welche von den acht verschiedenen Arten des Wachsens im dritten Grad man vor sich hat. Allgemein wird jede von den vier durch die Vorzeichen des ersten und zweiten Differentialquotienten angezeigten vier Arten des Wachsens im zweiten Grad eine zunehmende sein, wenn der dritte Differenzquotient gleiches Vorzeichen mit dem zweiten Diffe-

der Figur 59. Vor dem Punkt e ist er also negativ und nachher positiv. Im Punkt e geht mithin die Curve aus Concavität in Convexität über. (Wir wollen, beiläufig bemerkt, die Begriffe der Convexität und Concavität nicht darnach bestimmen, ob die Curve der Abscisse ihre erhabene oder ihre hohle Seite zukehrt, weil bei dieser Bestimmung dasselbe Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten bald Convexität bald Concavität anzeigt, jenachdem die Ordinaten positiv oder negativ sind, sondern wir wollen überall, wo eine Retardation des Wachsens oder eine Beschleunigung des Abnehmens stattfindet, d. h. wo der zweite Differentialquotient negativ ist, die Curve concav, und wo derselbe positiv ist, die Curve convex nennen, was man geometrisch dadurch bezeichnen kann, daß man die Curve concav nennt, sobald man in der Richtung des Wachsens der Ordinaten fortschreitend auf die hohle Seite der Curve trifft, und convex, sobald man in dieser selben Richtung auf der Ordinate fortschreitend auf die erhabene Seite der Curve trifft.) Um den ersten Differentialquotienten unserer Function, welcher gleich $\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{11}{2}$ ist, in Bezug auf den Wechsel seines Vorzeichens zu untersuchen, setzen wir denselben gleich Null. Aus der Gleichung $\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{11}{2}=0$ folgen für x die beiden Werthe $x=4-\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $x=4+\frac{2}{\sqrt{3}}$. Diese beiden Werthe möge die Abscisse haben in den Punkten m und n der Fig. 59. Wenn wir in der Richtung des Wachsens der Abscisse fortschreiten, so ist der erste Differentialquotient vor dem Punkt m, in welchem er zum ersten Mal gleich Null wird, positiv, und nach demselben negativ, und bleibt negativ, bis er im Punkt n zum zweiten Mal gleich Null wird, und aus negativen Werthen wieder in positive übergeht. In den Punkten m, e und n treten also die Wechsel der Vorzeichen

des ersten und zweiten Differentialquotienten ein, und durch diese Punkte werden die vier Intervalle begrenzt, innerhalb welcher die möglichen vier Arten des Wachsens im dritten Grade stattfinden. Bis zum Punkt m ist der erste Differentialquotient positiv und der zweite negativ, es findet also Retardation des Wachsens statt; und da der dritte Differenzquotient durchaus positiv ist, so hat man bis zum Punkt m eine abnehmende Retardation des Wachsens. Zwischen den Punkten m und e, wo der erste und zweite Differentialquotient negativ ist, und also eine Beschleunigung des Abnehmens stattfindet, ist dieselbe vermöge des positiven dritten Differenzquotienten eine abnehmende. Auf dieselbe Weise findet man durch Combination der Vorzeichen, daß zwischen e und n eine zunehmende Retardation des Abnehmens, und von n an eine zunehmende Beschleunigung des Wachsens stattfindet.

Um die übrigen vier Arten des im dritten Grad gleichmäßigen Wachsens an den Ordinaten einer Curve zu versinnlichen, müssen wir eine Curve mit negativem dritten Differenzquotienten ihrer Ordinaten nehmen. Die Gleichung der Curve sei

$$y=\frac{5}{3}-3x+2x^2-\frac{1}{3}x^3.$$

Um den Lauf der Curve durch einige Punkte annähernd zu bestimmen, so geben wir der Abscisse ag (Fig. 60) in den Punkten a, b, c, d, e, f, g der Reihe nach die Zahlenwerthe -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, und erhalten die diesen Punkten zugehörigen Ordinaten gleich $7, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -5$. Der dritte Differenzquotient der vorliegenden Function ist gleich -2. Der zweite Differentialquotient derselben ist gleich $4-2x$, und wird gleich Null für $x=2$, oder im Punkt d der Abscisse. Vorher ist er positiv und nachher negativ, und die Curve geht im Punkt d aus Convexität in Concavität über. Der erste Differentialquotient, welcher gleich $-3+4x-x^2$ ist, wird

gleich Null für zwei Werthe von x, nämlich für $x=2-1$ und für $x=2+1$, oder in den Punkten c und e der Abſciſſe. Bis zum Punkte c iſt er negativ, von c bis e poſitiv, und von e aus wieder negativ. Aus der Combination der Vorzeichen der beiden Differentialquotienten mit dem conſtanten negativen dritten Differenzquotienten wird man leicht entnehmen, daß bis zum Punkte c eine abnehmende Retardation des Abnehmens, zwiſchen c und d eine abnehmende Beſchleunigung des Wachſens, zwiſchen d und e eine zunehmende Retardation des Wachſens, und endlich von e aus eine zunehmende Beſchleunigung des Abnehmens ſtattfindet.

Um zu überſehen, welche Eigenthümlichkeiten in Betreff des Wachſens allgemein einer jeden Curve, deren Ordinaten im dritten Grad gleichmäßig wachſen, beizulegen ſind, unterſuchen wir die allgemeine Gleichung

$$y=a+bx+cx^2+dx^3.$$

Da man dem x immer einen ſo großen poſitiven oder negativen Werth beilegen kann, daß das Glied dx^3 die Summe aller übrigen Glieder übertrifft, ſo folgt, daß, wenn d poſitiv iſt, bei wachſendem x die Curve zuletzt in einen unendlichen Zweig mit poſitiven Ordinaten und bei abnehmendem x in einen unendlichen Zweig mit negativen Ordinaten auslaufen muß, und daß, wenn d negativ iſt, die Curve nach der Seite des Wachſens von x in einen unendlichen Zweig mit negativen Ordinaten, und nach der Seite des Abnehmens von x in einen unendlichen Zweig mit poſitiven Ordinaten auslaufen muß. Der zweite Differentialquotient unſerer allgemeinen Function iſt gleich $2c+6dx$. Wird derſelbe gleich Null geſetzt, ſo hat das x in dieſer Gleichung nothwendig immer Einen reellen Werth, für welchen Werth von x zugleich der zweite Differentialquotient immer ſein Vorzeichen wechſelt. Mithin hat die Curve immer einen Wendungspunkt, in welchen ſie aus Convexität in Concavität oder umgekehrt übergeht. Ob der zweite Differentialquotient in dieſem Punkt aus negativen in poſitive

oder umgekehrt aus positiven in negative Werthe übergeht, das hängt nur von dem Vorzeichen von d ab. Ist d positiv, so hat der zweite Differentialquotient vor seinem Nullwerth negative und nach demselben positive Werthe, und die Curve geht, wie die in Fig. 59 aus Concavität in Convexität über. Ist d negativ, so geht aus denselben Gründen die Curve aus Convexität in Concavität über wie Fig. 60.

Der erste Differentialquotient unserer allgemeinen Function ist $b+2cx+3dx^2$. Bei positivem Werth desselben ist die Ordinate im Wachsen und bei negativem im Abnehmen. Geht er mit Zeichenwechsel durch den Nullwerth, so geht die Ordinate aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über. Setzen wir daher den ersten Differentialquotienten gleich Null, so hat die Gleichung $b+2cx+3dx^2=0$ bekanntlich entweder zwei reelle Wurzeln oder gar keine, d. h. die Ordinate geht entweder an zwei Stellen aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über, wie bei den Curven Fig. 59 und 60, oder an gar keiner Stelle. Um diesen letzteren Fall durch ein Beispiel zu erläutern, so nehmen wir an, die Gleichung der Curve sei $y=5x-2x^2+\frac{x^3}{3}$. Die dieser Gleichung entsprechende Curve hat ungefähr die Gestalt der Linie afghi Fig. 61, wobei der Nullpunkt der Abscisse in a genommen ist, und die Incremente ab, bc, cd, de sämmtlich gleich 1 gesetzt sind. Der erste Differentialquotient der gegebenen Function ist $5-4x+x^2$. Die Gleichung $5-4x+x^2=0$ gibt keine reellen Werthe von x; der erste Differentialquotient ist vielmehr für alle Werthe von x positiv, und die Ordinate durchaus im Wachsen begriffen. Der zweite Differentialquotient $2x-4$ wird Null für $x=2$, und daher ist im Punkte g der Curve ein Wendungspunkt. Bis zum Punkte g haben die Ordinaten eine abnehmende Retardation des Wachsens und von da an eine zunehmende Beschleunigung des Wachsens, und weitere Unterschiede in der Art

des Wachsens treten nicht hervor. Es mag noch bemerkt werden, daß in dem Falle, in welchem man in der allgemeinen Function $a+bx+cx^2+dx^3$ die Coefficienten b und c gleich Null setzt, der erste Differentialquotient $3dx^2$ allerdings für nur Einen Werth von x gleich Null wird, nämlich für $x=0$, aber in diesem Falle ohne Zeichenwechsel durch den Nullwerth hindurchgeht, und folglich auch die Ordinaten nicht aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt übergehen können, sondern stets wachsend oder abnehmend bleiben, wie z. B. die Ordinaten der Curve Fig. 56, welche nach der Gleichung $y=\frac{1}{4}x^3$ construirt war.

Nachdem wir gesehen haben, daß jedes gleichmäßige Wachsen oder Abnehmen der Beschleunigung oder Retardation des Wachsens oder Abnehmens der Parallelordinaten sich nach Art und Größe leicht construiren läßt, so wollen wir noch kurz die Construction der durch Parallelcoordinaten beschriebenen Flächenräume betrachten, welche im dritten Grad gleichmäßig wachsend sind. Wir wissen, daß die durch die Parallelordinaten einer graden Linie beschriebenen Flächenräume gleichmäßig wachsend im zweiten Grade sind. Es ist früher bei Gelegenheit der Betrachtung dieser Flächenräume der Kürze wegen nur von gleichförmiger Beschleunigung oder Retardation des Wachsens die Rede gewesen. Um aber die vorliegende Untersuchung vollständig zu führen, ist es nöthig, sich über den Begriff der negativen Flächen zu verständigen, und für ein Zunehmen der Abscisse ein Abnehmen des durch die Ordinate beschriebenen Flächenraums nachzuweisen. Wenn wir aus der Coordinatengleichung einer Linie, z. B. der graden Linie, durch Integration die Gleichung für den von den Ordinaten dieser Linie beschriebenen Flächenraum ableiten, so sehen wir, daß diese Gleichung nur in sofern allgemein gültig und auf den gesammten durch positive und negative Ordinaten beschriebenen Flächenraum anwendbar ist, als man die durch nega-

tive Ordinaten beschriebenen Flächenstücke als negative Bestandtheile der Fläche betrachtet. Mithin werden, sobald die Ordinaten negativ sind, mit den Zunahmen der Abscisse negative Zunahmen der Fläche, also ein Abnehmen der Fläche, verbunden sein. Hiernach läßt sich auch die gleichförmige Beschleunigung oder Retardation des Abnehmens der Fläche an den von den Ordinaten einer graden Linie beschriebenen Flächen nachweisen. Sind die Ordinaten der graden Linie im Abnehmen, wie in Figur 53, so werden bei negativen Ordinaten die negativen Flächenzunahmen immer um gleichviel größer, und es wird mithin eine gleichförmige Beschleunigung des Abnehmens der Fläche stattfinden. Sind aber die Ordinaten der graden Linie im Wachsen, so werden bei negativen Ordinaten die negativen Flächenzunahmen immer um gleichviel kleiner, und es wird also eine Retardation des Abnehmens der Fläche stattfinden. Wenn wir diese Unterschiede, welche in der Art des Wachsens der Fläche durch die positiven und negativen Ordinaten hervorgebracht werden, berücksichtigen, so wird es leicht sein, die acht verschiedenen Arten des Wachsens, welche bei im dritten Grad gleichmäßig wachsenden Größen vorkommen, auch an Flächen nachzuweisen.

Eine Fläche, die bezüglich auf eine willkürlich Veränderliche x im dritten Grad gleichmäßig wächst, ist im Allgemeinen auszudrücken durch die Function $a+bx+cx^2+dx^3$. Soll die Fläche eine durch das Fortrücken der senkrechten Parallelordinaten beschriebene sein, so fällt bekanntlich der erste Differentialquotient der Flächenfunction mit derjenigen Function der Abscisse zusammen, welche die Ordinate der Curve ausdrückt. Folglich gibt die Function $b+2cx+3dx^2$ die Ordinate derjenigen Curve, deren Fläche eine im dritten Grad gleichmäßig wachsende Größe ist. Da nun die Function $b+2cx+3dx^2$ nur die Ordinate der gemeinen Parabel ausdrückt, so kann nur die von den Ordinaten dieser Parabel beschriebene Fläche im dritten Grad gleichmäßig wachsend sein. Denken wir eine Parabel, welche,

wie die in Figur 62, ſo gegen die Abſciſſe ab liegt, daß ſie theils poſitive theils negative Ordinaten hat, und in deren Ordinatenausdruck $b+2cx+3dx^2$ der Coefficient d poſitiv iſt, ſo iſt die Ordinate, d. h. der erſte Differentialquotient der die Parabelfläche ausdrückenden Function, von a bis c poſitiv, von c bis e negativ, und über e hinaus wieder poſitiv. Der erſte Differentialquotient der Ordinate, alſo der zweite Differentialquotient der Flächenfunction iſt bis d negativ und dann poſitiv, und der dritte Differenzquotient der Flächenfunction iſt poſitiv, weil der Coefficient d poſitiv angenommen iſt. Mithin zeigt die Fläche der Parabel zwiſchen a und c bei poſitivem erſten, negativem zweiten Differentialquotienten und poſitivem dritten Differenzquotienten eine gleichmäßig abnehmende Retardation des Wachſens. Aus der Combination der in den einzelnen Intervallen ſtattfindenden Vorzeichen der beiden Differentialquotienten und des dritten Differenzquotienten der Fläche wird man leicht herleiten, daß zwiſchen c und d eine gleichmäßig abnehmende Beſchleunigung des Abnehmens, zwiſchen d und e eine gleichmäßig wachſende Retardation des Abnehmens, und von e an eine gleichmäßig wachſende Beſchleunigung des Wachſens der Fläche ſtattfindet. Iſt in dem Ausdruck $b+2cx+3dx^2$ der Ordinate der Parabel der Coefficient d negativ, und hat die Parabel theils poſitive theils negative Ordinaten, wie die in Figur 63, ſo wird man aus denſelben Gründen wie vorher mit Leichtigkeit einſehen, daß von a bis c eine gleichmäßig abnehmende Retardation des Abnehmens, von c bis d eine gleichmäßig abnehmende Beſchleunigung des Wachſens, von d bis e eine zunehmende Retardation des Wachſens, und über e hinaus eine zunehmende Beſchleunigung des Abnehmens der Fläche ſtattfindet. Man ſieht hieraus, daß ſämmtliche acht verſchiedene Arten des Wachſens, welche die im dritten Grad gleichmäßig wachſenden Größen haben können, an der Fläche der Parabel zum Vorſchein kommen, wenn man ſie in den beiden angegebenen Lagen gegen die

Abſciſſe betrachtet. Liegt die Parabel, für welche natürlich immer die durch die Gleichung $y = a + bx + cx^2$ vorgeſchriebene Lage der Coordinatenaxen vorausgeſetzt wird, ſo gegen die Abſciſſe, daß ſie nur poſitive oder nur negative Ordinaten hat, ſo geht der erſte Differentialquotient der Flächenfunction entweder niemals durch den Nullwerth, und man erhält dann entſprechend dem Fall der cubiſchen Parabel Figur 61, in welchem der erſte Differentialquotient der Ordinate niemals gleich Null wird, nur zwei Arten des Wachſens im dritten Grad, oder der erſte Differentialquotient der Flächenfunction geht, indem der Scheitel der Parabel die Abſciſſe berührt, zwar einmal durch den Nullwerth, aber ohne Zeichenwechſel, und man erhält entſprechend dem Fall der cubiſchen Parabel in Figur 56 ebenfalls nur zwei Arten des Wachſens.

Daß man auf demſelben Wege, auf welchem hier die im dritten Grad gleichmäßig wachſenden Ordinaten und Flächenräume conſtruirt worden ſind, auch zur Conſtruction beliebiger anderer räumlichen Elemente, welche im dritten Grad gleichmäßig wachſen, gelangen kann, iſt einleuchtend, und es wird folglich immer möglich ſein, auch in dem Falle, in welchem die Veränderung der Beſchleunigung des Wachſens nicht conſtant iſt, ſondern nur einen momentanen Werth hat (welcher Werth, wie wir gleich ſehen werden, durch den dritten Differentialquotienten gegeben wird), durch Conſtruction darzuſtellen, wie ein räumliches Element wachſen würde, wenn ſeine momentane Beſchleunigung des Wachſens zur Ausführung käme.

§. 120.

Von dem dritten Differentialquotienten.

Wir wiſſen, daß bei einer Function von der Form $a + bx + cx^2 + dx^3$ die durch gleiche Zunahmen der willkürlich Veränderlichen entſtehenden ſucceſſiven Functionswerthe eine arithmetiſche Reihe der dritten Ordnung bilden, und daß dies nur allein bei dieſer Function ſtattfindet.

Sobald also eine abhängig Veränderliche ausgedrückt erscheint durch eine Function, welche von der Form $a+bx+cx^2+dx^3$ abweicht, so ist man sicher, daß die bei gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen eintretenden Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer ungleichen Zuwachs erhalten werden. Es folgt daraus, daß die dritte Differenz dividirt durch $(\Delta x)^3$, d. h. der dritte Differenzquotient der Function nicht mehr constant sein kann, und zwar, daß er erstens auch für denselben Werth von Δx verschieden ausfällen muß, jenachdem man den Zahlenwerth x der willkürlich Veränderlichen, von welchem aus man die gleichen Zunahmen Δx setzt, nimmt, d. h. daß er eine Function von x sein muß, und daß er zweitens auch für denselben Werth von x verschieden ausfallen muß, jenachdem man die Zunahme Δx größer oder kleiner nimmt, d. h. daß die dritte Differenz nicht mehr im cubischen Verhältniß von Δx wachsen und abnehmen kann. Wird bei gleichen Zunahmen Δx der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function immer größer, so wird auch für denselben Werth von x der dritte Differenzquotient nothwendig mit Vergrößerung von Δx vergrößert und mit Verkleinerung von Δx verkleinert. Wird hingegen bei gleichen Zunahmen Δx der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function immer kleiner, so wird für denselben Werth von x der dritte Differenzquotient mit Vergrößerung von Δx nothwendig verkleinert, und mit Verkleinerung von Δx vergrößert. Setzt man also von einem gewissen Werth des x aus gleiche Zunahmen Δx, so kann der dadurch erhaltene dritte Differenzquotient jedenfalls nicht als Maß der für diesen Werth von x stattfindenden Veränderung der Beschleunigung des Wachsens dienen, da er mit dem zufälligen Werth Δx selbst veränderlich ist.

Zur Bestimmung der veränderlichen Stärke des Wachsens im dritten Grad führt uns folgende Betrachtung. Da mit allen auch noch so kleinen gleichen Zunahmen des x

immer ungleiche Zunahmen der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen verbunden sind, so kann diese Letztere auch nicht in der kleinsten angebbaren Strecke gleichmäßig wachsend im dritten Grade sein. Mithin hat die Beschleunigung des Wachsens eine stetig veränderliche Stärke des Wachsens. Die stetige Veränderung bringt es aber mit sich, daß diese Stärke des Wachsens im dritten Grade nach jedem Uebergang von einem Größenzustand zu einem andern alle denkbaren unzählig vielen Zwischenwerthe ihres Größenzustandes durchlaufen hat. Mithin nähert sich diese veränderliche Stärke des Wachsens um so mehr einer constanten, je kleiner man den Spielraum der Zunahmen von x setzt. Wenn man also die abhängig Veränderliche innerhalb eines kleinen Intervalls als eine im dritten Grade gleichmäßig Wachsende betrachtet, und den dritten Differenzquotienten, welchen man durch vom Anfangspunkte dieses Intervalls aus gesetzte Zunahmen Δx bestimmt, als Maß für die im Anfangspunkte dieses Intervalls stattfindende Stärke des Wachsens im dritten Grade gelten läßt, so wird der daraus hervorgehende Fehler sicherlich um so unbedeutender, je kleiner man die Zunahmen Δx setzt. Als Maß einer constanten Stärke des Wachsens im dritten Grade hat aber der dritte Differenzquotient den Sinn, daß er angibt, um wie viel jeder folgende Unterschied der Zunahmen größer ist als der vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächst. Man hat mithin die Bedeutung des mit fortgesetzter Verkleinerung von Δx immer genauer werdenden Näherungswerthes ebenso anzusehen. Obgleich nun der dritte Differenzquotient niemals den wahren Werth der momentanen Stärke des Wachsens im dritten Grade angeben kann, weil sich dieselbe auch innerhalb eines noch so kleinen Spielraums der Zunahmen Δx schon geändert hat, so wird doch, da der dritte Differenzquotient mit Verkleinerung von Δx sich einerseits ohne Ende dem wahren Werth der momentanen Stärke des Wachsens, anderseits einem bestimmten Grenzwerth

nähert, in welchen er mit Annullirung des Δx übergeht, dieser Grenzwerth des dritten Differenzquotienten der wahre Ausdruck der gesuchten momentanen Stärke des Wachsens im dritten Grade sein, und zwar in demselben Sinn, in welchem eine bestimmte Zahl eine constante Stärke des Wachsens im dritten Grade ausdrückt.

Um ein möglichst einfaches Beispiel von einem veränderlichen dritten Differenzquotienten zu geben, nehmen wir die Function $\frac{1}{6}x^4$. Lassen wir das x dreimal um die Zunahme Δx wachsen, oder geben wir der willkürlich Veränderlichen die vier Werthe x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$ und $x+3\Delta x$, berechnen die vier zugehörigen Functionswerthe, bilden durch Abziehung erst die Zunahmen, dann die Unterschiede der Zunahmen und zuletzt den Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen, so finden wir den Letzteren gleich $4x(\Delta x)^3+6(\Delta x)^4$. Wir haben also

$$\Delta^3\frac{1}{6}x^4=4x(\Delta x)^3+6(\Delta x)^4$$

und beiderseits durch $(\Delta x)^3$ dividirt

$$\frac{\Delta^3\frac{1}{6}x^4}{(\Delta x)^3}=4x+6\Delta x.$$

Dieser dritte Differenzquotient der Function $\frac{1}{6}x^4$ nähert sich mit Verkleinerung von Δx ohne Ende der Function $4x$, und dieselbe ist also der Grenzwerth des dritten Differenzquotienten, und gibt an, wie die Beschleunigung des Wachsens der Function $\frac{1}{6}x^4$ bei jedem Werthe von x wachsen würde, wenn sie ihre momentane Stärke des Wachsens beibehielte. Für $x=1$ z. B. ist die momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade durch die Zahl 4 gegeben, d. h. sie ist so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, jeder folgende Unterschied der Zunahmen der Function $\frac{1}{6}x^4$

um 4 größer sein würde als der vorhergehende, sobald man die willkürlich Veränderliche um Zunahmen $=1$ wachsen läßt, oder daß jeder folgende Unterschied der Zunahmen um $4(\Delta x)^3$ größer sein würde als der vorhergehende, wenn man der willkürlich Veränderlichen beliebige gleiche Zunahmen Δx ertheilte. Wird allgemein für einen bestimmten Werth des x der Grenzwerth des dritten Differenzquotienten einer Function von x gleich a erhalten, so heißt dies: Die für diesen Werth des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade ist so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, jeder folgende Unterschied der Zunahmen der Functionswerthe um a größer sein würde als der vorhergehende, sobald man der willkürlich Veränderlichen Zunahmen $=1$ ertheilt, oder um $a(\Delta x)^3$ größer, wenn die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen $=\Delta x$ sind.

Den Grenzwerth des dritten Differenzquotienten nennt man den dritten Differentialquotienten, und indem man auch die Bezeichnung desselben analog der für die niederen Differentialquotienten angenommenen bildet, schreibt man statt $\mathrm{Lim}\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ kurzweg $\frac{d^3y}{dx^3}$, und würde demgemäß das vorher für die Function $\frac{1}{6}x^4$ gefundene Resultat durch die Gleichung $\frac{d^3\frac{1}{6}x^4}{dx^3}=4x$ ausdrücken. Bei der Form $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ denkt man unter $\Delta^3 y$ wirkliche Zunahmen der Größe y, nämlich den Zuwachs der Unterschiede derselben, bei der Form $\frac{d^3y}{dx^3}$ hat man aber unter d^3y zu denken den Zuwachs, welchen die Unterschiede der Zunahmen der successiven Werthe der Function y annehmen würden, wenn die momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade unverändert bliebe, während Δx sowol als dx in beiden

Fällen natürlich wirkliche Zunahmen der Größe x vorstellen.

Es ist hieraus einleuchtend, wie man die Bedeutung des isolirten dritten Differentials auszusprechen hat. Man nennt nämlich den mit dx^3 multiplicirten dritten Differentialquotienten einer Function das dritte Differential dieser Function. Das Zeichen d^3y wird also das dritte Differential der Function y andeuten, und eine Differentialgleichung des dritten Grades, wie z. B. die obige Gleichung $\frac{d^3\frac{1}{6}x^4}{dx^3} = 4x$ wird mit isolirten Differentialen geschrieben $d^3\frac{1}{6}x^4 = 4x\,dx^3$. Soll die Bedeutung des isolirten dritten Differentials klar ausgesprochen werden, so muß es natürlich einen angebbaren endlichen Zahlenwerth haben, und der Begriff des Unendlichkleinen darf nicht hineingemischt werden. Diese Bedeutung liegt ja aber auch auf der Hand. Das dritte Differential einer Function y nimmt für einen bestimmten Werth des x und einen beliebig zu setzenden Zahlenwerth des dx einen bestimmten Zahlenwerth an, und dieser gibt an, wie groß die constante dritte Differenz der den gleichen Zunahmen dx zugehörigen Werthe der Function y sein würde, wenn die für diesen bestimmten Werth des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade unverändert bliebe.

In welchem Sinne das dritte Differential einer Function ein Unendlichkleines der dritten Ordnung genannt werden könne, ist leicht zu übersehen. Da in dem dritten Differential einer Function der dritte Differentialquotient mit dx^3 multiplicirt erscheint, so wird bei fortgesetzter Verkleinerung von dx das dritte Differential sich im cubischen Verhältniß von dx verkleinern, während das zweite Differential sich nur im quadratischen Verhältniß von dx verkleinert. Wenn nun beide, der dritte und zweite Differentialquotient, endliche Werthe haben, so wird durch fortge-

setzte Verkleinerung von dx das dritte Differential beliebig vielmal kleiner gemacht werden können als das zweite, d. h. man kann die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer so klein nehmen, daß der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im Vergleich zu diesen Unterschieden selbst jeden beliebig vorgeschriebenen Grad von Kleinheit überschreitet, sowie wir auch früher gesehen haben, daß man die Zunahmen der willkürlich Veränderlichen immer so klein nehmen kann, daß der Unterschied der Zunahmen der abhängig Veränderlichen im Vergleich mit diesen Zunahmen selbst jede vorgeschriebene Grenze der Kleinheit überschreitet. Denkt man sich die Verkleinerung des dx bis zum Nullwerth fortgesetzt, so werden zwar beide Differentiale, das zweite und dritte, auch schlechtweg gleich Null werden, aber sie haben vor diesem Uebergang in dem Nullwerth relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen. Wenn man mit der für das erste, zweite und dritte Differential gebrauchten Benennung eines Unendlichkleinen der ersten, zweiten und dritten Ordnung weiter nichts sagen will, als daß diese Differentiale, indem sie sich dem Nullwerth nähern, relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen, und daß jedes folgende Differential ganz beliebig vielmal kleiner angenommen werden darf als das vorhergehende, so ist gegen diese Benennung nichts einzuwenden, und es ist durch dieselbe eine Eigenthümlichkeit der successiven Differentiale bezeichnet, welche von vielfältigem Gebrauch in der Mathematik ist, und bei vielen Untersuchungen nicht entbehrt werden kann. Nur muß man zugeben, daß diese Benennung das, was sie sagen soll, nicht allzu deutlich sagt, und daß sie einer Erklärung und Rechtfertigung in dem obigen Sinne bedarf, und nicht als ein selbstverständlicher Begriff dargeboten werden darf. Dabei ist immer festzuhalten, daß diese Benennung nur ein uneigentlicher Ausdruck ist, und daß es in Wahrheit keine Größen gibt, von denen die Eine unendlich vielmal kleiner wäre als die An-

dere, weil der Punkt, bei welchem die dem Nullwerth zugehenden Differentiale in dies Verhältniß übergehen, niemals als erreicht zu denken ist. Denn so lange dx bei seiner fortgesetzten Verkleinerung den Nullwerth noch nicht erreicht hat, behalten die Differentiale auch ein endliches Größenverhältniß, und wenn dx in den Nullwerth übergegangen ist, so sind alle Differentiale auch schlechtweg gleich Null, und untereinander gleich. Endlich ist nicht zu vergessen, daß man, indem man die verschiedenen Differentiale unendlichkleine Größen höherer Ordnungen nennt, nur etwas aussagt über die relativen Werthe der Differentiale bei ihrer gemeinschaftlichen Annäherung an den Nullwerth, aber keineswegs sie selbst für sich dadurch charakterisirt, am allerwenigsten etwas über die Bedeutung der einzelnen Differentiale sagt, vermöge welcher sie die Stärke des Wachsens in irgend einem Grade ausdrücken durch einen endlichen Zahlenwerth.

Was schließlich die Herleitung und Darstellung des dritten Differentialquotienten einer Function betrifft, so ist zwar klar, daß derselbe dadurch erhalten werden kann, daß man den dritten Differenzquotienten dieser Function vollständig aufstellt, und durch Annullirung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu dem Grenzwerth desselben übergeht. Aber dieses jedenfalls sehr weitläufigen und mühsamen Verfahrens können wir uns ganz überheben, und auf viel kürzerem Wege zu demselben Ziele gelangen. Wir wissen bereits, daß der dritte Differenzquotient einer durch y vorgestellten Function von x durch eine zwiefache Weise der Aufeinanderfolge von Operationen erhalten werden kann, welche durch die beiden Formen $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$ und $\Delta\left[\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\right]$ Δx des dritten Differenzquotienten angedeutet sind. Der durch Annullirung von Δx entstehende dritte Differentialquotient

wird also nicht blos durch die Form $\frac{d^3y}{dx^3}$, sondern auch durch die Form $\frac{d\left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}$ bezeichnet werden können; und aus der letzteren Form ersieht man, daß der dritte Differentialquotient einer Function y erhalten werden kann durch dreimalige Anwendung der zur Bildung des ersten Differentialquotienten aufgestellten Regeln. Daß durch die beiden Formen $\frac{d^3y}{dx^3}$ und $\frac{d\left[\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}$ des dritten Differentialquotienten auf die beiden wesentlichen Bedeutungen desselben, gemäß welchen er erstens die momentane Veränderung der Beschleunigung des Wachsens der Größen y und x, und zweitens die momentane Stärke des Wachsens der Größen $d\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ und x angibt, hingewiesen wird, ist in die Augen fallend.

§. 121.

Construction der momentanen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens.

Die Bedeutung des dritten Differentialquotienten ist in dem vorhergehenden Paragraph allgemein, d. h. arithmetisch gegeben; man kann aber auch nach der sogenannten geometrischen Bedeutung desselben für beliebige veränderliche räumliche Größen fragen, oder man kann fragen, wie eine veränderliche Raumgröße von einem gewissen Punkte aus wachsen würde, wenn ihre in diesem Punkte vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade unverändert bliebe, ihre Stärke des Wachsens in den beiden niederen Graden aber nur den momentanen Werth hat, der ihr ohnedies in diesem Punkte zukommt. Es handelt sich

also darum, zu einer gegebenen veränderlichen Raumgröße eine andere so zu construiren, daß für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen beide Größen erstens denselben Werth, zweitens dieselbe momentane Stärke des Wachsens, drittens dieselbe momentane Beschleunigung des Wachsens haben, und daß viertens diejenige Stärke des Wachsens im dritten Grade, welche für die Eine Größe momentan ist, für die Andere constant ist. Die Darstellung dieser zweiten den angegebenen Bedingungen genügenden veränderlichen Raumgröße nennen wir die Construction der momentanen Veränderung der Beschleunigung des Wachsens.

Wäre z. B. als veränderliche Größe die Ordinate einer krummen Linie gegeben, und man wollte ihre in einem bestimmten Abscissenpunkte vorhandene momentane Stärke des Wachsens im dritten Grad construiren, so wird diese Construction dargestellt durch die Ordinate einer andern krummen Linie, welche für diesen Abscissenpunkt dieselbe Ordinate, und denselben ersten und zweiten Differentialquotienten ihrer Ordinaten hat wie die gegebene Linie, und bei welcher außerdem der constante dritte Differenzquotient ihrer Ordinaten zusammenfällt mit dem in jenem Abscissenpunkte vorhandenen Werth des dritten Differentialquotienten der Ordinaten der gegebenen Linie. Man sagt von Linien, welche in irgend einem Punkte die Ordinate und die drei ersten Differentialquotienten ihrer Ordinaten gleich haben, daß sie sich in diesem Punkte im dritten Grade berühren. Man kann demnach die verlangte Construction auch kurz so aussprechen: Es ist eine im dritten Grade berührende Linie zu construiren, deren Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsend sind.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, so sei für die Kreislinie Figur 57 die im Punkte d stattfindende momentane Veränderung der Beschleunigung des Wachsens der Ordinaten zu construiren. Dies geschieht durch die Ordinaten einer Linie, deren Gleichung im Allgemeinen die Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

haben wird. Die vier Bedingungen, denen dieſe Linie bezüglich zur Kreislinie genügen ſoll, reichen hin, die vier unbeſtimmten Coefficienten a, b, c und d zu beſtimmen. Die Gleichungen der Kreislinie und der geſuchten Linie ſollen auf dieſelben Coordinatenaxen bezogen ſein. Die Ordinatengleichung des Kreiſes wird, wenn wir in den Punkt a den Nullpunkt der Abſciſſe, und den Radius $=1$ ſetzen, ſein

$$y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Der erſte Differentialquotient dieſer Function iſt $\frac{1-x}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, der zweite $-\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ und der dritte $\frac{3-3x}{(2x-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. Die Ordinate der geſuchten paraboliſchen Linie und ihre drei erſten Differentialquotienten ſind der Reihe nach $a+bx+cx^2+dx^3$, $b+2cx+3dx^2$, $2c+6dx$, und $6d$. Für den Punkt d Figur 57 möge die gemeinſchaftliche Abſciſſe x beider Linien den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ haben. Subſtituiren wir in die Ausdrücke für die Ordinate beider Linien und für die drei erſten Differentialquotienten derſelben ſtatt x überall den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$, ſo werden die Ordinaten beider Linien gleich ſein, und ebenſo die an Rangzahl gleichen Differentialquotienten derſelben. Die Ordinate des Kreiſes und deren drei erſten Differentialquotienten nehmen bei dieſer Subſtitution der Reihe nach die Zahlenwerthe $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{8}{3\sqrt{3}}$, $\frac{16}{3\sqrt{3}}$ an, und die entſprechenden Ausdrücke der paraboliſchen Linie die Werthe $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{8}d$, $b+c+\frac{3}{4}d$, $2c+3d$, und $6d$. Wir erhalten alſo die vier Gleichungen

$$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{8}d=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b+c+\frac{3}{4}d=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2c+3d=-\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$6d=\frac{16}{3\sqrt{3}}$$

und durch Auflösung derselben $d=\frac{8}{9\sqrt{3}}$, $c=-\frac{8}{3\sqrt{3}}$, $b=\frac{9}{3\sqrt{3}}$, und $a=\frac{5}{9\sqrt{3}}$ und die vorausgesetzte unbestimmte Gleichung der paraboliſchen Linie

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

geht über in die beſtimmte

$$y=\frac{5}{9\sqrt{3}}+\frac{9}{3\sqrt{3}}x-\frac{8}{3\sqrt{3}}x^2+\frac{8}{9\sqrt{3}}x^3.$$

Dieſe Linie, welche im Punkte d die Kreislinie im dritten Grade berührt, fällt ſo nahe mit der Kreislinie zuſammen, daß ſie in der Zeichnung von derſelben kaum unterſchieden werden kann, wie man ſich durch wirkliche Berechnung einiger Ordinaten beider Linien leicht überzeugen kann. Für den Punkt b, in welchem die Abſciſſe gleich $\frac{1}{2}$ iſt, ſind die Ordinaten beider Linien $=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Im Punkt e, wo die Abſciſſe den Werth $\frac{5}{8}$ haben möge, findet ſich die Ordinate des Kreiſes $=0{,}9270$ und die Ordinate der kubiſchen Parabel $=0{,}9271$. Iſt im Punkte f die Abſciſſe $=\frac{6}{8}$, ſo iſt die Ordinate des Kreiſes $=0{,}9682$, und die der Parabel $=0{,}9702$. Sei im Punkte g die Abſciſſe $=\frac{7}{8}$, ſo ſind die Ordinaten beider Linien $=0{,}9921$ und $=1{,}0003$, und im Punkte c, in welchem die Ordinate des Kreiſes $=1$

ist, findet sich die Ordinate der Parabel = 1,0264. Die paraboliſche Linie läuft also vom Punkte d aus zwiſchen der Kreislinie und der Tangente dieſes Punktes, und cn möge die dem Punkte c zugehörige Ordinate derſelben vorſtellen.

An dem Kreis Fig. 57 ſehen wir drei aufeinanderfolgende in demſelben Punkte d eingeſchloſſene Grade der Stärke des Wachſens, oder die Werthe von drei Differentialquotienten nebeneinander conſtruirt, und können die durch jeden einzelnen Grad bedingte Weiſe des Wachſens in einer beſonderen Figur nachweiſen und uns dadurch die anſchaulichſte Vorſtellung von dem Weſen der einzelnen Differentialquotienten machen. Wenn nur die im Punkte d vorhandene Stärke des Wachſens der Ordinaten des Kreiſes zur Ausführung käme, ſo würden die Ordinaten deſſelben wachſen wie die Ordinaten der Tangente do. Wenn aber bei derſelben momentanen Stärke des Wachſens die Beſchleunigung des Wachſens der Ordinaten des Kreiſes zur Ausführung käme, ſo würden die Ordinaten deſſelben wachſen, wie die der gemeinen Parabel dp. Und wenn endlich bei derſelben momentanen Stärke und Beſchleunigung des Wachſens die für die Beſchleunigung des Wachſens ſtattfindende momentane Stärke des Wachſens der Ordinaten des Kreiſes unverändert bliebe, ſo würden die Ordinaten deſſelben wachſen wie Ordinaten der paraboliſchen Linie dn.

An dieſem Beiſpiel wird man ſchon deutlich überſehen, wie die in Einem Punkte vorhandenen aufeinanderfolgenden Grade des Wachſens, wenn ſie verfolgt würden oder zur Ausführung kämen, das von dieſem Punkte aus erfolgende wirkliche Wachſen der abhängig Veränderlichen näherungsweiſe beſtimmen, und ein Mittel abgeben können, den wirklichen Verlauf derſelben in immer engere Grenzen einzuſchließen. Der einzelne Punkt mit ſeinen verſchiedenen in ihm eingeſchloſſenen Modificationen des Wachſens erſcheint dann gewiſſermaßen als der Keim, durch deſſen Beſtrebungen zu wachſen, oder wenn man will, durch deſſen Bil-

dungstrieb das weitere wirkliche Wachſen der abhängig Veränderlichen beſtimmt und vorgeſchrieben wird. Hierauf beruht, wie wir bald ſehen werden, der wichtigſte Gebrauch, den man von den ſtufenweis aufeinanderfolgenden höhern Graden des Wachſens oder von den höheren Differentialquotienten macht.

Wenn wir noch fragen, wie eine durch ſenkrechte Parallelcoordinaten beſchriebene Fläche wachſen würde, wenn ihre momentane Stärke des Wachſens im dritten Grade ſich realiſirte, ſo iſt die Antwort darauf leicht zu geben. Die Figur, deren durch ſenkrechte Parallelcoordinaten beſchriebene Fläche gleichmäßig wachſend im dritten Grade iſt, kann, wie wir aus §. 119 wiſſen, keine andere ſein als die gemeine Parabel. Es fragt ſich alſo nur, wie die Parabel an einen beſtimmten Punkt der andern Figur angelegt erſcheinen muß, wenn beide Figuren in dieſem Punkte die momentane Stärke des Wachſens ihrer Flächen im erſten und zweiten Grade gleich haben ſollen, und die conſtante Stärke des Wachſens der Fläche der Parabel im dritten Grade mit der momentanen der andern Figur zuſammenfallen ſoll. Die Functionen, welche die Flächen beider Figuren ausdrücken, müſſen für den vorgeſchriebenen Punkt erſtens den erſten Differentialquotient gleich haben, d. h. die Figuren müſſen eine gemeinſchaftliche Ordinate haben. Da zweitens die zweiten Differentialquotienten der die Flächen ausdrückenden Functionen, d. h. die erſten Differentialquotienten der die Ordinaten ausdrückenden Functionen gleich ſein müſſen, ſo werden die beiden Figuren eine gemeinſchaftliche Tangente haben, oder ſich im erſten Grade berühren. Und da endlich der dritte Differenzquotient der die Fläche der Parabel ausdrückenden Function, d. h. der zweite Differenzquotient ihrer Ordinate, mit dem dritten Differentialquotienten der Fläche der andern Figur, d. h. mit dem zweiten Differentialquotienten ihrer Ordinate zuſammenfallen muß, ſo werden beide Figuren ſich zugleich im zweiten Grade berühren. Wenn mithin eine Parabel eine andere Linie im

zweiten Grade berührt, und zwar so, daß ihre Ordinaten gleichmäßig wachsend im zweiten Grade sind, so ist in der Fläche dieser Parabel diejenige Veränderung der Beschleunigung des Wachsens constant, welche in der Fläche der andern Figur für den Berührungspunkt momentan vorhanden ist. In der Fläche der Parabel kdp Fig. 57 z. B., welche die Kreislinie im Punkte d im zweiten Grade berührt, kommt die für die Kreisfläche im Punkte d stattfindende momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade zur Ausführung. Wir sehen hier wieder drei aufeinanderfolgende Stufen der Stärke des Wachsens der Fläche in besonderen Flächenformen repräsentirt. Die im Punkte d vorhandene momentane Stärke des Wachsens der Kreisfläche ist so groß als die constante des Parallelogramms dbeq, die momentane Beschleunigung ihres Wachsens so groß als die constante des Paralleltrapezes dbeo, und endlich ihre momentane Veränderung der Beschleunigung des Wachsens so groß als die constante der Parabelfläche dbep.

Es mag hier noch eine Bemerkung in Bezug auf den Gebrauch des Wortes Berührung in höheren Graden eingeschaltet werden. Wir sehen an dem vorhergehenden Beispiel, daß eine Figur, welche in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachsend ist und eine andere Figur im zweiten Grade berührt, in Bezug auf ihre Fläche im dritten Grade gleichmäßig wachsend ist, und mit der Fläche der andern Figur die drei ersten Differentialquotienten gleich hat. Obgleich man das Wort Berührung in höheren Graden von Linien nur in sofern gebraucht hat, als einige Differentialquotienten ihrer Ordinaten für den Berührungspunkt gleich sind, so ist doch kein Grund vorhanden, warum man diese Benennung nur auf Ordinaten, und nicht auch auf andere Raumgrößen beziehen soll, und warum man z. B. von Figuren, deren Flächenfunctionen für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen zusammenfallen, und außerdem noch die zwei oder drei ersten Differentialquotienten gleich haben, nicht sagen soll, daß

sie sich in Bezug auf ihre Flächen im zweiten oder dritten Grade berühren. In diesem Sinne würde man sagen können, daß alle durch senkrechte Parallelcoordinaten beschriebenen gedachte Figuren, welche sich in Bezug auf ihre Flächen im dritten Grade berühren, sich bezüglich ihrer Ordinaten im zweiten Grade berühren. Ja es wird sogar angemessen und sehr bequem sein, von Functionen Einer Veränderlichen überhaupt zu sagen, daß sie sich in einem höheren Grade berühren, sobald sie für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen gleiche Functionswerthe und mehrere aufeinanderfolgende gleiche Differentialquotienten vom niedrigsten Range haben, und zwar, daß sich die Functionen in dem sovielten Grade berühren, als die Anzahl ihrer gleichen Differentialquotienten beträgt. Wir werden uns in der Folge dieser kurzen Ausdrucksweise bedienen, und diese geometrische Benennung auf die Functionen überhaupt übertragen, wie man schon so manche andere ursprünglich geometrische Benennung auf die Arithmetik und Analysis übergetragen hat. Diese Uebertragung ist dadurch gerechtfertigt, daß das Eigenthümliche, was die Ordinaten bei verschiedenen Graden der Berührung zeigen, und was die Unterscheidung von Graden der Berührung herbeigeführt hat, von welcher Eigenthümlichkeit später noch besonders die Rede sein soll, ohne Weiteres auf alle Veränderlichen seine Anwendung findet.

§. 122.

Vom vierten Differentialquotienten.

Da bei den über den dritten Differentialquotienten hinausliegenden weiteren Modificationen des Wachsens im Wesentlichen immer dieselben Begriffsbestimmungen wiederkehren, und in Betreff der einzelnen Eigenschaften und Bestimmungen der Stärke des Wachsens in den folgenden Graden fast nur noch die Rangzahl variirt, so können wir durch Verallgemeinerung des über die drei niederen Grade des Wachsens Aufgestellten leicht zur Vollendung der Analyse

des Begriffs eines gemeinſchaftlich fortſchreitenden Wachſens veränderlicher Größen gelangen. Indeſſen wird es doch, um die ganze Schlußkette, durch welche das Weſen und die Bedeutung eines jeden Differentialquotienten dargelegt wird, beiſpielsweiſe kurz zu recapituliren, nicht undienlich ſein, vorher noch den vierten Differentialquotienten abgeſondert einer kurzen Betrachtung zu unterwerfen.

Wenn die mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen verbundenen Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen nicht immer um gleichviel größer oder kleiner werden, oder was daſſelbe iſt, wenn die für die Beſchleunigung des Wachſens ſtattfindende Stärke des Wachſens nicht conſtant iſt, ſo kann man nicht blos nach den einzelnen momentanen Werthen dieſer Stärke des Wachſens fragen, welche Frage durch den dritten Differentialquotienten beantwortet wird, ſondern man kann auch nach dem Geſetz der Zu- oder Abnahme dieſer Stärke des Wachſens fragen. Dies Geſetz erfordert zu ſeiner Aufſtellung, daß man eine höhere Stufe des Wachſens ins Auge faßt, als diejenige iſt, welche durch den Zuwachs der Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen gegeben iſt. Es kommt darauf an, zu beſtimmen, wie viel dieſer Zuwachs ſich verändert bei einer beſtimmten Zunahme der willkürlich Veränderlichen. Natürlich kann ein Geſetz der Veränderung dieſer Stärke des Wachſens im dritten Grade nur angegeben werden, in ſofern die Größe der Veränderung als eine gleichbleibende vorausgeſetzt wird, d. h. in ſofern der Zuwachs der Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen immer um gleichviel größer oder kleiner wird, oder die ſucceſſiven Werthe der abhängig Veränderlichen eine arithmetiſche Reihe der vierten Ordnung bilden. Abhängig Veränderliche von dieſer Eigenſchaft ſind im vierten Grade gleichmäßig Wachſende. Dieſelben ſind aller Beſtimmung des Wachſens im vierten Grade, auch wo daſſelbe veränderlich iſt, zu Grunde zu legen, und alle Functio-

nen, durch welche dieſelben ausgedrückt erſcheinen, ſind enthalten in der allgemeinen Function

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Bildet man für Zunahmen der willkürlich Veränderlichen dieſer Function im Werthe von Δx die vierte Differenzenreihe der zugehörigen Functionswerthe, ſo findet man die Glieder derſelben conſtant und gleich $24e(\Delta x)^4$, oder es iſt

$$\Delta^4(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = 24e(\Delta x)^4.$$

Der conſtante Unterſchied, welchen die Zunahmen der Unterſchiede der Zunahmen unſerer allgemeinen Function haben, wächſt alſo im biquadratiſchen Verhältniß von Δx, iſt übrigens aber nur von dem Coefficienten der vierten Potenz von x abhängig. Wird die vierte Differenz der Function durch $(\Delta x)^4$ dividirt, ſo gibt die conſtante Zahl $24e$, welche der vierte Differenzquotient heißt, und als allgemeines von Δx unabhängiges Maß der Stärke des Wachſens anzuſehen iſt, an, um wie viel jeder folgende Zuwachs der Unterſchiede der Zunahmen der Function größer wird als der vorhergehende, wenn die willkürlich Veränderliche mehrmals um die Zahl 1 wächſt.

Iſt eine abhängig Veränderliche gegeben durch eine Function von x, welche nicht als beſonderer Fall in der allgemeinen Function $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ enthalten iſt, ſo können auch innerhalb eines noch ſo klein angenommenen Spielraums der Veränderung des x die Zunahmen der Unterſchiede der Zunahmen der Function nicht mehr gleiche Unterſchiede zeigen, und es gibt folglich auch keine dauernde angebbare Stärke des Wachſens im vierten Grade. Dieſelbe iſt vielmehr ſtetig veränderlich, und es handelt ſich nur um Angabe des Werthes, den ſie momentan anzunehmen beſtrebt iſt. Aus den ſchon öfter angegebenen Gründen folgt, daß wenn man eine ſolche Größe innerhalb eines kleinen Intervalles als eine im vierten Grade gleichmäßig wachſende anſieht, und den Werth ihres für ein kleines Δx entwickelten vierten Differenzquotienten als Maß dieſes im vierten

Grade gleichmäßigen Wachsens ansieht, der daraus entstehende Fehler durch fortgesetzte Verkleinerung des Δx so klein gemacht werden kann, daß er jeden beliebig gesetzten Grad von Kleinheit überschreitet. Die Bedeutung dieses durch den vierten Differenzquotienten gegebenen Näherungswerthes ist natürlich so auszusprechen, als wäre er das Maß einer im vierten Grade gleichmäßig Wachsenden. Der durch Annullirung von Δx entstehende Grenzwerth des vierten Differenzquotienten, welcher der vierte Differentialquotient heißt, drückt durch den Zahlenwerth, in welchen er für ein bestimmtes x übergeht, die für diesen Werth von x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im vierten Grade genau aus, und zwar in dem Sinne, in welchem eine bestimmte Zahl eine constante Stärke des Wachsens im vierten Grade zu bezeichnen gebraucht wird. Erhalte ich also für einen bestimmten Werth des x den Werth des vierten Differentialquotienten einer Function gleich a, so heißt dies: Wenn die für diesen bestimmten Werth des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im vierten Grade constant wäre, so würde jeder folgende Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function um a größer sein als der vorhergehende bei Zunahmen des x im Werthe von 1.

Was die Bezeichnung des vierten Differentialquotienten einer Function $f(x)$ betrifft, so ist derselbe analog den früheren Differentialquotienten durch $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$ auszudrücken, sowie auch die operative Herleitung desselben nicht durch Aufstellung des vierten Differenzquotienten bewerkstelligt zu werden braucht, sondern durch bloße Differentiation des dritten Differentialquotienten ausgeführt werden kann. Stellen wir den vierten Differentialquotienten der Function $f(x)$ durch $\varphi(x)$ vor, so daß $\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \varphi(x)$, so nennt man den Ausdruck $\varphi(x) . dx^4$ und gleicher Weise den Ausdruck

$d^4f(x)$, d. h. den mit dx^4 multiplicirten vierten Differentialquotienten der Function $f(x)$, das vierte Differential dieſer Function. Das iſolirte vierte Differential einer Function von x für ſich betrachtet hat nur einen durch den beliebig anzunehmenden Werth von dx zu beſtimmenden Zahlenwerth, deſſen Bedeutung aus dem Vorhergehenden von ſelbſt einleuchtend iſt, und der nur zur Werthangabe der momentanen Stärke des Wachſens im vierten Grade dient. Was aber die relativen Werthe des vierten und dritten Differentials bei fortgeſetzter Verkleinerung von dx betrifft, ſo iſt, da das Erſtere im biquadratiſchen und das Zweite im kubiſchen Verhältniß von dx abnimmt, leicht zu ſehen, daß, ſo lange der vierte und dritte Differentialquotient endliche Werthe haben, das vierte Differential durch Verkleinerung des dx beliebig vielmal kleiner gemacht werden kann als das dritte, und daß beide Differentiale vor ihrem gemeinſchaftlichen gleichzeitigen Uebergang in den Nullwerth relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältniſſe durchlaufen haben. Wenn man das vierte Differential ein Unendlichkleines der vierten Ordnung nennt, ſo hat man unter dieſem abgekürzten uneigentlichen Ausdruck nichts weiter zu verſtehen als das eben angegebene Verhalten des vierten Differentials zum dritten bei ihrer gemeinſchaftlichen Annäherung an den Nullwerth, und macht von dieſem Ausdruck auch nie einen andern Gebrauch in der Mathematik als den auf dies gegenſeitige Verhalten der beiden Differentiale begründeten.

Um ein einziges leichtes Beiſpiel von Conſtruction des vierten Differentialquotienten zu geben, ſo fragen wir, wie würde die durch ſenkrechte Parallelordinaten beſchriebene Kreisfläche Fig. 57 von der Linie bd aus wachſen, wenn ihre an dieſer Stelle vorhandene momentane Stärke des Wachſens im vierten Grade unverändert bliebe, und in der Fläche welcher Figur würde ſich dies Wachſen darſtellen. Die Fläche der geſuchten Figur wird im Allgemeinen ausgedrückt durch die Function $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

Die Ordinate derſelben wird alſo durch $b+2cx+3dx^2+4ex^3$ gegeben ſein, und wir ſehen daraus, daß die Figur eine kubiſche Parabel iſt. Es fragt ſich alſo nur, wie dieſe kubiſche Parabel gegen den Kreis liegen muß. Nun iſt klar, daß Figuren, welche an einem beſtimmten Punkte ſich in Bezug auf ihre Flächen im vierten Grade berühren ſollen, den für dieſen Punkt genommenen erſten, zweiten, dritten und vierten Differentialquotienten ihrer Flächenfunctionen gleich haben müſſen, oder was daſſelbe, daß ſie die Ordinate und den erſten, zweiten und dritten Differentialquotienten ihrer Ordinaten gleich haben müſſen, d. h. daß die Figuren in Bezug auf ihre Ordinaten ſich im dritten Grade berühren müſſen. Wenn wir daher die im vorhergehenden Paragraphen ſchon conſtruirte, die Kreislinie im Punkte d im dritten Grade berührende kubiſche Parabel dn nehmen, ſo wird in der Fläche derſelben diejenige Stärke des Wachſens der Kreisfläche im vierten Grade, welche im Punkte d momentan vorhanden iſt, ausgeführt enthalten ſein.

Was ſchließlich die verſchiedenen Arten des Wachſens betrifft, welche hervortreten, wenn man den Begriff des Wachſens bis zum vierten Grade verfolgt, ſo iſt einleuchtend, daß die Anzahl derſelben doppelt ſo groß ſein wird als diejenige, welche ſich bei Beſtimmung des Wachſens im dritten Grade zeigt. Denn jede Beſchleunigung oder Retardation des Wachſens oder Abnehmens, welche durch den dritten Differentialquotienten im nächſtfolgenden Grade beſtimmt ſich als eine zunehmende oder abnehmende zeigte, wird offenbar eine beſchleunigt oder retardirt zu- oder abnehmende ſein, jenachdem der Zuwachs der Unterſchiede der Zunahmen der abhängig Veränderlichen entweder immer größer oder immer kleiner wird. Das Erſtere wird aber der Fall ſein, wenn der vierte Differentialquotient gleiches Vorzeichen mit dem dritten hat, und das Letztere, wenn die Vorzeichen beider Differentialquotienten entgegengeſetzt ſind. Denn wenn für einen gewiſſen Werth der willkürlich

Veränderlichen der dritte und vierte Differentialquotient einer Function gleiche Vorzeichen haben, so läßt sich von diesem Werthe der willkürlich Veränderlichen aus immer ein solches Intervall derselben angeben, innerhalb dessen auch der dritte und vierte Differenzquotient, und folglich auch die dritte und vierte Differenz der Function gleiche Vorzeichen haben, und mithin wird auch der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function durch Zusatz eines gleichartigen Theiles immer größer werden. Auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß bei entgegengesetztem Vorzeichen des dritten und vierten Differentialquotienten der Zuwachs der Unterschiede der Zunahmen der Function wenigstens innerhalb eines wenn auch beliebig kleinen Intervalls immer kleiner werden muß. Darnach ist aus den Vorzeichen der vier ersten Differentialquotienten die Natur des bis zum vierten Grade bestimmten Wachsens leicht anzugeben. Wäre z. B. der erste Differentialquotient positiv, der zweite negativ, der dritte auch negativ und der vierte positiv, so zeigt der erste positive Differentialquotient ein Wachsen der Function, der zweite negative eine Retardation des Wachsens, der dritte negative eine zunehmende Retardation des Wachsens, und der vierte positive eine retardirt zunehmende Retardation des Wachsens an, und so in allen andern Fällen.

Indem wir in der Bezeichnung der Arten des Wachsens durch Worte und Begriffe bis zum vierten Grade fortgegangen sind, läßt sich bemerken, daß eine weitere Verfolgung der Arten des Wachsens durch Wortbezeichnungen die Klarheit unserer Vorstellungen nicht vermehren, sondern durch unvermeidliche Schwerfälligkeit und Weitschweifigkeit der Wortbildung eher beeinträchtigen werde. Es ist aber auch eine weitere Verfolgung gar nicht nöthig. Es reicht völlig hin, die aus der Combination der niedrigsten Differentialquotienten hervorgehende Natur des Wachsens mit klaren Worten ausgesprochen zu haben, und überhaupt für den Begriff des Wachsens die Möglichkeit einer end-

loſen Spaltung und Verzweigung in untergeordnete Artbegriffe nachgewieſen zu haben. Ueberdies iſt die Auffaſſung der Stärke des Wachſens in jedem einzelnen Grade für ſich, und folglich auch die Bedeutung der einzelnen Differentialquotienten, unabhängig von dieſer Combination eines Differentialquotienten mit den vorausgehenden niederen. Denn jede gegebene Stärke des Wachſens in irgend einem Grade für ſich bezieht ſich nur auf die ſovielte Differenz der ſucceſſiven Functionswerthe, als die Gradzahl der Stärke des Wachſens angibt.

§. 123.

Conſtante Differenz der Potenzfunction mit ganzen poſitiven Exponenten.

Ehe wir zu einer zuſammenfaſſenden ſchließlichen allgemeinen Betrachtung der höheren Differentialquotienten übergehen, haben wir noch die Frage zu beantworten, ob der Begriff einer Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen mit ganzen poſitiven Exponenten und der Begriff einer in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachſenden Größe Wechſelbegriffe ſind und ſich gegenſeitig einſchließen. Daß eine abhängig Veränderliche, deren Werthe zuletzt auf eine conſtante Differenzenreihe führen, immer durch eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen mit ganzen poſitiven Exponenten ausgedrückt erſcheinen muß, wiſſen wir bereits (ſ. §. 118) und es fragt ſich nur noch, ob auch umgekehrt eine ſolche Potenzfunction zuletzt immer auf eine conſtante Differenzenreihe ihrer ſucceſſiven Functionswerthe führen muß, ſobald man, wie dabei überall vorausgeſetzt iſt, die willkürlich Veränderliche um gleiche Zunahmen wachſen läßt.

Wir unterſuchen zuerſt, ob bei einer einfachen Potenzfunction x^m die Glieder irgend einer Differenzenreihe der ſucceſſiven Functionswerthe gleich werden müſſen, wenn m eine ganze poſitive Zahl iſt. Dieſe Unterſuchung wird zum Ziele zu führen ſein, wenn wir einen allgemeinen Ausdruck für ein Glied einer beliebigen Differenzenreihe der

gegebenen Function aufstellen. Denn zeigt sich dieser allgemeine Ausdruck von der Art, daß er für eine gewisse Differenzenreihe nicht mehr von x abhängig ist, so gilt er gleicherweise für alle Werthe von x, und die Glieder dieser Differenzenreihe sind constant. Wächst x mehrmals um die Zahl Δx, so sind die zugehörigen Functionswerthe x^m, $(x+\Delta x)^m$, $(x+2\Delta x)^m$ u. s. w. Das durch Δx^m zu bezeichnende Anfangsglied der ersten Differenzenreihe ist gleich $(x+\Delta x)^m - x^m$, oder es ist, wenn wir den Ausdruck $(x+\Delta x)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und x^m davon abziehen,

$$\Delta x^m = m x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}(\Delta x)^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3}(\Delta x)^3 \ldots .$$

Um das Anfangsglied der zweiten Differenzenreihe zu erhalten, müssen wir das folgende Glied der ersten Differenzenreihe, oder das nach unserm Sprachgebrauch erste Glied derselben, darstellen, und das Anfangsglied derselben Differenzenreihe davon abziehen. Das erste Glied der ersten Differenzenreihe ist offenbar $(x+2\Delta x)^m - (x+\Delta x)^m$. Wir können aber, weil das auf der Entwickelung dieser Potenzen beruhende Verfahren sich nicht so bequem verallgemeinern läßt, zu dem Ausdruck für das erste Glied der ersten Differenzenreihe auch auf einem andern Wege gelangen. Denn der für Δx^m gefundene Ausdruck stellt offenbar, weil x ein beliebiger Zahlenwerth ist, überhaupt ein Glied der ersten Differenzenreihe vor, und zwar dasjenige Glied, welches entsteht, indem die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerthe x zu dem Zahlenwerthe $(x+\Delta x)$ übergeht. Wir werden daher den Ausdruck für dasjenige Glied der ersten Differenzenreihe, welches entsteht, indem die willkürlich Veränderliche von dem Zahlenwerthe $(x+\Delta x)$ zum Zahlenwerthe $(x+2\Delta)$ übergeht, erhalten, wenn wir in dem für Δx^m gegebenen Ausdruck überall $x+\Delta x$ statt x setzen, und dies Glied der ersten Differenzen-

reihe durch $\Delta(x+\Delta x)^m$ zu bezeichnen haben. Es wird alſo

$$\Delta(x+\Delta x)^m = m(x+\Delta x)^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+\Delta x)^{m-2}(\Delta x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x+\Delta x)^{m-3}(\Delta x)^3 \ldots.$$

Entwickelt man die hier vorkommenden Potenzen $(x+\Delta x)^{m-1}$, $(x+\Delta x)^{m-2}$, $(x+\Delta x)^{m-3}$ nach dem binomiſchen Lehrſatz, addirt alle Theile mit gleichen Potenzen von Δx zuſammen, und zieht den für Δx^m gegebenen Ausdruck davon ab, ſo erhält man das durch $\Delta^2 x^m$ zu bezeichnende Anfangsglied der zweiten Differenzenreihe, und zwar findet ſich

$$\Delta^2 x^m = m(m-1)x^{m-2}(\Delta x)^2 + 6.\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}(\Delta x)^3 + 14.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots.$$

Ohne uns jetzt um das Geſetz zu bekümmern, nach welchem die Zahlen gebildet ſind, die in den Coefficienten vorkommen, bemerken wir blos, daß die ganzen Coefficienten von $x^{m-3}(\Delta x)^3$ und von $x^{m-4}(\Delta x)^4$ jedenfalls Ausdrücke ſind, die nur von m und dem Grade der gebildeten Differenz abhängen können. Wenn wir dieſe Coefficienten abgekürzt durch M_3 und M_4 bezeichnen, ſo haben wir

$$\Delta^2 x^m = m(m-1)x^{m-2}(\Delta x)^2 + M_3 x^{m-3}(\Delta x)^3 + M_4 x^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots$$

Um das Anfangsglied der dritten Differenzenreihe zu bilden, müſſen wir das erſte Glied der zweiten Differenzenreihe darſtellen, und das Anfangsglied derſelben davon abziehen. Aus denſelben Gründen, durch welche das für die Bildung des erſten Gliedes der erſten Differenzenreihe angewendete Verfahren gerechtfertigt worden iſt, folgt auch hier, daß das erſte Glied der zweiten Differenzenreihe erhalten wird, wenn wir in dem für $\Delta^2 x^m$ gegebenen Ausdrucke überall $x+\Delta x$ ſtatt x ſetzen. Es wird folglich

$$\Delta^2(x+\Delta x)^m = m(m-1)(x+\Delta x)^{m-2}(\Delta x)^2 + M_3(x+\Delta x)^{m-3}(\Delta x) + M_4(x+\Delta x)^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots.$$

Entwickeln wir die hier vorkommenden Potenzen von $(x+\Delta x)$, führen dabei für M_3 seinen aus dem Obigen bekannten Werth wieder ein, addiren die Glieder mit gleichen Potenzen von Δx zusammen, und ziehen endlich den Werth von $\Delta^2 x^m$ davon ab, so erhalten wir das durch $\Delta^3 x^m$ zu bezeichnende Anfangsglied der dritten Differenzenreihe, und zwar findet sich

$$\Delta^3 x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3}(\Delta x)^3 + M_4^1 x^{m-4}(\Delta x)^4 \ldots$$

wobei M_4^1 einen von M_4 verschiedenen durch den Grad der Differenz bestimmten Werth hat.

Wenn wir die für Δx^m, $\Delta^2 x^m$ und $\Delta^3 x^m$ gefundenen Ausdrücke, welche zugleich als Ausdrücke für ein beliebiges Glied der ersten, zweiten und dritten Differenzenreihe gelten, überblicken, so sehen wir, daß jeder folgende mit einer um eine Einheit niedrigeren Potenz von x anfängt, und es ist aus dem ganzen Verfahren der Bildung dieser Ausdrücke einleuchtend, daß dies auch für die folgenden Differenzenreihen stattfinden werde, und daß folglich, da nach Voraussetzung m eine ganze positive Zahl ist, von den in einem solchen Ausdrucke addirten Bestandtheilen jede folgende Differenzenreihe einen weniger enthalten muß, weil der Ausdruck für ein Glied einer Differenzenreihe an seinem Ende offenbar abbricht mit demjenigen Bestandtheil, in welchem x auf die Potenz $m-m$ erhoben erscheint. Mithin wird zuletzt bei irgend einer Differenzenreihe in dem allgemeinen Ausdruck ihres Gliedes nur Ein Bestandtheil übrig bleiben, in welchem x auf die Potenz $m-m$ erhoben erscheint; welcher Bestandtheil daher, da er keine Function von x mehr ist, sondern nur von m und Δx abhängt, für alle Werthe von x derselbe ist, und das constante Glied dieser Differenzenreihe darstellt.

Um zu beurtheilen, bei welcher Differenzenreihe die gleichen Glieder eintreten müssen, und um zugleich die Größe derselben anzugeben, brauchen wir nur den ersten Bestandtheil der für die successiven Differenzen gegebenen

Ausdrücke ins Auge zu fassen, da dieser erste Bestandtheil der bei weiterer Differenzenbildung zuletzt allein übrig bleibende ist. Diese ersten Bestandtheile sind $mx^{m-1}\Delta x$, $m(m-1)x^{m-2}(\Delta x)^2$ und $m(m-1)(m-2)x^{m-3}(\Delta x)^3$, und dieselben haben ein so einfaches Gesetz ihrer Coefficienten, daß man ohne Weiteres folgern kann, daß der erste Bestandtheil einer beliebigen, etwa der nten Differenz sein werde

$$m(m-1)(m-2).....\Big(m-(n-1)\Big)x^{m-n}(\Delta x)^n.$$

Setzen wir m statt n in diesen Ausdruck, so ist der erste Bestandtheil der mten Differenz gleich

$$m(m-1)(m-2)..... 3.2.1\ (\Delta x)^m$$

und wir sehen, daß dieser erste Bestandtheil zugleich der einzige ist, und daß bei der Function x^m die mte Differenzenreihe der Functionswerthe aus gleichen Gliedern besteht, deren jedes eine durch m und Δx auf die angegebene Art bestimmte Größe hat.

Hat man statt x^m die Function ax^m, so wird die mte Differenz von ax^m gleich sein der mten Differenz von x^m multiplicirt mit a, weil bei jeder Function $f(x)$ die erste Differenz von $af(x)$ oder $\Delta af(x) = af(x+\Delta x) - af(x) = a[f(x+\Delta x) - f(x)] = a\Delta f(x)$, und dies ebenso für alle folgenden Differenzen gilt, indem jede Differenz von $f(x)$ ja überhaupt eine Function von x ist.

Um endlich die gefundenen Resultate auch auf eine aus mehreren Potenzen von x zusammengesetzte Function auszudehnen, brauchen wir nur zu bedenken, daß für eine aus beliebigen Functionen fx und φx zusammengesetzte Function $fx+\varphi x$ die erste Differenz erhalten wird, wenn wir die ersten Differenzen der einzelnen Functionen addiren, wovon man sich durch die schematische Ausführung der ersten Differenz von $fx+\varphi x$ leicht überzeugen kann, indem

$$\begin{aligned}\Delta(fx+\varphi x) &= f(x+\Delta x)+\varphi(x+\Delta x)-(fx+\varphi x)\\ &= f(x+\Delta x)-fx+\varphi(x+\Delta x)-\varphi x\\ &= \Delta fx+\Delta\varphi x.\end{aligned}$$

Da nun die ersten Differenzen beliebiger Functionen von

x ſelbſt wieder Functionen von x ſind, ſo wird die zweite und ſelbſtverſtändlich ebenſo jede folgende Differenz einer durch Addition von Functionen zuſammengeſetzten Function erhalten, wenn man dieſe Differenzen der einzelnen Functionen nimmt, und dieſelben zuſammenaddirt.

In der allgemeinen Function

$$a + bx + cx^2 + dx^3 .... + px^{m-1} + qx^m$$

iſt ſonach die mte Differenz conſtant. Denn nimmt man die mte Differenz der einzelnen Potenzen von x, ſo iſt dieſelbe für alle Potenzen, deren Exponent kleiner als m iſt, gleich Null; es fällt mithin die mte Differenz der obigen allgemeinen Function mit der mten Differenz des letzten Beſtandtheils qx^m zuſammen, und iſt dem Obigen zu Folge für eine Zunahme Δx gleich

$$1.2.3.4....(m-1).m.q(\Delta x)^m.$$

Jede Potenzenreihe mit ganzen poſitiven Exponenten ſtellt alſo eine in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachſende abhängig Veränderliche vor, und hat ein für alle Werthe der willkürlich Veränderlichen gleichbleibendes Geſetz des Wachſens, welches in irgend einer höheren Stufe der Differenzenbildung zum Vorſchein kommt, ſowie wir anderſeits wiſſen (ſ. §. 118), daß nur für ſolche Potenzenreihen die Veränderungen des Wachſens zu einem endlichen Abſchluß kommen, und ein unveränderliches Geſetz des Wachſens ſich angeben läßt, und daß mithin bei allen andern Functionen ein innerhalb eines Intervalles dauerndes Geſetz des Wachſens nur annähernd angegeben werden kann, und zwar in ſofern als innerhalb dieſes Intervalls die Function annähernd durch eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

§. 124.

Von den höheren Differentialquotienten im Allgemeinen.

Es bleibt uns nun, um zu einem vollſtändigen Begriff der Natur des Wachſens veränderlicher Größen zu kommen, nichts mehr übrig, als die über die niederen Grade des Wachſens gefundenen Sätze zu verallgemeinern,

was nach der für die einfacheren Fälle gegebenen Darstellung auf dem Wege einer einfachen Induction geschehen kann.

Jedes Wachsen einer abhängig Veränderlichen kann nach Art und Größe nur in sofern bestimmt angegeben und ausgesprochen werden, als vorausgesetzt wird, daß mit gleichen Zunahmen der willkürlich Veränderlichen gleiche Zunahmen der abhängig Veränderlichen in irgend einer Stufe der successiven Differenzenbildung verbunden sind, oder daß die abhängig Veränderliche in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsend ist. Jede als stetig veränderlich vorausgesetzte Stärke des Wachsens in irgend einem Grade kann dem bestimmten Größenwerth nach, den sie momentan annimmt, faßlich angegeben werden nur dadurch, daß man die in demselben Grade gleichmäßig wachsende Größe angibt, deren constante Stärke des Wachsens mit jener momentanen zusammenfällt. Die allgemeine Function, unter welche jede in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsende abhängig Veränderliche subsumirt werden kann, ist eine Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten. Sei qx^m das Glied dieser Potenzenreihe mit dem höchsten Exponenten, so ist für ein unveränderliches Δx die mte Differenz der Potenzenreihe constant und gleich $1.2.3...m.q(\Delta x)^m$. Diese mte Differenz ist das bezüglich auf den angenommenen Werth von Δx bestimmte Maß der constanten Stärke des Wachsens im mten Grade. Wird dieselbe durch $(\Delta x)^m$ dividirt, so liefert der so gebildete mte Differenzquotient eine von Δx unabhängige constante Zahl, deren Bedeutung, in sofern sie die Stärke des Wachsens im mten Grade bezeichnen soll, daraus klar ist, daß sie mit der mten Differenz zusammenfällt, wenn man $\Delta x = 1$ setzt.

Soll die Stärke des Wachsens im mten Grade bestimmt werden für eine abhängig Veränderliche, deren Werth entweder überhaupt nicht durch eine Potenzenreihe mit ganzen positiven Exponenten ausgedrückt erscheint, oder durch Potenzen, die den Grad m übersteigen, so ist die mte Dif-

ferenz der Functionswerthe innerhalb jedes auch noch so kleinen angebbaren Intervalles der willkürlich Veränderlichen nicht mehr constant, und die Stärke des Wachsens im $m$ten Grade also stetig veränderlich. Aus der Stetigkeit dieser Veränderung folgt aber, daß die für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im $m$ten Grade sich innerhalb eines Intervalles der Zunahmen von x um so weniger ändert, je kleiner man dies Intervall setzt. Wenn man daher die Stärke des Wachsens im $m$ten Grade innerhalb eines kleinen Intervalles als constant betrachtet, und durch m gleiche Zunahmen, die man vom Anfangspunkte dieses Intervalles und innerhalb desselben nimmt, den $m$ten Differenzquotienten bestimmt, und die durch den Werth desselben angegebene Stärke des Wachsens im $m$ten Grade als diejenige gelten läßt, die im Anfangspunkte dieses Intervalls vorhanden ist, so wird der daraus hervorgehende Fehler durch Verkleinerung der gleichen Zunahmen des x ganz beliebig klein gemacht werden können. Da nun der $m$te Differenzquotient einer Function von x so gut als der erste sich mit Verkleinerung von Δx einem festen Grenzwerthe nähern muß, indem er ja selbst nur der erste Differenzquotient des vorhergehenden, also der erste irgend einer Function von x ist, und da anderseits der Werth des innerhalb eines Intervalls bestimmten $m$ten Differenzquotienten sich mit Verkleinerung des Δx dem wahren Werthe der im Anfangspunkte dieses Intervalles vorhandenen momentanen Stärke des Wachsens im $m$ten Grade ohne Ende nähern muß, so ist klar, daß der mit der Annullirung von Δx eintretende Grenzwerth des $m$ten Differenzquotienten, welcher der $m$te Differentialquotient heißt, und analog den niederen Differentialquotienten einer Function fx durch $\frac{d^m fx}{dx^m}$ bezeichnet wird, die im Anfangspunkte des genommenen Intervalls vorhandene momentane Stärke des Wachsens im $m$ten Grade genau angeben muß. Wird der bestimmte

Zahlenwerth, in welchen der mte Differentialquotient einer Function von x für ein bestimmtes x übergeht, gleich a gefunden, so heißt dies: Die bei diesem bestimmten Werthe des x vorhandene momentane Stärke des Wachsens im mten Grade ist so groß, daß, wenn sie unverändert bliebe, die Glieder der mten Differenzenreihe der durch gleiche Zunahmen Δx entstehenden successiven Functionswerthe sämmtlich gleich $a(\Delta x)^m$, oder für $\Delta x = 1$, gleich a sein würden.

Dies ist die Bedeutung von $\frac{d^m y}{dx^m}$ in Bezug auf das Wachsen der Größen y und x. Da aber der mte Differentialquotient von y zugleich der erste Differentialquotient des $(m-1)$ten Differentialquotienten von y ist (worauf auch das Verfahren der operativen Herleitung des mten Differentialquotienten von y gegründet wird) so hat $\frac{d^m y}{dx^m}$ auch noch die andere Bedeutung, daß dadurch die momentane verhältnißmäßige Stärke des Wachsens der Größen $\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$ und x angegeben wird, sowie selbstverständlich auch die momentane Beschleunigung des Wachsens der Größen $\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}}$ und x, oder die momentane Stärke des Wachsens im dritten Grade der Größen $\frac{d^{m-3} y}{dx^{m-3}}$ und x u. s. w.

Den mit $(dx)^m$ multiplicirten mten Differentialquotienten einer Function von x nennt man das mte Differential dieser Function. Für sich betrachtet hat dasselbe nur eine Bedeutung als Ausdruck der Stärke des Wachsens im mten Grade, indem sein durch den beliebig anzunehmenden Werth von dx bestimmter Zahlenwerth angibt, wie groß bei diesem Werthe von dx die Glieder der mten Differenzenreihe der Functionswerthe sein würden, wenn die Stärke des Wachsens im mten Grade unverändert bliebe.

Relativ zu dem $(m-1)$ten Differential kann aber das mte Differential durch Verkleinerung von dx nicht blos beliebig vielmal kleiner gemacht werden als das Erstere, sondern die beiden Differentiale werden auch, wenn man die Verkleinerung von dx bis zum Nullwerth fortgesetzt denkt, vor ihrem gemeinschaftlichen Uebergang in den Nullwerth in ihrem gegenseitigen Verhältniß alle denkbaren Zahlenwerthe durchlaufen haben, was daraus folgt, daß das $(m-1)$te Differential im Verhältniß der $(m-1)$ten Potenz von dx abnimmt, das mte Differential aber im Verhältniß der mten Potenz von dx. Dies gegenseitige Verhalten des mten Differentials zu dem $(m-1)$ten bei ihrer gemeinschaftlichen Annäherung an Null ist es, was man ausdrücken will, wenn man das mte Differential kurzweg ein Unendlichkleines der mten Ordnung nennt.

In Betreff der möglichen verschiedenen Arten des Wachsens, welche in jedem Grade denkbar sind, überzeugt man sich leicht, daß jeder folgende Grad doppelt so viel Arten zuläßt als der vorhergehende, weil jede in einem Grade vorkommende Art beim Fortgang zum nächsten Grade als eine zunehmende oder abnehmende sich zeigen wird, je nachdem die dem vorhergehenden Grade entsprechenden Differenzen der Functionswerthe entweder größer oder kleiner werden, d. h. je nachdem die nächste Differenz gleiches Vorzeichen mit der vorhergehenden hat oder entgegengesetztes. Dabei müssen die Zunahmen immer innerhalb eines so kleinen Intervalles genommen gedacht werden, daß die mte Differenz gleiches Vorzeichen mit dem mten Differentialquotienten hat, was immer möglich ist, so lange alle Differentialquotienten bis zum mten endliche Werthe haben. Wenn man die Art kennt, wie aus gegebenen Elementen Combinationen mit Wiederholungen und Versetzungen gebildet werden, so wird man sogleich einsehen, daß man alle möglichen Arten der Stärke des Wachsens im mten Grade erhält, wenn man aus den beiden Zeichen $+$ und $-$ die Combinationen der mten Klasse mit Wiederholungen und

Verſetzungen bildet. Im erſten Grade der Stärke des Wachſens hat man nur zwei Fälle, indem der erſte Differentialquotient entweder das Vorzeichen + oder — hat. Indem ſich mit beiden Fällen ein poſitiver oder negativer zweiter Differentialquotient verbindet, erhält man in den Combinationen

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{matrix}$$

die vier Arten des Wachſens im zweiten Grade, und indem zu jeder dieſer vier Arten ein poſitiver oder negativer dritter Differentialquotient hinzutritt, hat man in den Combinationen

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & - & - & - & - \end{matrix}$$

alle acht Arten des Wachſens im dritten Grade. Wenn die untereinander ſtehenden Zeichen die Vorzeichen des erſten, zweiten und dritten Differentialquotienten bedeuten, ſo ſind in der Gruppe links alle Fälle der Stärke des Wachſens im dritten Grade enthalten, welche ſich bei einer im dritten Grade gleichmäßig Wachſenden mit poſitivem dritten Differenzquotienten vereinigt finden, und welche z. B. in dem Wachſen der Ordinaten der Fig. 59 oder in dem Wachſen der Fläche Fig. 62 vereinigt vorkommen, ſowie in der Gruppe rechts alle Fälle des Wachſens im dritten Grade enthalten ſind, welche ſich in dem Wachſen der Ordinaten Fig. 60 und in dem Wachſen der Fläche Fig. 63 vereinigt finden. Wird jeder dieſer acht Combinationen wieder mit + und — verbunden, ſo erhält man vollſtändig die ſechzehn möglichen Arten des Wachſens im vierten Grade, u. ſ. w. Die Anzahl der im $m$ten Grade der Stärke des Wachſens möglichen Arten des Wachſens iſt 2^m. Da jeder Artbegriff des Wachſens ſich in zwei ſpaltet, ſo kann man nach Art eines Stammbaumes eine Stammtafel unſerer Begriffe von den Modificationen des Wachſens auf die einfache Weiſe entwerfen, daß man jede neue dichotomiſche Abzwei-

gung mit den Zeichen + und — behaftet, und alsdann ist jedes Glied in dieser großen Familie von Begriffen durch die Verbindung, in welcher es mit den vorhergehenden Gliedern steht, seiner Natur nach völlig bestimmt. Der Stammbegriff, aus welchem alle die Artbegriffe einer Stärke des Wachsens oder Abnehmens, einer Beschleunigung des Wachsens u. s. w. hervorgehen, ist der Begriff einer veränderlichen Größe, und die Nachkommenschaft dieses Begriffes ist wie Sand am Meere.

Blicken wir zurück auf die Aufgabe, welche wir uns in dem ersten Paragraphen dieses zweiten Theiles unserer Wissenschaft gestellt hatten, und welche darin bestand, die Veränderung der Stärke des Wachsens sowie die Veränderung dieser Veränderung, und so fort jede neu hinzutretende Veränderung, mag dieselbe nun constant oder selbst wieder veränderlich sein, zu bestimmen, und auf diese Weise die in jedem Verflußpunkte der Veränderlichen zusammengedrängten innern Modificationen des Wachsens zu erkennen, und uns einen Blick in die verborgene Werkstätte desselben zu eröffnen, so sehen wir, daß diese Aufgabe jetzt gelöst ist. Denn diese auf den ersten Anblick sehr verwickelt erscheinende Aufgabe ist dadurch zur Erledigung gebracht, daß wir die Vorstellung einer solchen Veränderung des Wachsens auf gleiche Zunahmen, welche die abhängig Veränderliche in irgend einer Stufe der Differenzenbildung annimmt, zurückzuführen, und den Zahlenwerth dieser Zunahmen bei jeder gegebenen Function von x für jeden beliebigen Werth des x zu berechnen gelernt haben. Damit ist der ganze Inhaltreichthum, welcher im Begriffe des Wachsens liegt, erschlossen, und die allgemeine Analyse dieses Begriffes vollendet. Ehe wir jedoch zu speciellen Anwendungen übergehen, haben wir zunächst noch Folgerungen von ganz allgemeiner Natur, welche sich auf die Functionen überhaupt beziehen, aus den gewonnenen Begriffen zu entwickeln, und dieselben werden den Inhalt der beiden nächsten Capitel bilden.

Zehntes Capitel.

Näherungswerthe der Functionen durch gleichmäßig Wachsende in höheren Graden, oder die Taylor'sche, die Maclaurin'sche und andere Reihen.

§. 125.

Allgem. Ausdruck einer in einem höheren Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function.

Ein Jeder, der auch nur einen flüchtigen Blick in die höhere Mathematik geworfen hat, weiß, daß man unbekannte Functionen, welche eine durch gewisse Eigenschaften völlig bestimmte abhängig Veränderliche ausdrücken sollen, in Ermangelung einer andern adäquaten Form näherungsweise durch Potenzenreihen der willkürlich Veränderlichen oder eines Theiles der willkürlich Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten zu entwickeln pflegt, welche Potenzenreihen den Werth der abhängig Veränderlichen um so genauer angeben, je mehr Glieder der Reihe man zusammenaddirt. Dies will heißen, daß man Functionen, welche in allen Graden der Stärke des Wachsens ungleichmäßig wachsend sind, und bei denen die Regel des Wachsens niemals zum Abschluß zu bringen ist, näherungsweise durch andere Functionen ausdrückt, die in irgend einem höheren Grade gleichmäßig wachsend sind. Ziemlich lange vor der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung hat man schon vielfältig solche Entwickelungen von Functionen bewerkstelligt durch Methoden, deren Zusammenhang mit den Begriffen und der Methode der Differential- und Integralrechnung wenigstens nicht unmittelbar einleuchtend ist. Nun haben wir schon in einzelnen Beispielen gesehen, daß eine

Potenzenreihe, d. h. eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Function, welche eine andere Function in demselben Grade berührt, einen Näherungswerth dieser zweiten Function abgeben kann, wenigstens innerhalb eines vom Berührungspunkte aus genommenen nicht allzugroßen Intervalles, wie z. B. die Ordinaten der paraboliſchen Linie dn Fig. 57, welche Linie in Bezug auf Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsend iſt, und die Kreislinie im dritten Grade berührt, faſt ganz mit den Ordinaten der Kreislinie zuſammenfallen innerhalb des Intervalles bc der Abſciſſe. Es fragt ſich alſo, wie die Potenzenreihen überhaupt, die einen Näherungswerth einer Function liefern, mit denjenigen Potenzenreihen zuſammenhängen, in welchen die in irgend einem höheren Grade vorhandene Stärke des Wachſens dieſer Function als zur Ausführung gekommen erſcheint, welche letzteren Potenzenreihen doch ebenfalls einen Näherungswerth liefern können. Die Coefficienten derjenigen Potenzenreihen, welche eine in einem höheren Grade berührende Function ausdrücken, ſind, wie aus den früheren Darſtellungen erſichtlich, beſtimmt durch die in den verſchiedenen Graden ſtattfindende momentane Stärke des Wachſens, welche die berührte Function im Berührungspunkte hat, und es entſteht daher natürlich die Frage, ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function liefern, beſtimmt ſind durch die verſchiedengradige Stärke des Wachſens, welche dieſe Function in irgend einem Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen hat. Es wird aber ferner, auch wenn dieſe Frage entſchieden iſt, außerdem noch feſtgeſtellt werden müſſen, ob und in wiefern eine Function durch eine in einem höheren Grade gleichmäßig Wachſende mit beliebig großer Genauigkeit ausgedrückt werden könne, damit man einerſeits nicht durch blindlings angenommenen uneingeſchränkten Gebrauch ſolcher Potenzenreihen in die Irre geführt werde, anderſeits nicht durch übertriebene Vorſicht ſich zu ſehr beengen laſſe in dem Gebrauche derſelben.

Um die vorgelegten Untersuchungen auszuführen, wird es vor allen Dingen nöthig sein, die Darstellung einer in irgend einem höheren Grade berührenden und zugleich gleichmäßig wachsenden Function, welche bisher nur in sehr speciellen Beispielen gegeben worden ist, zu verallgemeinern, und zwar so, daß sie sich erstens auf alle Grade der Berührung anwenden läßt, daß sie zweitens sich auf eine beliebige Function $f(x)$, welche die in einem höheren Grade berührte Function vorstellen soll, bezieht, und daß sie drittens auf einen ganz beliebigen Berührungspunkt bezogen ist. Das zu dieser Darstellung anzuwendende Verfahren ist genau dasselbe, welches früher in den speciellen Beispielen angewendet worden ist, und kann durch den Rückblick auf jene Beispiele des Unfaßlichen, was solche abstracte Entwickelungen für Ungeübtere zu haben pflegen, leicht entkleidet werden. Es ist unbeschadet der Allgemeinheit gestattet, die ganze Darstellung der berührenden Function auf das anschauliche Bild von sich berührenden Linien zu beziehen.

Es sei die Ordinate einer Linie gegeben durch die Function $f(x)$ der Abscisse x. An der Stelle der Linie, an welcher x den Zahlenwerth a hat, kann man sich eine in Bezug auf ihre Ordinaten in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Linie denken. Es soll die Gleichung für die Ordinate y einer solchen etwa im fünften Grade berührenden Linie aufgestellt werden, wobei sich diese Gleichung auf dasselbe Coordinatensystem beziehen möge, welches der Ordinatengleichung der berührten Linie zu Grunde liegt. Die gesuchte Gleichung wird im Allgemeinen sein

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

und es handelt sich darum, die unbestimmten Coefficienten A, B, C u. s. w. durch die als gegeben betrachtete Function $f(x)$ und den Zahlenwerth a zu bestimmen. Da die Linien für den Werth a der willkürlich Veränderlichen sich im fünften Grade berühren sollen, so werden die Werthe,

Potenzenreihe, d. h. eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Function, welche eine andere Function in demselben Grade berührt, einen Näherungswerth dieser zweiten Function abgeben kann, wenigstens innerhalb eines vom Berührungspunkte aus genommenen nicht allzugroßen Intervalles, wie z. B. die Ordinaten der paraboliſchen Linie in Fig. 57, welche Linie in Bezug auf Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsend iſt, und die Kreislinie im dritten Grade berührt, faſt ganz mit den Ordinaten der Kreislinie zuſammenfallen innerhalb des Intervalles bc der Abſciſſe. Es fragt ſich alſo, wie die Potenzenreihen überhaupt, die einen Näherungswerth einer Function liefern, mit denjenigen Potenzenreihen zuſammenhängen, in welchen die in irgend einem höheren Grade vorhandene Stärke des Wachſens dieſer Function als zur Ausführung gekommen erſcheint, welche letzteren Potenzenreihen doch ebenfalls einen Näherungswerth liefern können. Die Coefficienten derjenigen Potenzenreihen, welche eine in einem höheren Grade berührende Function ausdrücken, ſind, wie aus den früheren Darſtellungen erſichtlich, beſtimmt durch die in den verſchiedenen Graden ſtattfindende momentane Stärke des Wachſens, welche die berührte Function im Berührungspunkte hat, und es entſteht daher natürlich die Frage, ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function liefern, beſtimmt ſind durch die verſchiedengradige Stärke des Wachſens, welche dieſe Function in irgend einem Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen hat. Es wird aber ferner, auch wenn dieſe Frage entſchieden iſt, außerdem noch feſtgeſtellt werden müſſen, ob und in wiefern eine Function durch eine in einem höheren Grade gleichmäßig Wachſende mit beliebig großer Genauigkeit ausgedrückt werden könne, damit man einerſeits nicht durch blindlings angenommenen uneingeſchränkten Gebrauch ſolcher Potenzenreihen in die Irre geführt werde, anderſeits nicht durch übertriebene Vorſicht ſich zu ſehr beengen laſſe in dem Gebrauche derſelben.

Um die vorgelegten Unterſuchungen auszuführen, wird es vor allen Dingen nöthig ſein, die Darſtellung einer in irgend einem höheren Grade berührenden und zugleich gleichmäßig wachſenden Function, welche bisher nur in ſehr ſpeciellen Beiſpielen gegeben worden iſt, zu verallgemeinern, und zwar ſo, daß ſie ſich erſtens auf alle Grade der Berührung anwenden läßt, daß ſie zweitens ſich auf eine beliebige Function $f(x)$, welche die in einem höheren Grade berührte Function vorſtellen ſoll, bezieht, und daß ſie drittens auf einen ganz beliebigen Berührungspunkt bezogen iſt. Das zu dieſer Darſtellung anzuwendende Verfahren iſt genau daſſelbe, welches früher in den ſpeciellen Beiſpielen angewendet worden iſt, und kann durch den Rückblick auf jene Beiſpiele des Unfaßlichen, was ſolche abſtracte Entwickelungen für Ungeübtere zu haben pflegen, leicht entkleidet werden. Es iſt unbeſchadet der Allgemeinheit geſtattet, die ganze Darſtellung der berührenden Function auf das anſchauliche Bild von ſich berührenden Linien zu beziehen.

Es ſei die Ordinate einer Linie gegeben durch die Function $f(x)$ der Abſciſſe x. An der Stelle der Linie, an welcher x den Zahlenwerth a hat, kann man ſich eine in Bezug auf ihre Ordinaten in einem höheren Grade gleichmäßig wachſende und in demſelben Grade berührende Linie denken. Es ſoll die Gleichung für die Ordinate y einer ſolchen etwa im fünften Grade berührenden Linie aufgeſtellt werden, wobei ſich dieſe Gleichung auf daſſelbe Coordinatenſyſtem beziehen möge, welches der Ordinatengleichung der berührten Linie zu Grunde liegt. Die geſuchte Gleichung wird im Allgemeinen ſein

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$$

und es handelt ſich darum, die unbeſtimmten Coefficienten A, B, C u. ſ. w. durch die als gegeben betrachtete Function $f(x)$ und den Zahlenwerth a zu beſtimmen. Da die Linien für den Werth a der willkürlich Veränderlichen ſich im fünften Grade berühren ſollen, ſo werden die Werthe,

welche die Function $f(x)$ und ihre fünf erſten Differentialquotienten für $x=a$ annehmen, und die durch $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. ſ. w. zu bezeichnen ſind, gleich ſein den Werthen, welche die Function y und ihre fünf erſten Differentialquotienten für $x=a$ annehmen. Die Differentialquotienten der Function y ſind der Reihe nach

$$B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4$$
$$1.2C+2.3Dx+3.4Ex^2+4.5Fx^3$$
$$1.2.3D+2.3.4Ex+3.4.5Fx^2$$
$$1.2.3.4E+2.3.4.5Fx$$
$$1.2.3.4.5F.$$

Nehmen wir die Werthe, in welche die Function y und ihre fünf erſten Differentialquotienten übergehen, ſobald man der willkürlich Veränderlichen x einen gewiſſen Zahlenwerth a ertheilt, ſo können wir folgende Gleichungen bilden:

$$f(a)=A+Ba+Ca^2+Da^3+Ea^4+Fa^5$$
$$\frac{df(a)}{dx}=B+2Ca+3Da^2+4Ea^3+5Fa^4$$
$$\frac{d^2f(a)}{dx^2}=1.2C+2.3Da+3.4Ea^2+4.5Fa^3$$
$$\frac{d^3f(a)}{dx^3}=1.2.3D+2.3.4Ea+3.4.5Fa^2$$
$$\frac{d^4f(a)}{dx^4}=1.2.3.4E+2.3.4.5Fa$$
$$\frac{d^5f(a)}{dx^5}=1.2.3.4.5F.$$

Da wir ſechs Gleichungen haben, ſo laſſen ſich die in denſelben enthaltenen ſechs unbeſtimmten Coefficienten ABCDEF beſtimmen. Löſen wir daher dieſe Gleichungen ſo auf, daß wir die ſechs Coefficienten als die geſuchten Unbekannten betrachten, ſo erhalten wir

$$F=\frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{d^5f(a)}{dx^5}$$
$$E=\frac{1}{1.2.3.4}\left[\frac{d^4f(a)}{dx^4}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a}{1}\right]$$

$$D=\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{d^3f(a)}{dx^3}-\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^2}{1.2}\right]$$

$$C=\frac{1}{1.2}\left[\frac{d^2f(a)}{dx^2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right]$$

$$B=\frac{1}{1}\left[\frac{df(a)}{dx}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}\right]$$

$$A=fa-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\cdot$$

Führen wir dieſe für die unbeſtimmten Coefficienten gefundenen Werthe ein in die obige Function von x, welche für die Ordinate y der im fünften Grade berührenden Linie angenommen worden war, ſo erhalten wir

$$\begin{aligned}y=f(a)&-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\\&+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\\&+\left[\frac{df(a)}{dx}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right.\\&\left.+\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^4}{1.2.3.4}\right]\frac{x}{1}+\left[\frac{d^2f(a)}{dx^2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a}{1}\right.\\&\left.+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\right]\frac{x^2}{1.2}\\&+\left[\frac{d^3f(a)}{dx^3}-\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a^2}{1.2}\right]\frac{x^3}{1.2.3}\\&+\left[\frac{d^4f(a)}{dx^4}-\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{a}{1}\right]\frac{x^4}{1.2.3.4}\\&+\frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\quad(1)\end{aligned}$$

Wir wollen, ſowie wir bei dieſer Reihe durch Beifügung der Zahl 1 gethan haben, die in dieſem Capitel noch aufzuſtellenden verſchiedenen Reihen numeriren, um ſie auf dieſe Weiſe kurz bezeichnen zu können.

Die vorstehende Potenzenreihe von x ist, abgesehen von Linien und ihren Ordinaten, überhaupt der allgemeine Ausdruck einer im fünften Grade gleichmäßig wachsenden Function von x, welche mit einer beliebigen Function f(x) eine Berührung im fünften Grade eingeht bei demjenigen Functionswerthe, für welchen die willkürlich Veränderliche x den Zahlenwerth a hat. Obgleich die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x aus einer ziemlichen Anzahl von Theilen zusammengesetzt erscheinen, so ist doch das Bildungsgesetz derselben so einfach und übersichtlich, daß man ohne Weiteres im Stande sein wird, die Formel durch Induction zu verallgemeinern, und auf beliebige höhere Grade der Berührung auszudehnen. Man braucht nämlich nur zu beachten, daß in den Coefficienten der einzelnen Potenzen von x die aufsteigenden Differentialquotienten von f(x) mit ihren für x=a geltenden speciellen Werthen vorkommen, und daß diese Differentialquotienten zwar in allen Coefficienten aufsteigen bis zu der Rangzahl, welche den Grad der Berührung angibt, daß aber der Coefficient einer jeden Potenz von x anfängt mit dem gleichhohen Differentialquotienten. Das den Potenzen von x vorausgehende constante Glied enthält außer den sämmtlichen Differentialquotienten auch noch f(a). In allen Coefficienten der Potenzen von x sowol als in dem constanten Gliede der Formel haben die Bestandtheile abwechselnde Vorzeichen und der erste das Vorzeichen +, und in allen enthält der zweite Bestandtheil den Factor a, der dritte den Factor $\frac{a^2}{1.2}$, der vierte den Factor $\frac{a^3}{1.2.3}$ u. s. w. In diesen wenigen Bestimmungen ist das ganze Bildungsgesetz der Formel enthalten. Man wird bemerken, daß man, um die in irgend einem Grade berührende Function darzustellen, die berührte Function f(x) nicht zu kennen braucht, sondern daß man nur einen speciellen Werth f(a) derselben zu wissen braucht, und den ersten Differentialquotienten von f(x) allgemein ha-

ben muß, um die folgenden Differentialquotienten daraus abzuleiten.

Soll zunächst eine im ersten Grade gleichmäßig wachsende und im ersten Grade berührende Function dargestellt werden, z. B. die Ordinate der Tangente bei Parallelordinaten, so kommt in dem Ausdrucke derselben nur die erste Potenz von x vor, indem alle Differentialquotienten von f(x) vom zweiten an wegfallen, und man erhält

$$y = fa - \frac{df(a)}{dx} \cdot a + \frac{df(a)}{dx} \cdot x,$$

welches bekanntlich die allgemeine Gleichung der Tangente ist für eine krumme Linie, deren Ordinate durch f(x) ausgedrückt ist, und die in dem Punkte, für welchen die Abscisse gleich a ist, von der Tangente berührt wird.

Eine im zweiten Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Function wird gegeben durch die Gleichung

$$y = f(a) - \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} + \left[\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a}{1}\right] \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}.$$

Dies ist also auch die allgemeine Gleichung der Parabel, in deren Ordinaten die momentane Beschleunigung des Wachsens der Parallelordinaten einer Curve zur Ausführung kommt. Wir haben früher die Gleichungen einiger solcher Parabeln unmittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe abgeleitet. Nimmt man statt der unbestimmten Function f(x) die in jenen Beispielen gegebenen bestimmten, und statt a den für den Berührungspunkt angenommenen Abscissenwerth, so werden die nach der vorstehenden Formel erhaltenen Functionen von x mit den dort gefundenen zusammenfallen.

Ebenso würde die früher für specielle Curven mühsam abgeleitete Gleichung einer in Bezug auf ihre Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachsenden und im dritten Grade berührenden paraboliſchen Linie für jede Curve erhalten werden nach der Formel:

$$y = f(a) - \frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}$$
$$+ \left[\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^2}{1.2}\right]\frac{x}{1}$$
$$+ \left[\frac{d^2f(a)}{dx^2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a}{1}\right]\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Was hier von Ordinaten krummer Linien gezeigt ist, gilt von den Functionen überhaupt, und sowie die Ordinate einer in einem höheren Grade berührenden Linie mit der Ordinate der berührten wenigstens in der Nähe des Berührungspunktes sehr nahe zusammenfallen kann, so wird auch allgemein die eine Function $f(x)$ in einem höheren Grade berührende Function, d. h. der durch die Reihe (l) gegebene Ausdruck von y, ein Näherungswerth der Function $f(x)$ sein können, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalls der willkürlich Veränderlichen. Die Bedingungen, unter welchen die berührende Function einen mit höheren Graden der Berührung immer genauer werdenden Näherungswerth der berührten Function angibt auch für solche Werthe von x, welche von a sehr verschieden sind, sowie die Bedingungen, unter welchen durch die Formel der berührenden Function ein Näherungswerth der berührten überhaupt nicht erhalten werden kann, sollen später untersucht und festgestellt werden. Vorläufig halten wir uns an die unmittelbar sich darbietende Vorstellung, daß es im Allgemeinen möglich ist, auf diesem Wege Näherungswerthe der Functionen zu erhalten.

Um ein Beispiel von wirklicher Berechnung eines Näherungswerthes nach unserer Formel zu geben, so nehmen wir an, man wollte den Logarithmus einer Zahl durch eine Potenzenreihe von x annähernd berechnen. Wir wollen bei Bestimmung dieses Näherungswerthes nur bis zum dritten Grade der Berührung fortgehen. Die Function $f(x)$ der allgemeinen Formel ist jetzt $\mathrm{L}gx$. Wenn B die Basis des angenommenen Logarithmensystems ist, so

die drei erſten Differentialquotienten der Function Lgx der Reihe nach $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2}{x^3}$, wobei lB den natürlichen Logarithmus der Baſis B vorſtellt (ſ. §. 83). Die allgemeinen Ausdrücke $f(a)$ $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$, $\frac{d^3f(a)}{dx^3}$ der Formel ſind alſo in unſerm Falle gegeben durch Lga, $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{lB}\cdot\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2}{a^3}$. Führen wir dieſe Werthe ein in die allgemeine Formel der im dritten Grade berührenden Function, und ſetzen wir dieſe erhaltene Function von x, als Näherungswerth von Lgx, ohne Weiteres dieſem gleich, ſo haben wir

$$Lgx=Lga+\frac{1}{lB}\left[-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{lB}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right]\frac{x}{1}$$
$$+\frac{1}{lB}\left[-\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^2}\right]\frac{x^2}{1.2}+\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2}{a^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Man wird von einer ſolchen nur im dritten Grade berührenden Function natürlich nicht mehr erwarten, als daß ſie den Werth von Lgx mit einiger Genauigkeit angibt, ſobald x nicht ſehr verſchieden von a iſt. Es würde freilich leicht ſein, dieſe Formel für den beliebigen mten Grad der Berührung aufzuſtellen, und dann erhielte man die Function Lgx ausgedrückt durch eine Potenzenreihe von x, welche auch für ſolche Werthe von x, die von a bedeutend abweichen innerhalb eines ſpäter noch genauer zu beſtimmenden Spielraums, einen mit Vergrößerung der Zahl m ohne Ende genauer werdenden Näherungswerth von Lgx liefert. Nehmen wir an, es ſollte nach der obigen Formel der gemeine Logarithmus einer Zahl berechnet werden, ſo iſt ſtatt $\frac{1}{lB}$ die Zahl $\frac{1}{l10}$ oder 0,434294... zu ſetzen. Die Zahl a muß ſo gewählt werden, daß Lga bekannt iſt. Nehmen wir z. B. a=100, und folglich

dern sehr erleichtert wird, was offenbar für den Gebrauch dieser Reihen, bei welchen je nach Bedürfniß der Grad der Berührung oft sehr verschieden genommen wird, sehr wünschenswerth ist. Um diese einfache Form des erwähnten Gesammtzusatzes zu finden, brauchen wir nur die successiven berührenden Functionen so aufzustellen, daß wir durch Zusetzung der fehlenden Bestandtheile von einer Function zur folgenden übergehen. Die im ersten Grade berührende Function ist

$$f(a) - \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1}.$$

Vergleichen wir diese Function mit der im zweiten Grade berührenden, so sehen wir, daß zu der ersteren noch die Bestandtheile

$$\frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$

hinzutreten müssen, um die zweite zu bilden. Die im dritten Grade berührende Function geht hervor, wenn wir zu der im zweiten Grade berührenden noch folgende Bestandtheile zusetzen

$$\frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^2}{1.2} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}.$$

Um zu der im vierten Grade berührenden Function überzugehen, müßten wir zu der im dritten Grade berührenden zusetzen

$$\frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^2}{1.2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4}.$$

Das sehr einfache Bildungsgesetz eines solchen Zusatzes ist aus den vorliegenden Fällen hinlänglich einleuchtend. Da in allen Bestandtheilen eines jeden Zusatzes derselbe Differentialquotient von $f(x)$ vorkommt, so können wir dieselben auch so schreiben

der im dritten Grade berührenden Function noch der Werth von $\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{(a-x)^4}{1.2.3.4}$ hinzugesetzt werden muß, um den entsprechenden Werth der im vierten Grade berührenden Function zu erhalten. In unserm Beispiel vom Logarithmus, wo der vierte Differentialquotient von Lgx gleich ist $-\frac{1}{lB}\cdot\frac{1.2.3}{x^4}$, und statt $\frac{d^4f(a)}{dx^4}$ also zu setzen ist $-0{,}434294\,.\,\frac{1.2.3}{a^4}$, wird demnach, da $a=100$ und $x=101$ angenommen war, zu dem schon gefundenen Näherungswerth noch $-0{,}434294\,.\,\frac{1.2.3}{100^4}\cdot\frac{(101-100)^4}{1.2.3.4}$ oder $-0{,}434294\,.\,\frac{1}{4.100^4}$ zugefügt werden müssen. Da diese Zahl in den acht ersten Decimalstellen lauter Nullen hat, so kann der durch die im dritten Grade berührende Function gefundene Näherungswerth des Logarithmus von 101 durch weiter getriebene Annäherung erst in der achten Decimalstelle einen Zusatz erhalten.

§. 126.

Die Taylor'sche Reihe.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Potenzenreihe von x, die Reihe (1), durch welche allgemein die eine beliebige Function f(x) in einem höheren Grade berührende Function ausgedrückt ist, hat in dieser Form das Unbequeme, daß die Coefficienten der Potenzen von x sowol als das constante Glied der Reihe für jeden andern Grad der Berührung auch andere werden, indem man, um die im nächsthöheren Grade berührende Function darzustellen, zu jedem Gliede der Reihe noch einen Bestandtheil zusetzen muß. Betrachten wir aber die Summe dieser Zusätze für sich, so bemerken wir, daß sie auf eine sehr einfache Form gebracht werden kann, wodurch der Fortgang von einem Grade der Berührung zu einem an-

dern sehr erleichtert wird, was offenbar für den Gebrauch dieser Reihen, bei welchen je nach Bedürfniß der Grad der Berührung oft sehr verschieden genommen wird, sehr wünschenswerth ist. Um diese einfache Form des erwähnten Gesammtzusatzes zu finden, brauchen wir nur die successiven berührenden Functionen so aufzustellen, daß wir durch Zusetzung der fehlenden Bestandtheile von einer Function zur folgenden übergehen. Die im ersten Grade berührende Function ist

$$f(a) - \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1}.$$

Vergleichen wir diese Function mit der im zweiten Grade berührenden, so sehen wir, daß zu der ersteren noch die Bestandtheile

$$\frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$

hinzutreten müssen, um die zweite zu bilden. Die im dritten Grade berührende Function geht hervor, wenn wir zu der im zweiten Grade berührenden noch folgende Bestandtheile zusetzen

$$\frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^2}{1.2} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}.$$

Um zu der im vierten Grade berührenden Function überzugehen, müßten wir zu der im dritten Grade berührenden zusetzen

$$\frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^4}{1.2.3.4} - \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a^2}{1.2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{d^4f(a)}{dx^4} \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4}.$$

Das sehr einfache Bildungsgesetz eines solchen Zusatzes ist aus den vorliegenden Fällen hinlänglich einleuchtend. Da in allen Bestandtheilen eines jeden Zusatzes derselbe Differentialquotient von f(x) vorkommt, so können wir dieselben auch so schreiben

$$f(a)+\frac{df(a)}{dx}\left[-a+x\right]$$
$$+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\left[\frac{a^2}{1.2}-\frac{a}{1}\cdot\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\right]$$
$$+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\left[-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x}{1}-\frac{a}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\right]$$
$$+\frac{d^4f(a)}{dx^4}\left[\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{x}{1}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x^2}{1.2}\right.$$
$$\left.-\frac{a}{1}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\right].$$

Je nachdem man in dieſem Ausdrucke nur die erſte Horizontalreihe, oder die Summe der erſten und zweiten, oder die Summe der erſten, zweiten und dritten nimmt u. ſ. w., hat man die im erſten, zweiten oder dritten Grade u. ſ. w. berührende Function. Man wird aber ſogleich bemerken, daß die in Klammern ſtehenden Ausdrücke die Form von Potenzen eines Binoms haben, und zwar daß dieſer Ausdruck in der erſten Horizontalreihe gleich $(x-a)^1$, in der zweiten gleich $\frac{1}{1.2}(x-a)^2$, in der dritten gleich $\frac{1}{1.2.3}(x-a)^3$ und in der vierten gleich $\frac{1}{1.2.3.4}(x-a)^4$ iſt. Und da die Berechtigung der Fortſetzung dieſer einfachen Bildungsregel augenfällig iſt, ſo können wir eine die Function $f(x)$ in irgend einem höheren Grade berührende und in demſelben Grade gleichmäßig wachſende Function y, ſtatt in Form der Reihe (1), in folgender Form ausdrücken

$$y=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{(x-a)^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\ldots.\ (2).$$

Hier haben wir nun einen Ausdruck der berührenden Function, welcher die größte Bequemlichkeit des Fortganges von einem Grade der Berührung zu einem nächſthöheren darbietet, da bei dieſem Fortgange die Coefficienten der Potenzen von $(x-a)$ nicht verändert werden, ſondern nur

tung zugeschrieben zu haben. Wir werden jedoch in einem folgenden Paragraphen dieses Capitels sehen, daß er gewissen Einschränkungen unterworfen werden muß.

Wenn es Einem nur um die Aufstellung der Taylor'schen Reihe, als der einfachsten Form der in einem beliebigen, aber festen, nicht mit x veränderlichen Punkte berührenden Function, zu thun ist, so braucht man dieselbe nicht, wie hier geschehen, aus der Reihe (1) abzuleiten, sondern man kann sie unmittelbar auf demselben Wege wie die Reihe (1) erhalten, welcher Weg aber alsdann unter den bei der Taylor'schen Reihe gesetzten vereinfachenden Bedingungen viel kürzer wird. Es sei, um dies kurz darzustellen, die willkürlich Veränderliche einer Function durch $a+x$ und die Function selbst durch $f(a+x)$ ausgedrückt. Es soll eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Function gesucht werden, welche die Function $f(a+x)$ in demselben Grade berührt, und zwar an der Stelle, wo die willkürlich Veränderliche der berührten Function den Zahlenwerth a hat. Nehmen wir an, daß x die willkürlich Veränderliche der gesuchten Function sei, so hat dieselbe, als eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende, im Allgemeinen die Form

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots$$

Die Werthe, welche diese Function und ihre successiven Differentialquotienten annehmen für $x=0$, sollen zusammenfallen mit den Werthen, welche die Function $f(a+x)$ und ihre Differentialquotienten annehmen für $x=0$, d. h. mit den Werthen $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. s. w. Die successiven Differentialquotienten der durch unbestimmte Coefficienten ausgedrückten gesuchten Function sind der Reihe nach

$$B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3\ldots.$$
$$1.2C+2.3.Dx+3.4Ex^2\ldots.$$
$$1.2.3D+2.3.4Ex\ldots.$$
$$1.2.3.4E\ldots.$$

Für $x=0$ nimmt die gesuchte Function den Werth A, und

ihre vier Differentialquotienten nehmen der Reihe nach die Werthe B, 1.2.C, 1.2.3D und 1.2.3.4E an; und da dieſe Werthe, wie vorher geſagt, den Werthen von f(a), $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. ſ. w. gleich ſein ſollen, ſo erhalten wir die Gleichungen $A=f(a)$, $B=\frac{df(a)}{dx}$, $1.2C=\frac{d^2f(a)}{dx^2}$, $1.2.3D=\frac{d^3f(a)}{dx^3}$, $1.2.3.4E=\frac{d^4f(a)}{dx^4}$, und durch dieſelben die unbeſtimmten Coefficienten ohne Weiteres ausgedrückt durch ſpecielle Werthe der berührten Function und ihrer Differentialquotienten. Setzen wir die ſo erhaltenen Werthe von A, B, C, D, E in die oben angenommene Form der berührenden Function, ſo haben wir

$$y=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots(5).$$

Verlangt man eine anſchauliche Nachweiſung des Werthes und der Bedeutung eines beliebigen Aggregats von Gliedern der Taylor'ſchen Reihe, oder eines einzelnen Gliedes derſelben, ſo iſt dieſelbe leicht zu geben. Erſtens iſt für ſich einleuchtend, daß ein vom Anfang der Reihe an genommenes Aggregat von Gliedern nichts weiter vorſtellt, als diejenige Function, in welcher die momentane Stärke des Wachſens irgend eines Grades, die für den Werth a der willkürlich Veränderlichen einer Function vorhanden iſt, zur Ausführung kommt, was wir früher in Bezug auf veränderliche Raumgrößen die Conſtruction der momentanen Stärke des Wachſens eines Grades genannt haben. Nehmen wir z. B. die Summe der beiden erſten Glieder, ſo iſt die Gleichung

$$y=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}$$

allerdings auch die allgemeine Parallelordinatengleichung der Tangente einer krummen Linie, deren Ordinate $=f(x)$, aber unter der Vorausſetzung, daß für den Berührungs-

punkt die Abſciſſe der Tangente den Nullwerth und die Abſciſſe der Curve den Werth a hat. Ebenſo wird

$$y = f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$

die allgemeine Parallelordinatengleichung derjenigen Parabel ſein, die in Bezug auf ihre Ordinaten gleichmäßig wachſend iſt im zweiten Grade und eine andere Curve in demſelben Grade berührt unter denſelben Vorausſetzungen in Betreff der Anfangspunkte der Abſciſſen der ſich berührenden Linien. Die Summe der vier erſten Glieder der Taylor'ſchen Reihe ſtellt die Ordinate der in Bezug auf ihre Ordinaten im dritten Grade gleichmäßig wachſenden und in demſelben Grade berührenden cubiſchen Parabel vor u. ſ. w. Wir ſehen alſo, daß die früher auf einem etwas mühſamen Wege ausgeführten Conſtructionen der in einem beſtimmten Punkte vorhandenen momentanen Stärke des Wachſens irgend eines Grades leichter hätten erhalten werden können, wenn wir gleich die Annahme gemacht hätten, daß der Anfangspunkt der Abſciſſe der berührenden Linie in den Berührungspunkt verlegt werden ſollte.

Aus der Bedeutung eines vom Anfang an genommenen Aggregats von Gliedern der Taylor'ſchen Reihe geht auch die Bedeutung jedes einzelnen Gliedes derſelben für ſich hervor. So ſtellt z. B. das Glied $\frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2}$ den bei jedem Werthe von x vorhandenen Unterſchied der Ordinaten der Parabel und der Tangente vor, und ebenſo wird das Glied $\frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3}$ den Reſt angeben, der übrig bleibt, wenn man die Ordinate der gemeinen Parabel von der Ordinate der cubiſchen Parabel abzieht u. ſ. w.

Oder betrachten wir noch die Conſtructionen der in verſchiedenen Graden ſtattfindenden Stärke des Wachſens der Flächen. In Fig. 57 z. B. ſind die Flächen conſtruirt, welche für den Punkt b der Abſciſſe des Kreiſes die Kreisfläche im erſten, zweiten, dritten und vierten Grade berüh-

ren, und in denſelben Graden gleichmäßig wachſend ſind. Die Abſciſſe des Kreiſes habe wie früher ihren Nullpunkt im Punkt a. Das Stück ab derſelben habe den Werth a, und ein vom Punkte b aus gerechnetes Abſciſſenſtück den Werth x. Die Function der Abſciſſe, welche die Kreisfläche ausdrückt, ſei durch $f(a+x)$ vorgeſtellt. Unter $f(a)$ haben wir alſo zu denken das Stück abd der Kreisfläche. Legen wir dem x den Werth der Linie bc bei, ſo iſt $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}$ der Flächeninhalt des Parallelogramms dbcq, und $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$ der Flächeninhalt des Paralleltrapezes dbco, wie aus den früher ausgeführten Conſtructionen dieſer Flächen einleuchtend iſt. Mithin ſtellt das Glied $\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$ für ſich allein den Flächeninhalt des Dreiecks dqo vor. Da ferner $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$ das paraboliſche Flächenſtück dbcp ausdrückt, ſo gibt $\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$ den Flächeninhalt von dpo an. Aus denſelben Gründen iſt erſichtlich, daß das Glied $\frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}$ das zwiſchen den Linien dn, dp und np enthaltene Flächenſtück angibt.

Man wird aus dieſen Beiſpielen entnehmen, daß es nicht die geringſte Schwierigkeit hat, bei jeder beliebigen veränderlichen Raumgröße, deren Werth durch die Taylor'ſche Reihe annähernd entwickelt iſt, die geometriſche Bedeutung ſowol eines beliebigen Aggregats aufeinanderfolgender Glieder dieſer Reihe als auch jedes einzelnen Gliedes für ſich anzugeben.

Es mag noch ſchließlich bemerkt werden, daß die Reihe (4), da ſie allgemein die eine Function $f(a+x)$ in einem höheren Grade berührende Function ausdrückt, auch gebraucht werden kann, um den Werth der berühren-

den Function auszudrücken für solche Werthe der willkürlich Veränderlichen, welche kleiner sind als a, oder welche vor dem Berührungspunkte liegen. Bezeichnen wir einen solchen Werth der willkürlich Veränderlichen durch $a-x$, indem x jetzt ein vom Berührungspunkte aus rückwärts genommenes Intervall der willkürlich Veränderlichen vorstellt, so werden wir den dem Werthe $(a-x)$ zugehörigen Werth der berührenden Function erhalten, wenn wir in der Reihe (4) überall $-x$ statt x setzen. Da die geraden Potenzen von x dadurch nicht verändert werden, und die ungeraden die entgegengesetzten Vorzeichen annehmen, so erhalten wir die Gleichung

$$f(a-x)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots(6)$$

welche ebenso, wie die Gleichungen (3) und (4), unter dem Taylor'schen Lehrsatze inbegriffen ist.

§. 127.

Erläuterung des Gebrauchs des Taylor'schen Lehrsatzes.

In sofern die in Form der Taylor'schen Reihe ausgedrückte berührende Function eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function gestattet bei Steigerung des Berührungsgrades, was bei vielen Functionen für alle Werthe des x und a, bei andern nur innerhalb gewisser Grenzen dieser Werthe stattfindet, kann die Taylor'sche Reihe gebraucht werden, um aus dem direct gegebenen Differentialquotienten einer unbekannten Function diese Function selbst zu entwickeln. Denn ist uns der Differentialquotient einer unbekannten Function $f(x)$ allgemein als Function von x gegeben, so können wir aus demselben die folgenden Differentialquotienten von $f(x)$ durch Differentiation darstellen, und indem wir in diese Differentialquotienten statt x den bestimmten gegebenen Zahlenwerth a setzen, erhalten wir die Werthe der Ausdrücke $\frac{df(a)}{dx}$,

$\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ u. ſ. w. und in denſelben die Coefficienten der einzelnen Potenzen des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles der willkürlich Veränderlichen der unbekannten Function, welches Intervall, wie in den Reihen (2) und (4), nach Belieben durch $(x-a)$ oder durch x bezeichnet wird. Außerdem muß man aber, um eine numeriſch völlig beſtimmte Function durch die Taylor'ſche Reihe zu erhalten, noch den ſpeciellen Werth, den die unbekannte Function $f(x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen annimmt, wiſſen. Da jedoch der Werth a, für welchen die Berührung ſtattfinden ſoll, im Allgemeinen willkürlich iſt, ſo heißt dies nur, man muß außer dem allgemein ausgedrückten Differentialquotienten der unbekannten Function noch irgend einen ſpeciellen Werth derſelben haben, auf welchen Letzteren man dann nur den Berührungspunkt der Functionen zu verlegen braucht, um in der Taylor'ſchen Reihe eine völlig beſtimmte Function zu erhalten. Alles dies gilt auch von der Reihe (1). Man wird bemerken, daß die Darſtellung einer unbekannten Function durch die Taylor'ſche Reihe genau dieſelben Data vorausſetzt, als die Darſtellung einer Function durch Integration. Denn wenn eine unbekannte Function durch Integration gefunden werden ſoll, ſo muß außer dem allgemeinen Ausdrucke des Differentialquotienten dieſer Function ein ſpecieller Werth derſelben, den ſie für einen beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen annimmt, gegeben ſein, weil ſich nur vermöge eines ſolchen ſpeciellen Werthes der Function die Conſtante des Integrals beſtimmen läßt. Die Entwickelung einer Function durch die Taylor'ſche Reihe kann demnach auch als eine Art Integration durch Reihen betrachtet werden, und daß beide Verfahrungsweiſen immer auf daſſelbe Reſultat führen müſſen, werden wir in dem folgenden Paragraphen noch nachweiſen.

Um den Gebrauch der Taylor'ſchen Reihe durch Beiſpiele zu erläutern, nehmen wir beliebige Functionen, deren

Differentialquotient auf irgend einem Wege ohne Kenntniß der Function gefunden iſt. Der Differentialquotient von lx als des natürlichen Logarithmen einer Zahl x, z. B. iſt $\frac{1}{x}$, und die folgenden Differentialquotienten ſind der Reihe nach $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1.2}{x^3}$, $-\frac{1.2.3}{x^4}$ u. ſ. w. Für den Werth a der willkürlich Veränderlichen der zu entwickelnden Function nehmen dieſe Function und ihre Differentialquotienten die Werthe la, $+\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a^2}$, $+\frac{1.2}{a^3}$, $-\frac{1.2.3}{a^4}$ u. ſ. w. an. Folglich wird, wenn wir die willkürlich Veränderliche der zu entwickelnden Function durch $(a+x)$ ausdrücken, nach dem Taylor'ſchen Lehrſatz

$$l(a+x) = la + \frac{1}{a}\cdot\frac{x}{1} - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1.2}{a^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1.2.3}{a^4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}\cdots = la + \left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 \cdots$$

Setzen wir $a=1$, ſo erhalten wir

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

und ſomit dieſelbe Reihe, welche wir in §. 80 aus $\frac{1}{1+x}$ als dem Differentialquotienten von $l(1+x)$, durch Integration hergeleitet haben.

Wäre gefordert, die Function $\sin x$ nach Potenzen eines Theils der willkürlich Veränderlichen zu entwickeln, ſo bildete man zuerſt die Differentialquotienten von $\sin x$, und erhielte $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d^2\sin x}{dx^2} = -\sin x$, $\frac{d^3\sin x}{dx^3} = -\cos x$, $\frac{d^4\sin x}{dx^4} = \sin x$ u. ſ. w. Die Differentialquo-

tienten der gesuchten Function $\sin x$ enthalten zwar diese Function selbst und eine von derselben abhängige $\cos x$ in sich; aber deswegen wird die durch die Taylor'sche Reihe bewerkstelligte Entwickelung von $\sin x$ doch keine Tautologie, weil ja die Differentialquotienten von $\sin x$ in dieser Reihe nicht mit ihren allgemeinen von der willkürlich Veränderlichen abhängigen Werthen, sondern mit speciellen Werthen enthalten sind. Die Ausdrücke $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$, u. s. w. der allgemeinen Formel sind für die vorgelegte Function $\sin x$ durch $\cos a$, $-\sin a$, $-\cos a$ u. s. w. gegeben. Drücken wir die willkürlich Veränderliche der Function $\sin x$ durch $(a+x)$ aus, so haben wir

$$\sin(a+x) = \sin a + \cos a \frac{x}{1} - \sin a . \frac{x^2}{1.2} - \cos a . \frac{x^3}{1.2.3} + \sin a \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots .$$

Um vermittelst dieser Gleichung den Sinus eines Bogens ausrechnen zu können, brauchen wir für a nur einen solchen Bogen anzunehmen, dessen Sinus wir kennen. Wäre z. B. $a = \frac{\pi}{4}$, so ist bekanntlich $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder wäre $a = \frac{\pi}{6}$, so ist $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nehme ich also für den Werth $\frac{\pi}{6}$ des Bogens den Berührungspunkt der Functionen an, so wird die obige Gleichung

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

Wenngleich nach dieser Formel der Sinus eines jeden Bogens berechnet werden kann, weil der Zahlenwerth jedes Bogens unter $\frac{\pi}{6} + x$ oder $\frac{\pi}{6} - x$ begriffen ist, so sieht

man doch, daß die Reihe nur dann durch eine geringe Anzahl ihrer Glieder den Sinus mit hinreichender Genauigkeit darſtellen kann, wenn die Zahl x ein kleiner Bruch iſt, oder wenn der allgemeine Werth $\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ des Bogens in die Nähe des ſpeciellen Werthes $\frac{\pi}{6}$ fällt, für welchen die Berührung der Functionen ſtattfindet. Sollte z. B. der Sinus des Bogens von 31° berechnet werden, ſo hat man, da der Bogen von $30°=\frac{\pi}{6}$, und der Bogen von $1°=\frac{\pi}{180}$ iſt, in der letzten Gleichung ſtatt x die Zahl $\frac{\pi}{180}$ zu ſetzen, und erhält

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^2}{1.2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^3}{1.2.3}\cdots$$

Die Summe der vier erſten Glieder dieſer Reihe, d. h. die den Sinus nur im dritten Grade berührende Function, gibt die acht erſten Decimalſtellen des Sinus von 31° ſchon richtig an.

Obgleich die hauptſächlichſte Anwendung des Taylor'ſchen Lehrſatzes darin beſteht, eine ihrer arithmetiſchen Zuſammenſetzung nach unbekannte Function, deren Differentialquotient gegeben iſt, zu entwickeln, ſo kann derſelbe doch auch gebraucht werden, um die bei gegebenen Functionen vorgeſchriebenen auflöſenden Operationen in zuſammenſetzende zu verwandeln, und auf bloße Potenzirung der beſtimmenden Zahlen zurückzuführen. Da indeſſen bei auflöſenden Operationen, die mit einer Zahl vorzunehmen ſind, die jenige arithmetiſche Verknüpfung der beſtimmenden Zahl mit andern conſtanten Zahlen, welche das Reſultat der Auflöſung angibt, durch die bloße Forderung einer beſtimmten auflöſenden Operation unmittelbar nicht gegeben iſt, ſo kann die

Darſtellung dieſer arithmetiſchen Verknüpfung gewiſſermaßen auch als die Entwickelung einer unbekannten Function angeſehen werden. Wenn z. B. eine Zahl in gleiche Factoren zerfällt werden ſoll, ſo kann gefragt werden, wie man dieſe Zerfällung auf eine Zuſammenſetzung aus Potenzen eines Theils der zu zerfällenden Zahl zurückführen kann. Wäre z. B. die Quadratwurzel aus einer Zahl zu ziehen, alſo $\sqrt{x}$ die zu entwickelnde Function, ſo ſind die Differentialquotienten derſelben der Reihe nach $\frac{1}{2\sqrt{x}}, -\frac{1}{2.2(\sqrt{x})^3}$ $+\frac{1.3}{2.2.2(\sqrt{x})^5}, -\frac{1.3.5}{2.2.2.2(\sqrt{x})^7}$ u. ſ. w. Drücken wir die willkürlich Veränderliche unſerer Function durch $a+x$ aus, ſo haben wir nach dem Taylor'ſchen Lehrſatze

$$\sqrt{(a+x)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{x}{1} - \frac{1}{2.2(\sqrt{a})^3}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1.3}{2.2.2(\sqrt{a})^5}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Wenn wir vorläufig vorausſetzen, was ſpäter noch bewieſen werden ſoll, daß dieſe Reihe für alle Werthe von x, welche kleiner als a ſind, einen Näherungswerth der Quadratwurzel von $(a+x)$ liefert, ſo braucht man die Zahl a nur ſo zu wählen, daß man die Quadratwurzel aus a weiß, und daß a größer iſt als x, und wird durch dieſe Gleichung die Quadratwurzel jeder Zahl erhalten können, und demnach die Zerfällung in Factoren auf eine bloße Zuſammenſetzung von Factoren und Theilen zurückführen können. Um z. B. die Quadratwurzel aus 11 zu ziehen, ſetzt man $9+2$ ſtatt 11, oder die Zahl a der Formel $=9$ und $x=2$, und erhält

$$\sqrt{(9+2)} = 3 + \frac{1}{2.3}\cdot 2 - \frac{1}{2.2.3^3}\cdot\frac{2^2}{1.2} + \frac{1.3}{2.2.2.3^5}\cdot\frac{2^3}{1.2.3}\cdots$$
$$= 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{54} + \frac{1}{486} - \ldots.$$

Wenn man die Function A^x, welche für gebrochene

Werthe von x ebenfalls auflösende Operationen enthält, lieber in einer Form hat, die blos zusammensetzende Operationen enthält, so kann ihr eine solche Form durch die Taylor'sche Reihe leicht gegeben werden. Die successiven Differentialquotienten der Function A^x sind $lA.A^x$, $(lA)^2.A^x$, $(lA)^3A^x$ u. s. w. Wird die willkürlich Veränderliche unserer Function durch $a+x$ ausgedrückt, so haben wir nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$A^{(a+x)}=A^a+(lA)A^a.\frac{x}{1}+(lA)^2A^a.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+(lA)^3A^a.\frac{x^3}{1.2.3}\ldots.$$

Setzen wir in dieser Formel $a=0$, was offenbar gestattet ist, weil wir für jeden Werth der willkürlich Veränderlichen, also auch für den Nullwerth derselben eine in einem höheren Grade berührende Function denken können, so erhalten wir

$$A^x=1+(lA)\frac{x}{1}+(lA)^2.\frac{x^2}{1.2}+(lA)^3.\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

und somit dieselbe Gleichung, welche wir in §. 84 auf anderem Wege gefunden haben.

In dem einzigen Falle, daß in der Potenzfunction x^a der Exponent eine ganze positive Zahl ist, wird die Entwickelung der Function in eine Potenzenreihe eines Theiles der willkürlich Veränderlichen nach dem Taylor'schen Lehrsatz keine unendliche Reihe und keinen bloßen Näherungswerth, sondern eine geschlossene Reihe und einen adäquaten Werth liefern. In diesem Falle ist aber auch die zu entwickelnde Function selbst schon eine im mten Grade gleichmäßig wachsende, und braucht also überhaupt nicht erst durch eine gleichmäßig Wachsende berechnet zu werden; vielmehr wird ihre Entwickelung nur eine analytische Gleichung liefern, die als solche die Berechnung des Werthes der Function nicht zum Zwecke hat. Durch die Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes auf die Function x^m erhält man den binomischen Lehrsatz, wie aus der wirklichen Ausführung

ersichtlich. Die Differentialquotienten der Function x^m sind mx^{m-1}, $m(m-1).x^{m-2}$, $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ u. s. w. Drückt man die willkürlich Veränderliche der Potenzfunction durch $a+x$ aus, und setzt die Werthe, in welche die Function x^m und ihre Differentialquotienten für $x=a$ übergehen, als das constante Glied und die constanten Coefficienten der Potenzen des Theiles x der willkürlich Veränderlichen, so erhält man

$$(a+x)^m = a^m + m.a^{m-1}.\frac{x}{1} + m(m-1).a^{m-2}.\frac{x^2}{1.2} + m(m-1)(m-2)a^{m-3}.\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

Daß man, abgesehen von dem Zwecke der Berechnung des Werthes einer Function, den Taylor'schen Lehrsatz auch betrachten kann als ein allgemeines Mittel zur Aufstellung analytischer Gleichungen, in welchen irgend eine Function einer zweitheiligen Größe $f(a+x)$ durch eine Zusammensetzung von Functionen des ersten Theils a und von Potenzen des zweiten Theils x ausgedrückt erscheint, ist für sich klar; und ebenso, daß jede analytische Gleichung der Art durch Anwendung der Taylor'schen Reihe muß gefunden werden können, mag nun der Ausdruck, welcher der Function des Binoms identisch ist, in geschlossener Form darstellbar sein oder nicht. Betrachten wir z. B. die oben aufgestellte Gleichung

$$\sin(a+x) = \sin a + \cos a\frac{x}{1} - \sin a.\frac{x^2}{1.2} - \cos a.\frac{x^3}{1.2.3} + \sin a.\frac{x^4}{1.2.3.4} + \cos a.\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdots$$

und nehmen die Glieder, welche den Factor sin a oder cos a gemeinschaftlich haben, zusammen, so erhalten wir

$$\sin(a+x) = \sin a\left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\cdots\right] + \cos a\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdots\right]$$

Da die in Klammern stehenden Potenzenreihen von x

bekanntlich Ausdrücke von $\cos x$ und $\sin x$ sind, so haben wir

$$\sin(a+x) = \sin a . \cos x + \cos a . \sin x$$

und mithin die bekannte analytische Gleichung, in welcher der Sinus der Summe zweier Zahlen durch den Sinus und Cosinus dieser Zahlen ausgedrückt erscheint.

§. 128.

Die Maclaurin'sche Reihe.

Eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Function kann natürlich auch für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen der berührten Function ihren Berührungspunkt haben, und es werden dann in der Taylor'schen Reihe statt der Ausdrücke $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$, diejenigen Werthe dieser Functionen zu setzen sein, in welche sie für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen übergehen, und die durch $f(o)$, $\frac{df(o)}{dx}$, $\frac{d^2f(o)}{dx^2}$ u. s. w. zu bezeichnen sind. Die Reihe (4) und ebenso die Reihe (3) wird also für $a=o$ sich so darstellen

$$f(x) = f(o) + \frac{df(o)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(o)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(o)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \cdots (7).$$

Obgleich eigentlich kein Grund vorhanden ist, den Fall, in welchem die Berührung der Functionen für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen stattfindet, von den Fällen, in welchen die Berührung für einen andern Werth a statthat, zu unterscheiden, so führt doch die im Nullpunkt berührende Function herkömmlich einen besondern Namen, und heißt die Maclaurin'sche Reihe. Nur für den äußeren Anblick scheint eine wesentliche Verschiedenheit darin zu liegen, daß in der Maclaurin'schen Reihe eine Function in einer Potenzenreihe des ganzen Zahlenwerthes

der willkürlich Veränderlichen, in der Taylor'schen aber in einer Potenzenreihe nur eines Theiles der willkürlich Veränderlichen entwickelt erscheint. In der Maclaurin'schen Reihe fallen die Nullwerthe der willkürlich Veränderlichen zusammen, in der Taylor'schen aber nicht, oder in sofern man diesen Unterschied für Linien bezeichnen will, so sind in der Maclaurin'schen Reihe die Gleichungen der sich berührenden Linien auf dieselben Coordinatenachsen bezogen, in der Taylor'schen aber nicht. Natürlich hat die Maclaurin'sche Reihe, da sie sich auf einen seinem Zahlenwerthe nach bestimmten Berührungspunkt bezieht, für jede Function ganz unveränderliche nur durch die Natur der Function bestimmte Coefficienten, während die Coefficienten der Taylor'schen Reihe von der Natur der Function sowol als von dem Werthe der beliebigen Zahl a abhängen.

Soll eine unbekannte Function durch die Maclaurin'sche Reihe entwickelt werden, so muß außer dem speciellen Werthe, den die Function für den Nullwerth der willkürlich Veränderlichen annimmt, auch der Differentialquotient der Function allgemein gegeben sein. Um z. B. die Function $\cos x$ in einer Potenzenreihe von x darzustellen, reicht es hin zu wissen, daß $\cos(o)=1$ und daß $-\sin x$ der Differentialquotient von $\cos x$ ist. Da die Differentialquotienten von $\cos x$ der Reihe nach sind $-\sin x$, $-\cos x$, $+\sin x$, $+\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ u. s. w., und dieselben für $x=0$ der Reihe nach die Werthe $0, -1, 0, +1, 0, -1$ u. s. w. annehmen, so erhält man

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \cdots$$

welche Reihe schon in §. 91 auf anderem Wege gefunden worden ist.

Sollte, um ein zweites Beispiel zu geben, die Function e^x in eine Potenzenreihe von x umgeformt werden, so erhält man, da alle Differentialquotienten von e^x gleich e^x sind, und demnach für $x=0$ die Function sowol als ihre sämmtlichen Differentialquotienten den Werth $+1$ annehmen,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdots$$

und somit die in §. 82 gefundene Reihe.

Es läßt sich leicht zeigen, daß wenn eine Function $f(x)$ überhaupt durch eine Potenzenreihe von x mit constanten Coefficienten in unbegrenzter Annäherung darstellbar ist, alsdann die Coefficienten dieser auf welchem Wege auch immer erhaltenen Potenzenreihe niemals andere sein können als diejenigen, welche die Maclaurin'sche Reihe gibt. Denn wären die constanten Coefficienten einer solchen Reihe gleich A, B, C, D u. s. w., so müßte für jeden beliebigen Werth von x der Werth der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ u. s. w. mit dem Werthe von $f(x)$ genau zusammenfallen. Ebenso wird jeder Differentialquotient der unendlichen Reihe mit dem entsprechenden Differentialquotienten von $f(x)$ gleichen Werth haben für jeden beliebigen Werth von x, und folglich auch für den Nullwerth. Für $x=0$ hat aber die angenommene Potenzenreihe den Werth A, und $f(x)$ den Werth $f(o)$, folglich $A = f(o)$. Da ferner für $x=0$ der erste Differentialquotient der Potenzenreihe den Werth B, der zweite den Werth $1.2.C$, der dritte den Werth $1.2.3D$ annimmt, und diese Werthe den Ausdrücken $\frac{df(o)}{dx}, \frac{d^2f(o)}{dx^2}, \frac{d^3f(o)}{dx^3}$ gleich sein sollen, so hat man $B = \frac{df(o)}{dx}$, $C = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2f(o)}{dx^2}$ $D = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3f(o)}{dx^3}$, wodurch die obige Behauptung erwiesen ist. Wenn wir zurückblicken auf die Art, wie im vorhergehenden Paragraphen die Reihe (5), als Ausdruck einer berührenden Function, welche nach Potenzen eines Theiles der willkürlich Veränderlichen fortschreitet, aus einer vorausgesetzten Potenzenreihe mit unbestimmten Coefficienten abgeleitet ist, so sehen wir, daß von der Taylor'schen Reihe dasselbe gilt, was von der Maclaurin'schen, und daß bei jeder auf irgend einem Wege ausgeführten Entwickelung

einer Function in einer Potenzenreihe eines Theiles der willkürlich Veränderlichen, die constanten Coefficienten immer dieselben sein müssen, welche man durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes erhält, sobald nur der andere Theil der willkürlich Veränderlichen in beiden Fällen denselben Zahlenwerth hat.

Es ist in den Einleitungsworten dieses Capitels gesagt, daß die niedere Analysis Potenzenreihen, oder in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende Functionen als Näherungswerthe von andern Functionen entwickelt durch Methoden, deren Zusammenhang mit den Begriffen und Methoden der Differential- und Integralrechnung nicht unmittelbar einleuchtend ist, und es ist daselbst die Frage aufgeworfen worden, ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function liefern, bestimmt sind durch die verschiedengradige Stärke des Wachsens, welche diese Function in irgend einem Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen hat. Diese Frage ist nun, wenigstens für solche Potenzenreihen von x, deren Coefficienten nicht mit x oder mit der Anzahl der Glieder der Reihe veränderlich sind, durch das Vorhergehende beantwortet. Wenn wir aber nun sehen, daß in allen Fällen, in welchen eine Function von x durch eine unendliche Potenzenreihe von x oder eines Theiles von x mit constanten Coefficienten sich darstellen läßt, die Coefficienten dieser Potenzen ins Unendliche hin völlig bestimmt sind durch die unendlich vielen Grade der Stärke des Wachsens, welche die zu entwickelnde Function in Einem Verflußpunkte zusammengedrängt enthält, so wird man zugeben, daß alle in der niederen Analysis zur Entwickelung solcher Potenzenreihen angewandten Methoden mehr oder weniger künstliche Umwege sein müssen, da sie nicht auf den Begriff des Wachsens, und der verschiedenen Grade der Stärke desselben, welche doch allein maßgebend für diese Entwickelungen sind, basirt werden. In der That ist bei allen Functionen, in sofern sie durch Potenzenreihen darstellbar sind, der ganze folgende

Verlauf des Wachsens vorherbestimmt durch die in Einem Verflußpunkte vorhandenen Bestrebungen zu wachsen, welche nicht zur Ausführung kommen, und jeder Verflußpunkt enthält involvirt oder potentia die ganze Entwickelung der Größe in sich. Die Differentialrechnung schärft in Betreff der Natur des Wachsens unser Auge so, daß wir in dem noch auf Einen Punkt zusammengezogenen Keime schon das ganze Gewächs erblicken.

Mit der obigen Behauptung, daß die constanten Coefficienten jeder Potenzenreihe von x, welche eine Function f(x) mit unbegrenzter Annäherung darstellt, keine anderen sein können, als diejenigen, welche die Maclaurin'sche Reihe liefert, scheint die Reihe (1) im Widerspruch zu stehen; zwar nicht in sofern, als die Reihe (1) nur in einer bestimmten Anzahl von Gliedern dargestellt ist, denn in diesem Falle sind ihre Coefficienten nicht constant, sondern mit der Anzahl der Glieder veränderlich, aber in sofern, als diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt gedacht wird, wodurch die Coefficienten derselben selbst unendliche Reihen werden. Ist nämlich f(x) eine Function, welche durch die Maclaurin'sche Reihe darstellbar ist, so werden die Coefficienten der zur Entwickelung von f(x) gebrauchten Reihe (1) sich mit Vermehrung der Glieder der Reihe bestimmten Grenzwerthen nähern, und für die ins Unendliche fortgesetzt gedachte Reihe in constante Zahlen übergehen. Und hierbei scheint es nun, daß f(x) in einer Potenzenreihe von x mit constanten Coefficienten entwickelt sei, die nicht mit den Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe zusammenfallen. Aber dieser Schein ist leicht zu beseitigen. Denn wenn man in der Reihe (6) a statt x setzt, so findet man, daß die Entwickelung von f(a—a) den Ausdruck

$$f(a) - \frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3} \cdots$$

oder das Anfangsglied der Reihe (1) gibt, und folglich ist das ins Unendliche fortgesetzte Anfangsglied der Reihe (1) gleich $f(a-a) = f(o)$. Der Coefficient von x in der

Reihe (1) enthält eine gewisse Anzahl von Gliedern der Reihe

$$\frac{df(a)}{dx} - \frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^2}{1.2} - \frac{d^4f(a)}{dx^4}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\cdots.$$

Die Function $\frac{df(a+x)}{dx}$ läßt sich natürlich so gut als die Function $f(a+x)$ nach der Taylor'schen Reihe entwickeln. Wenn man nun die Function $\frac{df(a-x)}{dx}$ nach der Reihe (6) entwickelt, und überall a statt x setzt, so sieht man, daß die Entwickelung von $\frac{df(a-a)}{dx}$ die einzelnen Bestandtheile des Coefficienten von x in der Reihe (1) liefert und folglich ist dieser Coefficient, in sofern die Reihe, welche ihn darstellt, ins Unendliche fortgesetzt wird, gleich $\frac{df(a-a)}{dx} = \frac{df(o)}{dx}$. Ebenso ist der Beweis für die Coefficienten der folgenden Potenzen von x. Die Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe bilden demnach die Grenzen, welchen sich die Coefficienten der Reihe (1) bei Vermehrung der Glieder dieser Reihe ohne Ende nähern.

In den Fällen, in welchen die Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe zur Berechnung des Werthes einer Function unbrauchbar werden, weil sie unendliche Werthe annehmen, sind die in der Reihe (1) enthaltenen Näherungswerthe dieser Coefficienten noch sehr wohl zur Berechnung der Function zu gebrauchen. Wollte man z. B. die Function lx durch die Maclaurin'sche Reihe berechnen, so würden die Functionen $+\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1.2}{x^3}$, $-\frac{1.2.3}{x^4}$ u. s. w., als die successiven Differentialquotienten von lx, sämmtlich unendlich groß werden für $x=0$, und man erhielte die nichtssagende Gleichung

$$lx = -\infty + \infty\cdot\frac{x}{1} - \infty\cdot\frac{x^2}{1.2}\cdots.$$

welche zwar an sich nichts Falsches enthält, aber in unbe-

stimmbarer Form erscheint. Dasselbe würde eintreten, wenn man z. B. irgend eine Wurzel aus x durch die Maclaurin'sche Reihe finden wollte. Aber nichts desto weniger läßt sich vermittelst der Reihe (1) der Logarithmus jeder Zahl x durch eine Potenzenreihe von x mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit ausdrücken, sobald man nur den Werth a der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung der Functionen statthat, größer als die Hälfte von x nimmt, was ja immer möglich ist. Statt der unendlichgroßen Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe erhält man in der Reihe (1) Coefficienten, welche durch Vermehrung der Glieder der Reihe über jede vorgeschriebene Grenze hinaus vergrößert werden können, und dabei nimmt die Annäherung des Werthes der Reihe an den Werth von lx unbegrenzt zu. Mithin muß man annehmen, daß auch die Grenzwerthe, welchen sich diese Coefficienten nähern, nämlich die Coefficienten der Maclaurin'schen Reihe, ein richtiges, wenngleich verschwimmendes Resultat liefern.

§. 129.

Die Bernoulli'sche Reihe.

Sowie man aus der in der Reihe (4) enthaltenen Entwickelung von $f(a+x)$ die Maclaurin'sche Reihe erhält, indem man den Anfangspunkt des x bis in den Nullpunkt der willkürlich Veränderlichen zurückschiebt, oder das a verschwinden läßt, so erhält man auch aus der in der Reihe (6) enthaltenen Entwickelung von $f(a-x)$ eine besondere Reihe, indem man das vom Werthe a der willkürlich Veränderlichen rückwärts genommene Intervall x bis zum Nullpunkte der willkürlich Veränderlichen wachsen läßt, oder x gleich a setzt. Man hat alsdann

$$f(a-a) \text{ oder } f(o)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}\cdots$$

und folglich

$$f(a) = f(o) + \frac{df(a)}{dx} \cdot \frac{a}{1} - \frac{d^2f(a)}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{1.2} + \frac{d^3f(a)}{dx^3} \cdot \frac{a^3}{1.2.3} \cdots\cdot$$

Da a hier überhaupt einen beliebigen Werth der willkürlich Veränderlichen vorstellt, welcher nicht als ein einzelner Bestimmter dem fließenden Werthe der willkürlich Veränderlichen entgegengesetzt erscheint, so kann man, der in solchen Fällen üblichen Schreibart sich anschließend, die vorstehende Gleichung auch schreiben

$$f(x) = f(o) + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{1} - \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \cdots\cdot (8).$$

Diese Reihe, die zwar gewöhnlich auf anderem Wege und in anderem Zusammenhange abgeleitet wird, die aber als Ausdruck einer in einem höheren Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function hierher gehört, heißt die Bernoulli'sche. Das wesentlich Unterscheidende dieser Entwickelung einer Function f(x) in einer Potenzenreihe von x von den früheren besteht darin, daß die Coefficienten der Potenzen von x nicht constant sind wie in der Reihe (7), auch nicht veränderlich mit dem Berührungsgrade wie in der Reihe (1), sondern daß sie mit x selbst veränderlich sind.

Es fragt sich aber zunächst, in welchem Sinne die Bernoulli'sche Reihe Ausdruck einer die Function f(x) in einem höheren Grade berührenden Function ist. Um ihre Bedeutung in dieser Rücksicht nachzuweisen, brauchen wir nur zurückzublicken auf die Art, wie wir dieselbe soeben aus der Reihe (6) abgeleitet haben. Wir wollen diesen Nachweis an dem Bilde von Ordinaten krummer Linien führen. Die Abscisse be (Fig. 64) der krummen Linie gip habe im Punkte b ihren Nullpunkt. Das Abscissenstück bc habe den Werth a. Denkt man sich für den Werth a der willkürlich Veränderlichen, also im Curven-

punkte i eine in Bezug auf ihre Ordinaten in einem höheren Grade berührende und in demſelben Grade gleichmäßig wachſende Linie gezogen, ſo wird, wenn wir das vom Punkte c aus rückwärts genommene Intervall ci mit x bezeichnen, die Ordinate fh durch f(a — x) zu bezeichnen ſein. Indem wir vorausſetzen, daß die die Ordinate ausdrückende Function für die hier genommenen Werthe des a und des x durch die Taylor'ſche Reihe berechnet werden kann, ſo wird die Ordinate fh oder f(a — x) durch die Reihe (6) abgeändert ausgedrückt und wir haben

$$f(a-x)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}-$$

Da das conſtante Glied f(a) die Ordinate ci vorſtellt, ſo werden die übrigen Glieder der Reihe zuſammengenommen die Abnahme im ausdrücken, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie dadurch erfahren hat, daß man die Abſciſſe vom Werthe a um die Zahl x hat abnehmen laſſen. (Es verſteht ſich, daß die mit Ausſchluß von f(a) zuſammengenommenen Glieder unſerer Reihe ſowol die Zunahme als die Abnahme ausdrücken können, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie durch das Annehmen der Abſciſſe erhält, und es ſoll der Einfachheit des Ausdrucks wegen nur der eine Fall bei dieſer Erläuterung zu Grunde gelegt werden.) Geben wir den mit Ausſchluß von f(a) genommenen Gliedern unſerer Reihe die entgegengeſetzten Vorzeichen, ſo drücken ſie die Zunahme aus, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie dadurch erhält, daß die Abſciſſe von f bis c, oder vom Werthe (a—x) aus um die Zahl x wächſt. Laſſen wir die Abſciſſe abnehmen von c bis b, oder ſetzen wir in f(a — x) das x=a, ſo wird f(a — a) oder f(o) die Ordinate bg des Nullpunkts der im Punkte i berührenden Linie ausdrücken, und in der Gleichung

$$f(a-a)=f(a)-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}-$$

ist bg gegeben durch ci — in, indem fa = ci, und $\left[-\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}\ldots\right]=-in$ ist. Nehmen wir in dem Ausdrucke von —in die entgegengesetzten Vorzeichen, so drückt $\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}\ldots$ die Zunahme aus, welche die Ordinate der im Punkte i berührenden Linie erhält, indem man die Abscisse von o bis a wachsen läßt. Indem man die vorstehende Gleichung umformt in die Gleichung

$$f(a)=f(o)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{a}{1}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{a^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{a^3}{1.2.3}$$

welche eben die Bernoulli'sche Reihe ist, so sieht man, daß f(a) oder ci ausgedrückt erscheint durch bg + in. Demnach ist auch in der Bernoulli'schen Reihe eine beliebige Ordinate ci näherungsweise ausgedrückt durch die Ordinate einer in einem höheren Grade berührenden Linie, und zwar so, daß die Ordinate des Berührungspunktes selbst erhalten wird, indem man zu der Ordinate des Nullpunktes hinzuaddirt die Zunahme, welche die Ordinate der Berührenden erhält, indem man die Abscisse wachsen läßt vom Nullpunkte bis zu demjenigen Punkt, für welchen die Berührung statthat.

Vergleichen wir die Bernoulli'sche Reihe mit der Maclaurin'schen, so drücken, wenn bc das x und ci das f(x) vorstellt, beide Reihen den Werth von f(x) aus durch bg+ni, d. h. durch f(o) plus der Zunahme, welche die Ordinate einer Berührenden durch das Wachsen der Abscisse vom Nullwerthe bis zum Werthe x bekommt; der Unterschied beider Reihen besteht aber darin, daß bei der Maclaurin'schen Reihe der Berührungspunkt in den Anfangspunkt von x, und bei der Bernoulli'schen in den Endpunkt von x verlegt ist. Was hier von der Berührung in Bezug auf Ordinaten gesagt ist, gilt von der Berührung der Functionen überhaupt.

Es wäre nicht nöthig gewesen, wie bisher immer geschehen, die Bernoulli'sche Reihe in der Beschränkung zu

nehmen, daß gerade f(o) und nicht überhaupt f(a) das co
ſtante Glied der Reihe iſt, welches dieſelbe Beſchränkung
iſt, die der Maclaurin'ſchen Reihe im Vergleich zur Ta
lor'ſchen anhaftet. Setzen wir nämlich nochmals im Punk
b Fig. 64 den Nullpunkt der Abſciſſe, das Stück be=a
und ce=x, ſo können wir ep oder f(a+x) gegeben de
ken durch ci oder f(a) und qp, und zwar kann qp be
ſtimmt werden durch die Zunahme, welche die Ordina
einer im Punkte p berührenden Linie erhält durch das Wac
ſen der Abſciſſe vom Werth a bis zum Werthe a+x. D
Werthe, welche die Differentialquotienten der berührte
Function für den Endpunkt von x, oder für den Punkt p
annehmen, ſind durch $\frac{df(a+x)}{dx}$, $\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}$ u. ſ. w.
zu bezeichnen. Gemäß der Reihe (6) iſt, wenn wir für
den Werth a+x eine Berührende denken, f[(a+x)−x]
oder f(a) gegeben durch

$$f(a+x)-\frac{df(a+x)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$-\frac{d^3f(a+x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

Folglich ſtellt der Ausdruck

$$-\frac{df(a+x)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}-\frac{d^3f(a+x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots$$

die Abnahme pq vor, welche die Ordinate einer im Punkt
p Berührenden dadurch erfährt, daß die Abſciſſe von a+x
bis zu a abnimmt. Die Glieder dieſes Ausdrucks mit ent
gegengeſetztem Vorzeichen genommen drücken alſo die Zu
nahme aus, welche die Ordinate der in p Berührenden
durch das Wachſen der Abſciſſe von a bis zu a+x er
hält. Und dieſe Zunahme zu ci oder f(a) addirt, gi
f(a+x), ſo daß wir haben

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a+x)}{dx}\cdot\frac{x}{1}-\frac{d^2f(a+x)}{dx}\cdot\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^3f(a+x)}{dx^2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots(9).$$

Wenn man, wie es Recht ist, als das wesentlich Unterscheidende der Bernoulli'schen Reihe dies betrachtet, daß die berührende Function, deren Zunahme zu einem gegebenen Werthe der zu entwickelnden Function zugesetzt den Werth dieser Letzteren ausdrückt, ihren Berührungspunkt hat bei demjenigen Functionswerthe, welcher gerade berechnet werden soll, so kann man die Reihe (9) ebenfalls die Bernoulli'sche nennen, und zwar die Bernoulli'sche in ihrer allgemeineren Form. Setzt man in der Reihe (9) $a=o$, so geht sie wieder in die gewöhnliche Bernoulli'sche über, wie unter derselben Annahme die Taylor'sche in die Maclaurin'sche.

Um den Gebrauch der Reihe (9) durch ein Beispiel zu erläutern, so nehmen wir an, man wollte den gemeinen Logarithmus einer Zahl durch dieselbe berechnen. Man muß dabei den Werth von a so wählen, daß man Lga kennt. Die Differentialquotienten der Function Lgx sind $\frac{1}{l10}\cdot\frac{x}{1}$, $-\frac{1}{l10}\cdot\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1}{l10}\cdot\frac{1.2}{x^3}$ u. s. w., und für den Werth $a+x$ der willkürlich Veränderlichen nehmen dieselben die Werthe $\frac{1}{l10}\cdot\frac{1}{a+x}$, $-\frac{1}{l10}\cdot\frac{1}{(a+x)^2}$ u. s. w. an. Setzen wir diese Werthe statt $\frac{df(a+x)}{dx}$, $\frac{d^2f(a+x)}{dx^2}$ u. s. w. in die Gleichung (9), so erhalten wir

$$Lg(a+x)=Lga+\frac{1}{l10}\left[\frac{1}{a+x}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{(a+x)^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{1.2}{(a+x)^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}\cdots\right]=Lga+\frac{1}{l10}\left[\frac{x}{a+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3\cdots\right]$$

und dadurch eine allgemeingültige Formel, welche für jeden beliebigen positiven Werth von a und x den Logarithmus angibt. Sollte z. B. der gemeine Logarithmus der Zahl 11 berechnet werden, so setzt man $a=10$ und $x=1$, und er-

hält, indem man zugleich den bekannten Werth von $\frac{1}{\ell 10}$ ſetzt,

$$\text{Lg}11 = 1 + 0{,}434294\left[\frac{1}{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}\right)^4 \cdots\right]$$

Daß man auch $f(a-x)$ ausdrücken könne durch $f(a)$ weniger der Zunahme, welche eine bei dem Werthe $(a-x)$ der willkürlich Veränderlichen berührende Function dadurch erhält, daß man die willkürlich Veränderliche von $a-x$ bis zu a wachſen läßt, verſteht ſich von ſelbſt, und es wird nach den vorausgegangenen Erläuterungen keiner beſonderen Nachweiſung der Richtigkeit der Gleichung

$$f(a-x) = f(a) - \frac{df(a-x)}{dx} \cdot \frac{x}{1} \frac{d^2f(a-x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3f(a-x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \cdots (10)$$

bedürfen. Dieſe Gleichung kann man auch unmittelbar aus der Taylor'ſchen Reihe, nämlich aus der Reihe (4) ableiten, und zwar durch eine bloße Veränderung der Bedeutung, welche die Buchſtaben a und x in der Reihe (4) haben. Drückt man nämlich in der Reihe (4) den Werth der willkürlich Veränderlichen der berührten Function, für welchen die Berührung ſtattfinden ſoll, durch $(a-x)$ ſtatt durch a aus, und folglich den Werth $a+x$ der Reihe (4) durch $a-x+x$, oder durch a aus, ſo ſtellt ſich die Gleichung (4) folgendermaßen dar:

$$f(a) = f(a-x) + \frac{df(a-x)}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2f(a-x)}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3f(a-x)}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} \cdots$$

aus welcher durch bloße Transpoſition die Reihe (10) ſich ergibt.

Die Bernoulli'ſche Reihe leidet an einem Uebelſtande, welcher die Sphäre ihrer Brauchbarkeit außerordentlich

einschränkt. Denn in den Coefficienten der Potenzen von x sind die Differentialquotienten der zu entwickelnden Function f(x) enthalten mit den Werthen, welche sie für den veränderlichen Werth x selbst annehmen. Wenn nun eine Function von der Art ist, daß in den Differentialquotienten derselben die Function selbst wieder enthalten ist, wie z. B. die Functionen $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, a^x, $\sin x$, so sieht man, daß in der durch die Bernoulli'sche Reihe gegebenen Entwickelung einer solchen Function f(x) diese Function mit ihrem allgemeinen unbestimmten Werth f(x) und nicht mit einem speciellen Werth f(a) vorkommt, und man demnach ein zu entwickelndes Unbekanntes durch dieses Unbekannte ausgedrückt erhält. So z. B. würde man für die Function sin x durch die Reihe (8) die unnütze Gleichung erhalten

$$\sin x = 0 + \cos x . \frac{x}{1} + \sin x . \frac{x^2}{1.2} - \cos x . \frac{x^3}{1.2.3} \ldots .$$

Offenbar haftet derselbe Uebelstand auch an der Bernoulli'schen Reihe in ihren allgemeineren durch die Gleichungen (9) und (10) dargestellten Formen. Dieser Umstand hat es veranlaßt, daß man überhaupt diejenigen Potenzenreihen von x, in denen die Coefficienten mit x veränderlich sind, wenig oder gar nicht beachtet hat. Nichts desto weniger können, wie wir sogleich sehen werden, solche Potenzenreihen sehr brauchbar sein, und sogar eine weitere Sphäre ihrer Gültigkeit haben als die Taylor'sche Reihe, sobald man sie nur so anlegt, daß die Differentialquotienten der zu entwickelnden Function f(x) oder f(a+x) nicht gerade für den Werth x oder a+x der willkürlich Veränderlichen, sondern für einen andern übrigens mit x selbst veränderlichen Werth der willkürlich Veränderlichen zu nehmen sind.

§. 130.

Andere Reihen für $f(x)$ mit von x abhängigen Coefficienten.

Mit Ausnahme der Reihe (1) laſſen ſich alle bisher betrachteten Reihen auf zwei Hauptfälle reduciren. Nämlich die in einem höheren Grade berührende und in demſelben Grade gleichmäßig wachſende Function, durch welche der Werth einer Function $f(a+x)$ ausgedrückt werden ſoll, hat entweder im Anfangspunkt oder im Endpunkt von x ihren Berührungspunkt, wobei der Fall, daß $a=0$ iſt, nicht beſonders unterſchieden zu werden braucht, und in beiden Fällen wird $f(a+x)$ ſo ausgedrückt, daß zu einem ſchon bekannten ſpeciellen Werth $f(a)$ der Function eine dem Intervall x zugehörige Zunahme der berührenden Function zugeſetzt wird, welche Zunahme durch eine Potenzenreihe des Intervalles x dargeſtellt erſcheint. In der erſten Klaſſe von Reihen ſind die Coefficienten der Potenzen von x nur von dem ſpeciellen Werthe a abhängig, und für ein beſtimmtes a conſtant bei allen beliebigen Werthen des veränderlichen Intervalles x. In der zweiten Klaſſe von Reihen ſind die Coefficienten der Potenzen von x von dem Werth $a+x$ abhängig, und folglich mit dem veränderlichen Intervall x ſelbſt veränderlich. Die Reihe (1), welche zugleich die allgemeinſte iſt, da aus derſelben alle übrigen mit Leichtigkeit abgeleitet werden können, hat in dieſer Beziehung eine iſolirte Stellung, und bildet gewiſſermaßen eine Klaſſe für ſich. Denn in derſelben ſind die Coefficienten der Potenzen von x weder conſtant bei beſtimmtem Werth von a, noch auch mit x veränderlich, ſondern mit dem Berührungsgrade veränderlich. Dieſe Reihe hat außerdem das Unterſcheidende, daß ſie nicht nach Potenzen eines von einem gewiſſen Werthe a aus genommenen Intervalles der willkürlich Veränderlichen fortſchreitet, ſondern nach Potenzen des Geſammtwerthes der willkürlich Veränderlichen, obgleich der Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung der Functionen ſtatthat, nicht gerade der Nullwerth, ſondern ein beliebiger Werth a iſt.

Gehen wir zurück auf die beiden erst erwähnten Klassen von Reihen, so ist es, wenn man für einen Werth a den zugehörigen Werth der Function kennt, gar nicht nöthig, den Berührungspunkt der berührenden Function gerade in den Anfang oder das Ende des vom Werthe a aus genommenen Intervalles zu verlegen, sondern derselbe kann auch in das Innere dieses Intervalles verlegt werden, und dennoch die dem Intervalle zugehörige Zunahme der berührenden Function, welche dem Werthe f(a) zugesetzt werden muß, gefunden werden. Ist der Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung stattfinden soll, a plus einem bestimmten aliquoten Theil des veränderlichen Intervalles, so ist der Berührungspunkt veränderlich, und folglich sind auch die für den Berührungspunkt genommenen Werthe der Differentialquotienten der berührten Function, d. h. die Coefficienten der Potenzenreihe veränderlich.

Wir wollen die Entstehung und Bedeutung einer solchen Reihe erst anschaulich an den Coordinaten einer Linie nachweisen. Sei in b Fig. 64 der Nullpunkt der Abscisse, bc=a und be=x, und die Ordinate pe=f(x), so wird, wenn d der Mittelpunkt des Intervalles ce ist, de sowol als cd gleich $\frac{x-a}{2}$, und bd=$\frac{x+a}{2}$ sein. Denken wir für den Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen im Punkte k eine berührende Linie. Die Ordinate pe oder f(x) kann ausgedrückt werden durch ei oder f(a) und die Summe von kr und ps. Das Stück ps ist aber die Zunahme, welche die Ordinate der in k berührenden Linie erhält, indem die willkürlich Veränderliche vom Werthe $\frac{x+a}{2}$ um das Intervall $\frac{x-a}{2}$ wächst, und kr wird erhalten, wenn man die der Abnahme dc zugehörige Abnahme der Ordinate der im Punkt k berührenden mit entgegengesetztem Vorzeichen nimmt. Indem man die Abscisse vom Werthe

bd oder $\frac{x+a}{2}$ aus um de oder $\frac{x-a}{2}$ wachsen läßt, erhält man nach Gleichung (4)

$$pe=f\left(\frac{x+a}{2}\right)+\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}+\ldots.$$

Da $kd=f\left(\frac{x+a}{2}\right)$ ist, so hat man $pe-kd$ oder

$$ps=\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}+\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Indem man ferner die Abscisse vom Werthe bd oder $\frac{x+a}{2}$ aus um cd oder $\frac{x-a}{2}$ abnehmen läßt, erhält man nach Gleichung (6)

$$ci=f\left(\frac{x+a}{2}\right)-\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}-\ldots.$$

und folglich $ci-kd$ oder

$$-kr=-\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}-\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}\ldots.$$

Wird dieser letzte Ausdruck mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, und zu ps addirt, so erhält man pq, und zwar

$$pq=2\left[\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots.\right]$$

Und da $ci+pq$ oder $fa+pq=f(x)$, so hat man

$$f(x)=f(a)+2\left[\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3}+\ldots.\right] \quad (11).$$

Man kann diese Reihe, obgleich sie nur die ungeraden Potenzen von $\frac{x-a}{2}$ enthält, und die Differentialquotienten von ungerader Rangzahl der Function $f(x)$ zu Coefficienten hat, dennoch als Ausdruck einer für den Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen in allen Graden berührenden Function ansehen, indem der zu $f(a)$ zugefügte Bestandtheil die Summe von Zunahmen einer solchen berührenden Function ist, und zwar von Zunahmen, welche dadurch entstehen, daß man die willkürlich Veränderliche vom Berührungspunkte aus vorwärts und rückwärts um gleiche Theile wachsen läßt. Es ist aber auch gestattet, die Reihe (11) so zu betrachten, daß der ganze in Klammern stehende Ausdruck die der Zunahme $\frac{x-a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen zugehörige Zunahme einer Function darstellt, welche für den Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen die Function $f(x)$ so berührt, daß sie zwar die Differentialquotienten von ungerader Rangzahl mit der Function $f(x)$ gemeinschaftlich hat, daß aber ihre Differentialquotienten von gerader Rangzahl sämmtlich gleich Null sind. Man könnte eine solche Function, welche mit einer andern Function abwechselnd einen Differentialquotienten gemeinschaftlich hat, und den nächsten nicht, eine sprungweise berührende Function

nennen. Aus der Reihe (11) erſieht man, daß allgemein bei einer Function, welche eine Function $f(x)$ in der Weiſe dieſer Reihe ſprungweiſe berührt, die der Zunahme $\frac{x-a}{2}$ zugehörige Zunahme der Function doppelt genommen näherungsweiſe die der doppelten Zunahme $x-a$ zugehörige Zunahme der Function $f(x)$ angibt. Läßt ſich eine Function $f(x)$, für welche man den ſpeciellen Werth $f(a)$ weiß, durch die Taylor'ſche Reihe und durch die Reihe (11) annähernd berechnen, ſo wird die Reihe (11) im Allgemeinen immer ſtärker convergirend ſein als die Taylor'ſche, weil die Taylor'ſche nach Potenzen von $x-a$ und die Reihe (11) nach Potenzen von $\frac{x-a}{2}$ fortſchreitet, ohne daß die Letztere in Bezug auf die Coefficienten dieſer Potenzen ungünſtiger geſtellt wäre.

Um den Gebrauch der Reihe (11) durch ein Beiſpiel zu erläutern, ſo wählen wir nochmals die ſchon durch mehrere andere Formeln entwickelte Function lx (natürlicher Logarithmus). Setzt man in die Differentialquotienten dieſer Function ſtatt der willkürlich Veränderlichen x den Werth $\frac{x+a}{2}$, ſo nehmen die Coefficienten $\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}$, $\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}$, $\frac{d^3f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^3}$ u. ſ. w. der Reihe (11) reſpective die Werthe $\frac{1}{\frac{x+a}{2}}$, $\frac{1.2}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^2}$, $\frac{1.2.3.4}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^4}$ an. Folglich iſt

$$lx = la + 2\left[\frac{1}{\frac{x+a}{2}}\cdot\frac{x-a}{2} + \frac{1.2}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^3}{1.2.3} + \frac{1.2.3.4}{\left(\frac{x+a}{2}\right)^4}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5}\cdots\right]$$

$$lx = la + 2\left[\frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \ldots\right]$$

Die Berechnung des natürlichen Logarithmus durch dieſe Reihe, welche wie leicht zu ſehen für jeden beliebigen poſitiven Werth von x und a convergirend iſt, ſetzt alſo nur voraus, daß man den natürlichen Logarithmus von irgend einer Zahl a wiſſe. Da in jedem Logarithmenſyſtem der Logarithmus von 1 gleich Null iſt, ſo erhält man, indem man $a=1$ nimmt, die Gleichung

$$lx = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

welche Gleichung wir ſchon im §. 81 auf anderem Wege gefunden haben, und der man es unmittelbar nicht anſieht, daß ſie ſo gut als die Entwickelung durch die Taylor'ſche Reihe eigentlich eine Function darſtellt, welche die Function lx berührt an der Stelle, wo die willkürlich Veränderliche den Werth $\frac{x+1}{2}$ hat.

In ſofern man die Reihe (11) nur aus andern bekannten Reihen ableiten will, ohne nach der Bedeutung derſelben als Ausdruck einer berührenden Function zu fragen, ſo kann dieſelbe auf folgendem kurzen Wege erhalten werden. Zieht man nämlich die Reihe (6) von der Reihe (4) ab, ſo erhält man

$$f(a+x) = f(a-x) + 2\left[\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{d^5f(a)}{dx^5}\cdot\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\cdots\right]$$

Drückt man die Veränderliche $a+x$ durch ein einfaches Zeichen einer Veränderlichen, durch z aus, und den Werth $a-x$, für welchen man den Werth der Function $f(z)$ wiſſen muß, durch den Buchſtaben b, ſo folgt aus den beiden Annahmen $a+x=z$ und $a-x=b$, daß man überall in der letzten Gleichung $\frac{z+b}{2}$ ſtatt a und $\frac{z-b}{2}$

ſtatt x zu ſetzen hat, und man erhält durch dieſe Subſtitutionen die Gleichung

$$f(z)=f(b)+2\left[\frac{df\left(\frac{z+b}{2}\right)}{dz}\cdot\left(\frac{z-b}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{z+b}{2}\right)}{dx^2}\cdot\frac{\left(\frac{z-b}{2}\right)^2}{1.2.3}+\ldots\right]$$

und in derſelben die Gleichung (11).

Ohne uns nun weiter mit den mannichfachen Formen von Reihen, welche durch Zuſammenſetzung der ſchon gefundenen Reihen abgeleitet werden können, aufzuhalten, und ohne diejenigen Reihen aufzuführen, welche entſtehen, indem man bei einer Function $f(x)$, deren Werth $f(a)$ man kennt, den Berührungspunkt nicht gerade für den Werth $\frac{1}{2}(x-a)$, ſondern für einen andern aliquoten Theil des Intervalles $x-a$ nimmt, bemerken wir nur noch, daß die in der niederen Analyſis vorkommenden unüberſehlich vielen Entwickelungen von Functionen in Potenzenreihen, welche nach Potenzen der willkürlich Veränderlichen oder eines Theiles derſelben, oder auch nach Potenzen einer andern Function der willkürlich Veränderlichen fortſchreiten, größtentheils nichts weiter ſind als ſpecielle Fälle der hier entwickelten allgemeinen Reihen. In der niederen Analyſis werden dieſe Reihen immer nur ſpeciell für eine beſtimmte vorgelegte Function entwickelt, und in den meiſten Fällen gelangt man zu denſelben nur durch allerlei Um- und Schleichwege, welche faſt für jede Function etwas Beſonderes an ſich haben, und deren Auffindung mehr oder weniger auf einem glücklichen Einfall beruht. Dadurch wird, in ſofern man ſich's zur Aufgabe macht, ſich dieſe Ableitungen einzuprägen, das Gedächtniß außerordentlich beſchwert, was für eine demonſtrative Wiſſenſchaft immer ein großer Uebelſtand iſt. Die Differential- und Integralrechnung, indem ſie den wahren Sinn dieſer Reihen aufzeigt, und ſie als Ausdrücke von berührenden Functionen aufweiſt, gibt nicht blos den überall einzuſchlagenden Weg zur Auffindung ſolcher Reihen an, ſondern ſtellt auch, was

die Hauptſache iſt, dieſe Reihen nicht mit den ſpeciellen für eine beſtimmte Function geltenden Coefficienten auf, ſondern mit allgemeinen für alle Functionen geltenden, welche Coefficienten bei jeder beſonderen vorgelegten Function durch ein und daſſelbe operative Verfahren der Differentiation mit Leichtigkeit in beſtimmte Coefficienten verwandelt werden können.

Alle bisher aufgeführten Reihen zerfallen in zwei Hauptklaſſen, welche am kürzeſten dadurch unterſchieden werden können, daß in der einen Klaſſe die Berührung bei demjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen ſtattfindet, für welchen man den Werth der zu entwickelnden Function weiß, in der andern Klaſſe aber bei irgend einem andern Werthe der willkürlich Veränderlichen. Zu der erſteren Klaſſe gehören außer der Reihe (1) die verſchiedenen Formen der Taylor'ſchen Reihe und die Maclaurin'ſche, und zu der zweiten ſämmtliche übrige Reihen. Die Reihen der zweiten Klaſſe ſind zugleich ſolche, in welchen die Coefficienten veränderlich ſind mit dem Intervalle x, welches von demjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welchen man den Functionswerth kennt, genommen iſt, und ſie ſind nicht brauchbar zur Entwickelung einer ſolchen Function, in deren Differentialquotienten dieſe Function ſelbſt als Beſtandtheil mit vorkommt.

Es mag noch bemerkt werden, daß man ſich, wenn in den Coefficienten der Potenzen einer Reihe die willkürlich Veränderliche enthalten iſt, durch das äußere Anſehen einer ſolchen Reihe nicht muß verleiten laſſen, ſie ohne Weiteres der zweiten der oben aufgeführten beiden Klaſſen zuzuzählen. Man hat ſich an das Weſentliche dabei zu halten, nämlich, ob bei demjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welchen man den Functionswerth kennt, oder für welchen der in der Entwickelung vorkommende Functionswerth genommen iſt, auch die als Coefficienten dienenden Differentialquotienten der zu entwickelnden Function genommen ſind, oder nicht. Wenn man z. B. die will-

kürlich Veränderliche be Fig. 64 einer Function durch x bezeichnet, einen gewissen Werth bc derselben, der kleiner als x sein möge, durch a, so wird, wenn d der Mittelpunkt des über den Werth a hinaus genommenen Intervalles ce ist, die willkürlich Veränderliche im Punkt d den Werth $\frac{x+a}{2}$ haben, und das Intervall de, welches zu $\frac{x+a}{2}$ gesetzt den Werth x gibt, durch $\frac{x-a}{2}$ zu bezeichnen sein. Wenn man nun für den Werth $\frac{x+a}{2}$ die Berührung setzt, und $\frac{x-a}{2}$ als das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall der willkürlich Veränderlichen betrachtet, so wird man, indem man unter diesen Annahmen die Reihe (4) anwendet, die Gleichung erhalten

$$f(x)=f\left(\frac{x+a}{2}\right)+\frac{df\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)+\frac{d^2f\left(\frac{x+a}{2}\right)}{dx^2}\cdot\frac{\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}{1.2}+\ldots$$

Diese Reihe ist offenbar die Taylor'sche, und nur scheinbar von derselben verschieden; denn für denselben Werth $\frac{x+a}{2}$ der willkürlich Veränderlichen, für welchen der Functionswerth in der Entwickelung genommen ist, sind auch die Differentialquotienten der Function f(x) zu nehmen, und indem man bei beliebig vorgeschriebenem x nur die Zahl a so wählt, daß man $f\left(\frac{x+a}{2}\right)$ kennt, kann man die Reihe auch ebenso gebrauchen wie die Taylor'sche. Eine solche blos äußerliche Formveränderung einer Reihe, welche für die Entwickelung einer Function natürlich ganz bedeutungslos ist, gewährt dennoch manchmal für andere Zwecke der Untersuchung einige Bequemlichkeiten.

§. 131.

Allg. Ausdruck der Abweichung der berührenden Functionen von der berührten.

In dem ersten Paragraphen dieses Capitels haben wir uns zwei Aufgaben gestellt, nämlich zu untersuchen, erstens ob nicht überhaupt die Coefficienten aller Potenzenreihen, welche einen Näherungswerth einer Function geben, bestimmt sind durch die verschiedengradige Stärke des Wachsens, welche diese Function in irgend einem Verflußpunkt der willkürlich Veränderlichen hat, und zweitens, in wiefern und unter welchen Bedingungen eine in einem höheren Grade gleichmäßig wachsende und in demselben Grade berührende Function einen beliebig genauen Näherungswerth einer berührten Function geben kann. Die erste Frage ist durch das Vorhergehende genügend beantwortet, und wir haben noch die zweite zu erörtern. Bisher haben wir überall nur angenommen, daß es überhaupt möglich sei, durch in höheren Graden gleichmäßig wachsende und berührende Functionen beliebig genaue Näherungswerthe solcher Functionen zu erhalten, die in allen Graden ungleichmäßig wachsen, wenigstens für Intervalle, welche sich nicht allzuweit von dem Berührungspunkte erstrecken, und haben die bequemsten und brauchbarsten Formen solcher berührenden Functionen aufgestellt. Wenn wir aber nachweisen können, daß durch solche berührende Functionen nothwendig eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function erhalten wird, sei es für beliebig große vom Berührungspunkte aus genommene Intervalle, oder für Intervalle, die innerhalb gewisser Grenzen liegen, so wird man diese Nachweisung erst für den Beweis der uneingeschränkten oder in Bezug auf die Intervalle eingeschränkten Geltung des Taylor'schen, des Maclaurin'schen und des Bernoulli'schen Lehrsatzes zu halten haben.

In den früheren Zeiten stützte man den Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes auf die gewissermaßen als Grundsatz geltende Annahme, daß jede beliebige Function durch eine

Potenzenreihe der willkürlich Veränderlichen oder eines Theiles derſelben mit unbegrenzter Annäherung dargeſtellt werden könne, oder, wie man auch hätte ſagen können, daß die ins Unendliche hin ungleichmäßig wachſenden Größen durch andere in irgend welchem Grade gleichmäßig wachſende berechnet werden können. Unter dieſer Annahme konnte es ſich dann blos handeln um die Nachweiſung, daß die Coefficienten einer ſolchen Potenzenreihe gegeben ſind durch die ſucceſſiven Differentialquotienten der zu entwickelnden Function, oder daß die den Näherungswerth angebende im höheren Grade gleichmäßig wachſende Function eben keine andere iſt, als die in demſelben Grade berührende Function. Dieſe Nachweiſung kann am kürzeſten gegeben werden, indem man, wie §. 128 geſchehen, zeigt, daß die unbeſtimmt angenommenen Coefficienten der Potenzenreihe ſich durch bloße Differentiation in die ſucceſſiven Differentialquotienten der zu entwickelnden Function überführen laſſen. Wenn wir nun nach dieſer vorausgegangenen Nachweiſung noch einen Beweis des Taylor'ſchen Lehrſatzes verlangen, ſo kann damit nur eine Erörterung jener ehemals als Grundſatz aufgeſtellten Annahme gemeint ſein, welche Erörterung auf die Frage hinausläuft, ob durch in einem höheren Grade berührende und gleichmäßig wachſende Functionen immer eine unbegrenzte Annäherung an den Werth einer andern Function zu erzielen iſt. Gibt es keine ſolche berührende Function, welche dies leiſtet, ſo gibt es überhaupt keine Potenzenreihe, welche eine unbegrenzte Annäherung geſtattet, weil dieſe Potenzenreihe ja eben eine berührende Function ſein müßte.

Lagrange hat das Verdienſt, die Aufmerkſamkeit der Mathematiker zuerſt auf dieſe Unterſuchungen gelenkt, und die Frage nach der Berechtigung jenes Grundſatzes gründlicher erwogen zu haben. In den Beweiſen des Taylor'ſchen Lehrſatzes, welche in der neueren Zeit üblich geworden ſind, iſt die Herleitung der Form einer in höheren Graden berührenden Function mit der Nachweiſung der

Bedingungen, unter welchen dieſelbe eine unbegrenzte Annäherung an die berührte Function geſtattet, unmittelbar verbunden. Es ſcheint uns aber offenbar angemeſſener zu ſein, beides zu trennen, und zuerſt nur die allgemeinen Formen der berührenden Functionen darzuſtellen, und dann die zweite Frage anzuſchließen.

Da eine berührende Function in aller Strenge nur für Einen Werth der willkürlich Veränderlichen, nämlich für den Berührungspunkt, gleichen Werth mit der berührten Function hat, für alle andern Werthe der willkürlich Veränderlichen aber nothwendig abweicht, ſo wird es nöthig ſein, einen wenngleich unbeſtimmten doch allgemein geltenden Ausdruck für die Größe dieſer Abweichung aufzuſtellen, um zu ſehen, ob aus der Form deſſelben ſich ableiten läßt, unter welchen Bedingungen die Größe der Abweichung der Functionen ſich durch Steigerung des Berührungsgrades dem Nullwerthe beliebig nahe bringen läßt. Da wir die Werthe von zwei Functionen zu vergleichen haben, welche Functionen derſelben willkürlich Veränderlichen ſind, ſo haben wir zuerſt einige allgemeine Sätze über das Wachſen ſolcher Functionen vorauszuſchicken, welche uns bei der beabſichtigten Vergleichung der Functionswerthe leiten können.

Der Fundamentalſatz, aus welchem die andern fließen, iſt folgender: Wenn von zwei Functionen Einer willkürlich Veränderlichen die Eine innerhalb eines gewiſſen Intervalles der willkürlich Veränderlichen überall eine größere Stärke des Wachſens oder einen größeren erſten Differentialquotienten hat als die Andere, ſo iſt die Erſtere innerhalb dieſes Intervalles auch mehr gewachſen als die Andere. Die Richtigkeit dieſes Satzes folgt unmittelbar aus den Grundbegriffen der Differentialrechnung. Denn da nach Annahme die Differentiale (in dem früher erläuterten Sinne als iſolirte Differentiale genommen) der Einen Function überall größer ſein ſollen als die der Andern, und die Differenzen oder wirklichen Zunahmen der Functionswerthe durch Verkleinerung der Zunahmen der willkürlich Veränderlichen den

Differentialen beliebig nahe gebracht werden können, so folgt, daß auch die sehr kleinen Differenzen der Einen Function innerhalb des gesetzten Intervalles überall größer sind, als die der Andern, und daß also auch die Summe dieser Differenzen oder die Gesammtzunahme der Einen Function größer ist als die der Andern. Wenn mithin zwei Functionen für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen gleichen Functionswerth haben, und innerhalb eines von da aus gesetzten Intervalles der willkürlich Veränderlichen hat die Eine Function überall einen größeren ersten Differentialquotienten als die Andere, so hat die erstere Function innerhalb dieses Intervalles auch überall größere Functionswerthe als die zweite.

Wenn zwei Functionen Einer willkürlich Veränderlichen für einen gewissen Werth derselben gleiche Functionswerthe und gleiche erste Differentialquotienten haben, und innerhalb eines von da aus genommenen Intervalles die Eine Function überall einen größeren zweiten Differentialquotienten hat als die Andere, so hat die erste Function innerhalb dieses Intervalles überall auch größere Functionswerthe als die Andere. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht einzusehen. Denn da nach Annahme die Eine Function innerhalb des ganzen Intervalles einen größeren zweiten Differentialquotienten hat als die Andere, so ist auch der erste Differentialquotient der ersteren Function innerhalb dieses ganzen Intervalles stärker gewachsen als der der zweiten Function; und da ferner nach Annahme im Anfangspunkte des Intervalles beide Functionen gleichen ersten Differentialquotienten haben sollten, so ist der erste Differentialquotient der ersteren Function innerhalb des ganzen Intervalles größer als der der zweiten Function, und mithin hat zu Folge des vorhergehenden Satzes die erste Function auch überall größere Werthe als die zweite.

Haben zwei Functionen Einer willkürlich Veränderlichen für einen gewissen Werth derselben den Functionswerth sowie den ersten und zweiten Differentialquotienten

gleich, und hat innerhalb eines von da aus geſetzten Intervalles die Eine Function überall einen größeren dritten Differentialquotienten als die Andere, ſo hat die erſte Function auch innerhalb dieſes ganzen Intervalles größere Werthe als die zweite. Der Beweis dieſes Satzes iſt derſelbe wie der des vorhergehenden. Hat nämlich die eine Function innerhalb des ganzen Intervalles einen größeren dritten Differentialquotienten, ſo iſt auch ihr zweiter Differentialquotient innerhalb dieſes ganzen Intervalles ſtärker gewachſen als der zweite Differentialquotient der andern Function. Da aber die zweiten Differentialquotienten beider Functionen nach Annahme im Anfangspunkte des Intervalles gleich ſein ſollen, ſo iſt der zweite Differentialquotient der erſten Function innerhalb des ganzen Intervalles größer als der der zweien. Und hieraus ergibt ſich in Verbindung mit den übrigen Annahmen, daß die erſte Function innerhalb des ganzen Intervalles größere Werthe hat als die zweite.

Es iſt einleuchtend, daß auf dieſe Weiſe weiter geſchloſſen werden kann für alle höheren Grade der Stärke des Wachſens, und daß man ohne Weiteres zu folgendem allgemeinen Satz übergehen kann. Haben zwei Functionen Einer Veränderlichen für einen gewiſſen Werth der willkürlich Veränderlichen den Functionswerth und ſämmtliche Differentialquotienten bis zum $n$ten gleich, und hat innerhalb eines von dieſem Werthe der willkürlich Veränderlichen aus genommenen Intervalles die eine Function überall einen größeren $(n+1)$ten Differentialquotient als die andere, ſo hat die erſte Function auch innerhalb dieſes ganzen Intervalles größere Werthe als die zweite. Dieſe höchſt einfachen allgemeinen Sätze, welche uns die Mittel bieten, bei Functionen, die ſich in irgend einem Grade berühren, aus dem Differentialquotienten des nächſthöheren Grades zu beurtheilen, welche von beiden Functionen die größeren Werthe annimmt, mußten wir unſerer Unterſuchung über die Abweichung der berührenden Functionen von der berührten vorausſchicken.

Setzen wir eine Function, welche innerhalb eines g
wissen Intervalles eine beliebig veränderliche Stärke de
Wachsens hat, jedoch ohne Unterbrechung der Stetigkeit
z. B. die Ordinate der krummen Linie efg Fig. 65. Wi
wollen hier unter der Unterbrechung der Stetigkeit eine
Function blos dies verstehen, daß die Function für einen
gewissen einzelnen endlichen Werth der willkürlich Verän
derlichen einen unendlich großen Werth annimmt, in wel-
chem Falle die Function aus unendlich großen positiven
in unendlich große negative Werthe überspringen kann ohne
die Zwischenstufen zu durchlaufen, und die durch imaginäre
Werthe einer Function eintretende Unterbrechung der Ste-
tigkeit unberücksichtigt lassen, weil wir die Betrachtung ima-
ginärer Formen überhaupt von unserer ganzen Darstellung
ausgeschlossen haben. Stetigsein innerhalb eines Intervalles
der willkürlich Veränderlichen, und lauter endliche Functions-
werthe haben innerhalb dieses Intervalles, sind uns al
identische Begriffe bei einer Function.

Wenn nun eine Function, wie die Ordinate der Li
efg, innerhalb des Intervalles cd eine beliebig aber fix
veränderliche Stärke des Wachsens hat, so hat in irge
einem Punkte dieses Intervalles die Stärke des Wachsens ihre
größten, und in irgend einem Punkte ihren kleinsten Werth
Denkt man sich die größte Stärke des Wachsens für da
ganze Intervall cd dauernd, wie dies in den Ordinaten
der geraden Linie fk sein möge, so wird dem obigen Satz
zu Folge mit der Zunahme cd eine größere Zunahme der
Function verbunden sein, als diejenige ist, welche durch di
veränderliche Stärke des Wachsens erreicht wird. Un
denkt man die kleinste innerhalb des Intervalles cd vor-
kommende Stärke des Wachsens über das ganze Intervall
herrschend, wie in den Ordinaten der Linie fh, so wird mit
der Zunahme cd eine kleinere Zunahme ih der Function
verbunden sein als die Zunahme ig ist, welche durch di
beliebig veränderliche Stärke des Wachsens erzeugt wird
In sofern nun diese veränderliche Stärke des Wachsens

aus ihrem größten in ihren kleinſten Werth ſtetig übergeht, ſo werden alle zwiſchen dem größten und kleinſten Werthe der Stärke des Wachſens denkbaren Zwiſchenſtufen in einzelnen Punkten des Intervalles cd irgendwo vorhanden ſein. Es muß alſo auch innerhalb des Intervalles cd einen Werth der Abſciſſe geben, in welchem die Stärke des Wachſens ſo groß iſt, daß, wenn dieſelbe für das ganze Intervall cd dauernd wäre, die durch dieſe conſtante Stärke des Wachſens erreichte Zunahme zuſammenfiele mit der durch die veränderliche Stärke des Wachſens erreichten. In Bezug auf die Figur ausgeſprochen heißt dieſer Satz, es muß, wenn der erſte Differentialquotient der Ordinate der Curve ſich ſtetig ändert, innerhalb des Intervalles cd wenn nicht mehrere doch wenigſtens Einen Curvenpunkt geben, deſſen Tangente dieſelbe Richtung hat als die gerade Linie fg. Wir wollen diejenige Stärke des Wachſens, welche, wenn ſie innerhalb eines Intervalles dauernd bliebe, eine ebenſo große Zunahme hervorbringen würde, als die veränderliche Stärke des Wachſens in dieſem Intervalle erzeugt, die durchſchnittliche Stärke des Wachſens dieſes Intervalles nennen.

Ertheilt man nun der willkürlich Veränderlichen einer Function den Werth a, und ſetzt von dieſem Werthe aus ein Intervall x, ſo muß es, wenn ϑ eine Zahl vorſtellt, die kleiner als 1 iſt, einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen geben, für welchen die momentane Stärke des Wachſens der Function die durchſchnittliche des Intervalles x iſt. Multiplicirt man demnach den Werth, welchen der erſte Differentialquotient einer Function $(f(a+x)$ für den Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen annimmt, alſo den Werth $\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}$, mit der Zahl x, ſo wird dies Product die Zunahme angeben, welche die Function $f(a+x)$ dadurch erhalten hat, daß ihre willkürlich Veränderliche von dem Werthe a bis zum Werthe $a+x$ gewachſen iſt. Es iſt klar, daß man zu dieſer Zunahme $\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}.x$ der

Function nur noch den Werth f(a) zu addiren braucht, um den Werth von f(a+x) zu haben. Wir erhalten also die Gleichung

$$f(a+x)=fa+\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}.x$$

welche Gleichung zwar für die Berechnung von f(a+x) gar nichts hilft, weil man nicht weiß, wie groß die Zahl ϑ zu nehmen ist, welche aber dadurch für unsern Zweck brauchbar wird, daß die Function f(a+x) durch einen, wenngleich nicht näher bestimmbaren Werth des Differentialquotienten dieser Function ausgedrückt erscheint.

Nehmen wir ferner an, die Function f(a+x) habe innerhalb des Intervalles x eine beliebig veränderliche Beschleunigung des Wachsens, jedoch ohne Unterbrechung der Stetigkeit. Diese Beschleunigung des Wachsens oder der zweite Differentialquotient der Function wird einen größten und einen kleinsten Werth haben. Denkt man sich nun eine Function von x, welche die Function f(a+x) im Anfangspunkte von x im ersten Grade berührt, und in welcher die größte innerhalb des Intervalles x vorhandene Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) dauernd ist, so wird den obigen allgemeinen Sätzen zu Folge diese Function von x in dem ganzen Intervalle x größere Werthe haben als die Function f(a+x). Und eine die Function f(a+x) an demselben Punkte im ersten Grade berührende Function von x, in welcher die kleinste innerhalb des Intervalles x vorhandene Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) dauernd ist, wird überall innerhalb des Intervalles x kleinere Werthe haben als die Function f(a+x). In sofern nun die Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) aus ihrem größten Werthe in den kleinsten stetig übergeht, so werden alle denkbaren Zwischenstufen der größten und kleinsten Beschleunigung des Wachsens sich in den einzelnen Punkten des Intervalles x finden; und es muß in dem Intervalle x einen Punkt geben, bei welchem die Beschleunigung des Wachsens der Function f(a+x) so groß ist, daß durch dieselbe, wenn sie bei einer die Function

$f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im ersten Grade berührenden Function in dem ganzen Intervalle x dauernd wäre, eine gerade so große Zunahme im Endpunkte von x erzeugt wird, als durch die veränderliche Beschleunigung des Wachsens der Function $f(a+x)$ hervorgebracht wird. Man kann auch hier diejenige Beschleunigung des Wachsens, welche, von der im Anfangspunkte eines Intervalles x vorhandenen Stärke des Wachsens ausgehend und in dem ganzen Intervalle dauernd, dieselbe Zunahme erzeugt, im Endpunkte von x als eine veränderliche Beschleunigung des Wachsens, die durchschnittliche des Intervalles x nennen. Stellt ϑ wie vorher eine Zahl vor, welche kleiner als 1 ist, so wird es einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen geben, bei welchem der zweite Differentialquotient der Function $f(a+x)$ die für das Intervall x durchschnittliche Beschleunigung des Wachsens der Function $f(a+x)$ angibt, und es kann demnach diese durchschnittliche Beschleunigung des Wachsens durch $\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}$ ausgedrückt werden. So wie wir nun vorher die Function $f(a+x)$ durch eine im ersten Grade gleichmäßig wachsende Function von x dargestellt haben, welche für den Nullwerth von x den Werth $f(a)$ hat, und deren Stärke des Wachsens die für das Intervall x durchschnittliche der Function $f(a+x)$ ist, so können wir auch die Function $f(a+x)$ durch eine im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Function von x darstellen, welche für den Nullwerth von x den ersten Differentialquotienten und den Functionswerth mit $f(a+x)$ gemeinschaftlich hat, und deren Beschleunigung des Wachsens die für das Intervall x durchschnittliche der Function $f(a+x)$ ist. Die gesuchte im zweiten Grade gleichmäßig wachsende Function von x hat im Allgemeinen die Form $A+Bx+Cx^2$. Da wie bekannt $2C$ die constante Beschleunigung des Wachsens dieser Function ausdrückt, so haben wir $\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}$ statt $2C$, oder $\frac{1}{2}.\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx}$

ſtatt C zu ſetzen. Für $x=0$ nimmt die Function $A+B$ $+Cx^2$ den Werth A, und ihr erſter Differentialquotient d Werth B an; und da dieſe Werthe gleich ſein ſollen d Werthen, welche die Function $f(a+x)$ und ihr erſter D ferentialquotient für $x=0$ annehmen, alſo gleich den W then $f(a)$ und $\frac{df(a)}{dx}$, ſo iſt die geſuchte im zweiten Gra gleichmäßig wachſende Function von x durch die Fo $f(a)+\frac{df(a)}{dx}+\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}$ gegeben, und wir halten die Gleichung

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}.$$

Veranſchaulicht durch die Ordinaten der krummen L efg Fig. 65, in welcher das Abſciſſenſtück bc den Wer a und cd den Werth x haben möge, kann dieſer Satz ſo au geſprochen werden: Wenn man eine in Bezug auf ihre O dinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachſende Parabe durch die Punkte f und g legt, welche zugleich die Cu efg im Punkte f im erſten Grade berührt, ſo gibt es inn halb des Intervalles x einen Punkt, oder einen Wer $a+\vartheta x$ der Abſciſſe, für welchen der zweite Differenti quotient der Ordinaten der Curve efg identiſch iſt mit d conſtanten zweiten Differentialquotienten der Ordinaten d Parabel. Daß man eine in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachſende Parabel durch di Punkte f und g ſo legen könne, daß ſie die Curve efg im Punkte f im erſten Grade berührt, verſteht ſich von ſelbſt, weil die Gleichung einer ſolchen Parabel drei unbe ſtimmte Conſtante enthält, welche den drei vorgeſchriebenen Bedingungen angepaßt werden können. Hier iſt nur nach wieſen, daß der conſtante zweite Differentialquotient der Ordinaten der Parabel nothwendig vorkommt unter den Werthen, welche der zweite Differentialquotient der Curve efg innerhalb des Intervalles x annimmt.

Nehmen wir noch an, daß die Function $f(a+x)$ in

nerhalb des Intervalles x eine beliebig veränderliche Stärke des Wachsens im dritten Grade habe, so gibt es einen größten und kleinsten Werth dieser Stärke des Wachsens. Eine die Function $f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im zweiten Grade berührende Function von x wird, wenn ihr dritter Differentialquotient constant und gleich dem größten innerhalb des Intervalles x vorkommenden Werthe des dritten Differentialquotienten der Function $f(a+x)$ ist, überall innerhalb des Intervalles x größere Werthe haben als die Function $f(a+x)$, und wenn ihr dritter constanter Differentialquotient gleich ist dem kleinsten Werthe des dritten Differentialquotienten von $f(a+x)$, so wird sie überall innerhalb des Intervalles x kleinere Werthe haben als die Function $f(a+x)$. Wenn nun der dritte Differentialquotient von $f(a+x)$ innerhalb des Intervalles x aus seinem größten in seinen kleinsten Werth stetig übergeht, so ist in einem Punkte des Intervalles x dieser dritte Differentialquotient so groß, daß er als constanter dritter Differentialquotient jener im zweiten Grade berührenden Function genommen innerhalb des Intervalles x eine gerade so große Zunahme hervorbringt, als die Function $f(a+x)$ innerhalb dieses Intervalles annimmt. Nennen wir diesen einzelnen Werth des dritten Differentialquotienten der Function $f(a+x)$ den durchschnittlichen in dem oben erläuterten Sinne, so gibt es einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen, für welchen der dritte Differentialquotient von $f(a+x)$ seinen für das Intervall x durchschnittlichen Werth hat, und eine die Function $f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im zweiten Grade berührende Function von x, deren dritter constanter Differentialquotient gleich $\frac{d^3 f(a+\vartheta x)}{dx^3}$ ist, wird mit $f(a+x)$ gleichen Werth haben. Stellen wir eine solche im dritten Grade gleichmäßig wachsende Function von x zunächst unter der unbestimmten Form $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ vor, so wird, für $x=o$, der Werth dieser Function $=A$, der erste Differentialquotient $=B$, der

zweite $=1.2C$ und der dritte $=1.2.3D$; und da dieſe Werthe der Function und ihrer drei erſten Differentialquotienten der Reihe nach gleich $f(a)$, $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ und $\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}$ ſein ſollen, ſo werden wir, indem wir $f(a)$ ſtatt A, $\frac{df(a)}{dx}$ ſtatt B, $\frac{1}{1.2}\frac{d^2f(a)}{dx^2}$ ſtatt C und $\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}$ ſtatt D ſetzen, die Gleichung erhalten

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}.$$

Man wird ohne Weiteres bemerken, daß das Raiſonnement, durch welches die vorhergehenden verſchiedenen Ausdrücke für $f(a+x)$ gefunden worden ſind, ſich unverändert auf alle folgenden Grade der Stärke des Wachſens übertragen läßt, und daß man durch daſſelbe zu folgendem Reſultate gelangen wird: Wenn eine Function von x, welche die Function $f(a+x)$ im Anfangspunkte von x im nten Grade berührt, eine ſolche conſtante Stärke des Wachſens im $(n+1)$ten Grade hat, daß ihre dem Intervalle x zugehörige Zunahme gleich iſt der demſelben Intervalle zugehörigen Zunahme der Function $f(a+x)$, in welchem Falle dieſe conſtante Stärke des Wachſens im $(n+1)$ten Grade die durchſchnittliche der Function $f(a+x)$ für das Intervall x heißen mag, ſo gibt es immer einen Werth $a+\vartheta x$ der willkürlich Veränderlichen, für welchen die momentane Stärke des Wachſens im $(n+1)$ten Grade der Function $f(a+x)$ gleich jener durchſchnittlichen iſt, ſobald die Differentialquotienten von $f(a+x)$ bis zum $(n+1)$ten nur endliche Werthe haben innerhalb des Intervalles x. Da die im nten Grade berührende und im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachſende Function von x offenbar $(n+2)$ vorgeſchriebenen Bedingungen genügen ſoll, indem ſie in dem Anfangspunkte von x mit der Function $f(a+x)$ den Functionswerth und die n erſten Differentialquotienten gemeinſchaftlich haben ſoll, und im Endpunkte

von x mit $f(a+x)$ zusammenfallen soll, so sieht man, daß sie nicht blos allemal diesen Bedingungen entsprechend gebildet werden kann, sondern daß sie auch durch diese Bedingungen völlig bestimmt ist, weil eine im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachsende Function immer $(n+2)$ unbestimmte Constante enthält. Wenn wir die im nten Grade berührende und im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachsende Function von x, welche für den Werth x der willkürlich Veränderlichen mit $f(a+x)$ zusammenfällt, durch die Potenzenreihe $A+Bx+Cx^2$ u. s. w. bis zur $(n+1)$ten Potenz von x vorstellen, und die Constanten A, B, C u. s. w. so bestimmen, daß sie den vorgeschriebenen Bedingungen entsprechen, so werden dieselben der Reihe nach die Werthe

$$f(a),\ \frac{df(a)}{dx},\ \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2f(a)}{dx^2},\ \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3f(a)}{xd^3},\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^nf(a)}{dx^n}\ \text{und}\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\cdot\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$$

annehmen, und wir erhalten die Gleichung

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}\ldots\ldots$$

$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}+\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots.n(n+1)}.\quad(12)$$

Die Zahl ϑ wird im Allgemeinen für jeden Grad der Stärke des Wachsens einen verschiedenen Werth haben, und man weiß von ihr nichts weiter, als daß sie kleiner als 1 ist. Obgleich nun demnach die Reihe (12) zur Berechnung des Werthes von $f(a+x)$ nicht dienen kann, so ist sie doch von Wichtigkeit, weil in derselben der Werth von $f(a+x)$ durch eine im nten Grade berührende und im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachsende Function ausgedrückt erscheint, und in diesem Ausdrucke nur die Differentialquotienten von $f(a+x)$ vorkommen, und diese Reihe uns mithin die Mittel an die Hand geben kann, zu erkennen, auf welche Weise die Bedingungen, unter denen eine in einem höheren Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function eine Annäherung an den Werth der berührten

Function gestattet, an die Beschaffenheit der Differentialquotienten der berührten Function geknüpft sind.

Die Reihe (12) stellt, wenn man das letzte Glied wegläßt, eine im nten Grade gleichmäßig wachsende Function von x vor, welche die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen im nten Grade berührt, d. h. sie ist die Taylor'sche Reihe. Da zu dieser Function von x noch der Ausdruck $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ hinzugefügt werden muß, um den Werth von $f(a+x)$ hervorzubringen, so heißt dieser Ausdruck der Rest der Taylor'schen Reihe, und er gibt allgemein an, um wie viel die im nten Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function von der berührten Function abweicht. Dieser Restausdruck ist zuerst von Lagrange abgeleitet worden, auf einem von dem vorhergehenden abweichenden ziemlich künstlichen Wege, so daß in dem Ausdrucke eine geheimnißvolle und wunderbare Eigenschaft der Functionen ausgesprochen scheinen möchte. Wie wir aber gesehen haben, wird durch diesen Restausdruck etwas sehr Einfaches und fast Triviales ausgesprochen.

Die Abweichung der in irgend einem Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function von der berührten kann vermittelst der Reihe (12) auch ohne Zuhülfenahme des nächsthöheren Differentialquotienten ausgedrückt werden. Denn die eine Function $f(a+x)$ z. B. im dritten Grade berührende und in demselben Grade gleichmäßig wachsende Function von x ist gegeben durch

$$f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$$

und da zugleich

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$$

so sieht man, nach Abziehung der im dritten Grade berührenden Function von dem Werthe von $f(a+x)$, daß die berührende um den Werth

$$\left(\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3}$$

von $f(a+x)$ abweicht. Allgemein wird eine Function von x, welche im nten Grade gleichmäßig wachsend die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen im nten Grade berührt, von $f(a+x)$ abweichen um den Werth des Ausdrucks

$$\left(\frac{d^nf(a+\vartheta x)}{dx^n}-\frac{d^nf(a)}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1.2.3....n}.$$

Sobald von einer Function $f(a+x)$ sich nachweisen läßt, daß für jeden beliebigen Werth der Zahlen a und x entweder der Ausdruck

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$$

oder der Ausdruck

$$\left(\frac{d^nf(a+\vartheta x)}{dx^n}-\frac{d^nf(a)}{dx^n}\right)\frac{x^n}{1.2.3....n}$$

durch gehörige Vergrößerung der Zahl n sich dem Nullwerth beliebig nahe bringen läßt, so hat der Taylor'sche Lehrsatz für diese Function seine unbedingte Gültigkeit.

§. 132.

Das Wesen der Gradverschiedenheit bei den Berührungen.

Ehe wir die Untersuchung der Bedingungen der uneingeschränkten Gültigkeit des Taylor'schen Lehrsatzes vornehmen, wollen wir die für die Abweichung der sich berührenden Functionen gefundenen Ausdrücke benutzen, um die Bedeutung der wirklichen Gradverschiedenheit, welche bei den verschiedenen Graden der Berührung stattfindet, nachzuweisen. Wir haben die Definition der verschiedenen Grade der Berührung nur aus dem Zusammentreffen der Differentialquotienten entnommen, haben aber nicht angegeben, ob und in wiefern in Betreff der Art und Weise der Berüh-

rung wesentliche Unterschiede stattfinden bei den verschiedenen Graden der Berührung. Es ist vielmehr im §. 113, wo die im zweiten Grade berührenden Functionen zuerst in Betracht gezogen wurden, gesagt worden, daß später im umfassenderen Zusammenhange der höheren Differentialquotienten der Nachweis geliefert werden soll, daß man, sobald nur die Differentialquotienten der berührten Function endliche Werthe haben im Berührungspunkte, durch Annäherung an den Berührungspunkt immer zu Punkten gelangen kann, in welchen eine in einem höheren Grade berührende Function sich beliebig vielmal inniger an den Werth der berührten Function anschließt, als die in dem nächstniedrigeren Grade berührende Function. Diesen Nachweis wollen wir hier geben, und zwar zuerst für solche in einem höheren Grade berührende Functionen, welche zugleich in demselben Grade gleichmäßig wachsend sind.

Denkt man zwei Functionen von x, von denen Eine die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich veränderlichen im ersten, und die andere im zweiten Grade berührt, und die zugleich in den entsprechenden Graden gleichmäßig wachsend sind, so hat die erstere eine Abweichung von dem Werthe $f(a+x)$ gleich $\left(\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}-\frac{df(a)}{dx}\right)x$ und die zweite eine Abweichung gleich $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}$. In sofern der erste und zweite Differentialquotient von $f(a+x)$ innerhalb des Intervalles x endliche Werthe haben (unter welcher Voraussetzung diese Ausdrücke für die Abweichung ja überhaupt nur Gültigkeit haben), und also die Coefficienten von x und $\frac{x^2}{1.2}$ endliche Zahlen vorstellen, kann offenbar das vom Berührungspunkte aus gesetzte Intervall x immer so klein genommen werden, daß der Werth des Ausdrucks $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}$ beliebig vielmal kleiner ist als

der Werth des Ausdrucks $\left(\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}-\frac{df(a)}{dx}\right)x$. Obgleich beide Ausdrücke mit Verkleinerung des Intervalles x sich dem Nullwerthe nähern, so nähern sie sich doch diesem Werthe ungleich stark, und es wird durch fortgesetzte Verkleinerung von x die Anschließung der im zweiten Grade berührenden Function an den Werth von $f(a+x)$ über jede vorgeschriebene Grenze hinaus inniger erhalten werden als die Anschließung der im ersten Grade berührenden Function. Und da bei fortgesetzter Verkleinerung des Intervalles x vor dem Uebergang in den Berührungspunkt die Abweichungen der beiden berührenden Functionen von dem Werthe der Function $f(a+x)$ relativ zu einander alle denkbaren Zahlenverhältnisse durchlaufen, und die Stärke der Anschließung beider Functionen sich dem Unvergleichbaren nähert, so hat man ein Recht, diese Arten der Berührung als wesentlich verschiedene zu betrachten. Denn wenn man angeben wollte, um wie vielmal inniger in der unmittelbarsten Nähe des Berührungspunktes die Eine Function sich anschließt als die Andere, so könnte man nicht anders sagen als unendlich vielmal.

Da ferner Functionen von x, von denen die Eine die Function $f(a+x)$ im zweiten und die Andere im dritten Grade berührt, und die beide in den entsprechenden Graden gleichmäßig wachsend sind, Abweichungen haben von dem Werthe der Function $f(a+x)$, welche gleich $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\cdot\frac{x^2}{1.2}$ und gleich $\left(\frac{d^3f(a+\vartheta x)}{dx^3}-\frac{d^3f(a)}{dx^3}\right)\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$ zu setzen sind, so sieht man, daß mit fortgesetzter Verkleinerung des Intervalles x die Abweichung der im dritten Grade berührenden Function beliebig vielmal kleiner gemacht werden kann als die Abweichung der im zweiten Grade berührenden Function, daß also mit Annäherung an den Berührungspunkt die verschiedene Innigkeit der Anschließung beider berührenden Functionen sich

rung wesentliche Unterschiede stattfinden bei den verschiedenen Graden der Berührung. Es ist vielmehr im §. 113, wo die im zweiten Grade berührenden Functionen zuerst in Betracht gezogen wurden, gesagt worden, daß später im umfassenderen Zusammenhange der höheren Differentialquotienten der Nachweis geliefert werden soll, daß man, sobald nur die Differentialquotienten der berührten Function endliche Werthe haben im Berührungspunkte, durch Annäherung an den Berührungspunkt immer zu Punkten gelangen kann, in welchen eine in einem höheren Grade berührende Function sich beliebig vielmal inniger an den Werth der berührten Function anschließt, als die in dem nächstniedrigeren Grade berührende Function. Diesen Nachweis wollen wir hier geben, und zwar zuerst für solche in einem höheren Grade berührende Functionen, welche zugleich in demselben Grade gleichmäßig wachsend sind.

Denkt man zwei Functionen von x, von denen Eine die Function $f(a+x)$ für den Werth a der willkürlich Veränderlichen im ersten, und die andere im zweiten Grade berührt, und die zugleich in den entsprechenden Graden gleichmäßig wachsend sind, so hat die erstere eine Abweichung von dem Werthe $f(a+x)$ gleich $\left(\frac{df(a+\vartheta x)}{dx}-\frac{df(a)}{dx}\right)x$ und die zweite eine Abweichung gleich $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}$. In sofern der erste und zweite Differentialquotient von $f(a+x)$ innerhalb des Intervalles x endliche Werthe haben (unter welcher Voraussetzung diese Ausdrücke für die Abweichung ja überhaupt nur Gültigkeit haben), und also die Coefficienten von x und $\frac{x^2}{1.2}$ endliche Zahlen vorstellen, kann offenbar das vom Berührungspunkte aus gesetzte Intervall x immer so klein genommen werden, daß der Werth des Ausdrucks $\left(\frac{d^2f(a+\vartheta x)}{dx^2}-\frac{d^2f(a)}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}$ beliebig vielmal kleiner ist als

der Kreislinie sowol als von der Ordinate der andern Curve kann den obigen Sätzen zu Folge durch Annäherung an den Berührungspunkt beliebig vielmal kleiner erhalten werden, als die Abweichung der Ordinate der Tangente von den Ordinaten der Kreislinie und der andern Curve. Folglich wird auch die Abweichung, welche die Ordinaten der Kreislinie und der andern Curve untereinander haben, beliebig vielmal kleiner gemacht werden können als die Abweichungen der Ordinaten dieser beiden Curven von der Ordinate ihrer gemeinschaftlichen Tangente. Mithin wird auch die eine Curve im zweiten Grade berührende Kreislinie, obgleich in Bezug auf ihre Ordinaten nicht gleichmäßig wachsend im zweiten Grade, sich in der Nähe des Berührungspunktes beliebig vielmal inniger an die Curve anschließen als die diese Curve im ersten Grade berührende Tangente. Es macht offenbar keinen Unterschied, wenn die im ersten Grade berührende Linie keine gerade, sondern eine beliebige Curve ist, weil alsdann beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente haben, und man dieselben Schlüsse auf die Abweichungen der Ordinaten beider Curven von der Ordinate der Tangente anwenden kann. Ebenso ist einleuchtend, daß man die im Vorhergehenden gebrauchte Schlußweise auch auf die höheren Grade der Berührung ausdehnen kann.

§. 133.

Bedingungen der unbegrenzten Annäherung der berührenden Functionen an die berührte.

Da man bei der Frage nach der durch berührende Functionen zu erreichenden Annäherung an den Werth der berührten Function eigentlich wissen will, ob die ins Endlose fortgesetzt gedachte Potenzenreihe dem Werthe der berührten Function gleichzusetzen ist oder nicht, so haben wir noch die Eigenthümlichkeiten ins Auge zu fassen, welche die Differentialquotienten zeigen, wenn ihre Rangzahl ins Unendliche gesteigert wird. Hierbei zeigt sich unter den Functionen der Unterschied, daß ihre Differentialquotienten mit

wieder dem Unvergleichbaren nähert. Daſſelbe folgt auf dieſelbe Weiſe für alle höheren Grade der Berührung. Es verhält ſich mit dieſer verſchiedenen Innigkeit der Berührung bei fortgeſetzter Annäherung an den Berührungspunkt gerade wie mit den Differentialen der verſchiedenen Grade bei ihrer gemeinſchaftlichen Annäherung an den Nullwerth. Sobald die Differentialquotienten der berührten Function im Berührungspunkte endliche Werthe haben, ſo gibt es immer ein wenn auch noch ſo kleines Intervall, in welchem dieſe Differentialquotienten ebenfalls endliche Werthe haben, weil eine Function nicht plötzlich aus einem endlichen Werthe in den unendlich großen übergehen kann. Folglich gilt der über die Berührungsgrade aufgeſtellte allgemeine Satz, daß die Abweichung der im nten Grade berührenden Function durch Verkleinerung des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles beliebig vielmal kleiner gemacht werden kann als die Abweichung der im (n — 1)ten Grade berührenden Function, unbedingt, ſobald nur im Berührungspunkte ſelbſt die Differentialquotienten der berührten Function bis zum nten endliche Werthe haben.

Auch in dem Falle, in welchem die berührenden Functionen nicht gleichmäßig wachſend ſind in den Graden, in welchen die Berührung ſtattfindet, gelten noch dieſelben Sätze in Betreff der Gradabſtufung der innigen Anſchließung, und die Abweichung einer etwa im zweiten Grade berührenden Function kann beliebig vielmal kleiner erhalten werden als die Abweichung einer im erſten Grade berührenden. Es möge z. B., um dies durch geometriſche Beiſpiele zu erläutern, durch einen Punkt einer Curve eine Tangente und zugleich ein Kreis gelegt ſein, welcher die Curve im zweiten Grade berührt. Die beiden im zweiten Grade ſich berührenden krummen Linien haben für den Berührungspunkt eine gemeinſchaftliche ſie im zweiten Grade berührende und in Bezug auf ihre Ordinaten im zweiten Grade gleichmäßig wachſende Parabel. Die Abweichung der Ordinate der berührenden Parabel von der Ordinate

der Kreislinie ſowol als von der Ordinate der andern Curve kann den obigen Sätzen zu Folge durch Annäherung an den Berührungspunkt beliebig vielmal kleiner erhalten werden, als die Abweichung der Ordinate der Tangente von den Ordinaten der Kreislinie und der andern Curve. Folglich wird auch die Abweichung, welche die Ordinaten der Kreislinie und der andern Curve untereinander haben, beliebig vielmal kleiner gemacht werden können als die Abweichungen der Ordinaten dieſer beiden Curven von der Ordinate ihrer gemeinſchaftlichen Tangente. Mithin wird auch die eine Curve im zweiten Grade berührende Kreislinie, obgleich in Bezug auf ihre Ordinaten nicht gleichmäßig wachſend im zweiten Grade, ſich in der Nähe des Berührungspunktes beliebig vielmal inniger an die Curve anſchließen als die dieſe Curve im erſten Grade berührende Tangente. Es macht offenbar keinen Unterſchied, wenn die im erſten Grade berührende Linie keine gerade, ſondern eine beliebige Curve iſt, weil alsdann beide Curven eine gemeinſchaftliche Tangente haben, und man dieſelben Schlüſſe auf die Abweichungen der Ordinaten beider Curven von der Ordinate der Tangente anwenden kann. Ebenſo iſt einleuchtend, daß man die im Vorhergehenden gebrauchte Schlußweiſe auch auf die höheren Grade der Berührung ausdehnen kann.

§. 133.

Bedingungen der unbegrenzten Annäherung der berührenden Functionen an die berührte.

Da man bei der Frage nach der durch berührende Functionen zu erreichenden Annäherung an den Werth der berührten Function eigentlich wiſſen will, ob die ins Endloſe fortgeſetzt gedachte Potenzenreihe dem Werthe der berührten Function gleichzuſetzen iſt oder nicht, ſo haben wir noch die Eigenthümlichkeiten ins Auge zu faſſen, welche die Differentialquotienten zeigen, wenn ihre Rangzahl ins Unendliche geſteigert wird. Hierbei zeigt ſich unter den Functionen der Unterſchied, daß ihre Differentialquotienten mit

steigender Rangzahl entweder ins Maßlose wachsen oder nicht. Von dem maßlosen Wachsen der Differentialquotienten können wir uns durch ganz einfache und naheliegende Beispiele überzeugen. Die Differentialquotienten der Function a^x, welche der Reihe nach sind $la.a^x$, $(la)^2a^x$, $(la)^3a^x$ u. s. w. wachsen offenbar für einen Werth von a, welcher größer ist als die Basis des natürlichen Logarithmensystems, und für jeden Werth des x mit steigender Rangzahl unbegrenzt, und ein unendlich hoher Differentialquotient wäre auch unendlich groß zu denken. Ebenso verhält es sich mit den Differentialquotienten irgend einer Wurzel aus x. Die Differentialquotienten von $x^{\frac{1}{2}}$ z. B. sind der Reihe nach, $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$, $-\frac{1}{2.2x^{\frac{3}{2}}}$, $+\frac{1.3}{2.2.2.x^{\frac{5}{2}}}$, $-\frac{1.3.5}{2.2.2.2.x^{\frac{7}{2}}}$ u. s. w. Man sieht, daß bei Bildung eines nächstfolgenden Differentialquotienten dieser Function aus dem vorhergehenden im Nenner immer der Factor 2.x hinzutritt, und im Zähler die nächsthöhere ungerade Zahl als Factor zugesetzt wird. Sobald der im Zähler hinzutretende Factor größer ist als 2x, welcher Fall für jeden Werth des x bei irgend einem höheren Differentialquotienten nothwendig eintreten muß, so werden von da an die Differentialquotienten der Function $x^{\frac{1}{2}}$ unbegrenzt wachsen. Dasselbe findet bei unzähligen andern Functionen statt.

Obgleich unendlichhohe Differentialquotienten als solche niemals Gegenstand der Untersuchung sein können, so ist es doch gestattet, die Eigenschaft der Differentialquotienten, bei steigender Rangzahl ins Maßlose zu wachsen, kurz dadurch zu bezeichnen, daß man sagt, der unendlich hohe Differentialquotient ist unendlich groß. In diesem Sinne ist eine solche Ausdrucksweise, wenn sie in dem Folgenden gebraucht wird, immer zu nehmen. Dadurch, daß die Dif-

ferentialquotienten von einer unendlich hoch gedachten Rangzahl unendlich große Werthe annehmen, ist natürlich keine Unterbrechung der Stetigkeit derselben gesetzt, so wenig als dadurch, daß ein Differentialquotient einer Function für unendlich große Werthe der willkürlich Veränderlichen unendlich groß wird. Als Unterbrechung der Stetigkeit der Differentialquotienten ist nur dies zu betrachten, daß ein Differentialquotient von endlicher angebbarer Rangzahl für einzelne bestimmte Verflußpunkte der willkürlich Veränderlichen unendlich groß wird.

Betrachten wir nun die Taylor'sche Reihe mit dem Lagrange'schen Restausdruck

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}\cdots$$
$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3....n}+\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$$

so wird, wie bereits oben bemerkt, eine im nten Grade gleichmäßig wachsende und die Function $f(a+x)$ im nten Grade berührende Function von x sich dem wahren Werthe von $f(a+x)$ mit steigendem Berührungsgrade unbegrenzt annähern, sobald der Ausdruck

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$$

mit Vergrößerung der Zahl n sich dem Nullwerthe unbegrenzt nähert. Wir betrachten die beiden Factoren dieses Ausdrucks einzeln. Daß der Eine Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ bei beliebig großem Werthe von x mit wachsendem n dem Nullwerthe beliebig nahe gebracht werden kann, davon kann man sich leicht auf folgende Art überzeugen. Wird ein ächter Bruch auf immer höhere Potenzen erhoben, so nähert er sich dem Nullwerthe unbegrenzt. Sind die Potenzen dieses ächten Bruches noch mit einer beliebig großen constanten Zahl multiplicirt, so nähert sich dieses Product dem Nullwerthe ebenfalls unbegrenzt. Wenn nun dadurch, daß zu einer beliebig großen Zahl immer derselbe ächte Bruch

als Factor zutritt, das Product dem Nullwerthe beliebig nahe gebracht werden kann, so wird dies um so mehr stattfinden, wenn zu einer beliebigen Zahl immer kleiner werdende ächte Brüche als Factoren zugesetzt werden. Betrachten wir nun den Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$, so sehen wir, wenn die Zahl n immer um die Einheit wachsend gedacht wird, zu dem Zähler fortwährend den Factor x hinzutreten, und zum Nenner einen Factor, der um 1 größer ist als der vorher vorhandene höchste Factor im Nenner. Mag x nun auch beliebig groß sein, so muß zuletzt doch der Fall eintreten, daß der im Nenner hinzutretende Factor größer ist als x. Von nun an wird bei weiter wachsendem n der Werth des Ausdrucks $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ mit immer kleiner werdenden ächten Brüchen multiplicirt, und folglich muß er sich mit wachsendem n dem Nullwerthe unbegrenzt annähern.

Wenn nun die Function $f(a+x)$ eine solche ist, deren Differentialquotienten mit steigender Rangzahl nicht ins Maßlose wachsen, sondern innerhalb gewisser Grenzen bleiben, so wird der Ausdruck $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ auch bei endlos wachsendem n einen endlichen Werth behalten. Mithin wird unter diesen Umständen auch der Ausdruck

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$$

sich mit steigendem Berührungsgrade nothwendig zuletzt dem Nullwerthe unbegrenzt nähern, wie groß auch das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall x gesetzt wird, und die ins Endlose fortgesetzte Taylor'sche Reihe muß als ein adäquater Ausdruck der Function $f(a+x)$ angesehen werden.

Nehmen wir z. B. die Functionen $\sin x$, und $\cos x$, so gehören dieselben zu denen, deren Differentialquotienten bei beliebig steigender Rangzahl nicht maßlos wachsen, sich viel-

mehr innerhalb der engen Grenzen von $+1$ und -1 halten. Die Differentialquotienten von e^x sind sämmtlich gleich e^x, und folglich ihrer Größe nach von der Rangzahl gar nicht abhängig. Bei diesen Functionen hat also die Taylor'sche Reihe ihre unbedingte Gültigkeit für alle beliebig großen vom Berührungspunkte aus gesetzte Intervalle der willkürlich Veränderlichen. Es mag jedoch bemerkt werden, daß man deswegen nicht schließen darf, es werde für solche Functionen bei jedem beliebigen Intervalle der willkürlich Veränderlichen jede folgende in einem höheren Grade berührende Function einen genaueren Näherungswerth geben, als die vorhergehende. Es kann ja bei einem verhältnißmäßig großen Intervalle x der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ des Restausdruckes bis zu einem gewissen Werthe von n bedeutend wachsen, und folglich der Restausdruck bis zu einem gewissen Berührungsgrade ebenfalls wachsen. Unser obiger Satz sagt nur, daß man bei solchen Functionen durch Steigerung des Berührunggrades zuletzt immer auf Abweichungen kommen muß, die abnehmen und zwar unbegrenzt abnehmen.

Es ist noch der zweite Hauptfall zu untersuchen, in welchem die Differentialquotienten mit steigender Rangzahl zuletzt unbegrenzt wachsen, sei es nun, daß sie gleich vom ersten an gerechnet wachsen, oder daß das Wachsen erst bei einem Differentialquotienten von bestimmter Rangzahl eintritt, welche Rangzahl dann sowol von dem Werthe der willkürlich Veränderlichen, für welchen man die Differentialquotienten genommen hat, als von den Constanten der Function abhängen kann. In diesem Falle wird in dem Lagrange'schen Restausdruck mit endlos wachsendem n der Eine Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ einem unendlich großen Zahlenwerthe und der andere Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ dem Nullwerthe zueilen, und zwar für jeden Werth a der will-

kürlich Veränderlichen, bei welchem die Berührung stattfindet, und für jedes beliebige vom Berührungspunkte aus genommene Intervall x. Die Grenze, welcher der Restausdruck entgegengeht, kann also in diesem Falle durch $\infty.0$ bezeichnet werden. Ein Ausdruck, welcher für einen gewissen Werth einer in ihm enthaltenen veränderlichen Zahl in die Form $\infty.0$ übergeht, kann bei diesem Uebergange im Allgemeinen sowol einen unendlich großen Werth, als den Nullwerth, sowie auch irgend einen endlichen Werth annehmen. Denn wenn der eine Factor immer in stärkerem Maße wächst als der andere abnimmt, so wird das Product in der Annäherung an die Grenze $\infty.0$ ohne Ende größer, und die Form $\infty.0$ stellt einen unendlich großen Zahlenwerth vor. Nimmt aber der eine Factor fortwährend in stärkerem Maße ab, als der andere zunimmt, so nimmt das Product ohne Ende ab, und die Form $\infty.0$ stellt den Nullwerth vor. Nähern sich endlich die Maße des Wachsens und Abnehmens der beiden Factoren fortwährend immer mehr der Gleichheit, je näher man der Grenze $\infty.0$ kommt, so werden die Veränderungen des Products in der Annäherung an diese Grenze immer unbedeutender, und die Form $\infty.0$ stellt einen endlichen Zahlenwerth vor.

Man kann sich dies leicht durch Functionen einer Veränderlichen erläutern, welche für gewisse Werthe der willkürlich Veränderlichen in die Form $\infty.0$ übergehen. Gewöhnlich wird in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung in einem besonderen Capitel nachgewiesen, wie man den wahren Werth sowol des unbestimmten Ausdrucks $\infty.0$ als anderer unbestimmten Formen, in welche Functionen einer Veränderlichen für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen übergehen können, findet. Da wir diese Untersuchung nicht angestellt haben, so mögen einige ganz einfache Beispiele zur Erläuterung dienen. Wenn man in der Function $x\mathrm{L}gx$ (gemeiner Logarithmus) die Veränderliche x bis zum Nullwerth abnehmend denkt, so geht sie, da $\mathrm{L}go = -\infty$, in die Form $0.\infty$ über. Das

das Product $x\,Lgx$ mit Verkleinerung des x ohne Ende dem Nullwerth entgegengeht, und folglich in diesem Falle der Werth des Ausdruckes $0.\infty$ gleich Null zu setzen ist, ist leicht zu sehen. Denn verkleinern wir das x fortwährend und geben demselben der Reihe nach etwa die Werthe $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ u. s. w., so sind die zugehörigen gemeinen Logarithmen gleich $-1, -2, -3$ u. s. w., und die Function $x\,Lgx$ nimmt der Reihe nach die Werthe $-\frac{1}{10}, -\frac{2}{100}, -\frac{3}{1000}$ u. s. w. an, und es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Werthe sich unbegrenzt dem Nullwerthe nähern. In der Function $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{Lgx}$, in welcher für $x=0$ der eine Factor $\frac{1}{x}$ unendlich groß, und der andere Factor $\frac{1}{Lgx}$ gleich Null wird, tritt offenbar das Gegentheil ein. Denn die Function $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{Lgx}$ nimmt der Reihe nach die Werthe $-\frac{10}{1}, -\frac{100}{2}, -\frac{1000}{3}$ u. s. w. an, wenn man dem x die Werthe $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ u. s. w. ertheilt und dem Ausdrucke $\infty.0$ ist demnach in diesem Falle ein unendlich großer Werth beizulegen. Um auch ein Beispiel von einem endlichen Werthe des Ausdruckes $\infty.0$ zu geben, so nehmen wir die Function $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$. Setzt man $x=\frac{\pi}{2}$, so wird $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ und $tgx=\infty$. Der Werth des Ausdruckes $0.\infty$ ist aber in diesem Falle weder Null noch unendlich, sondern gleich 1. Denn setzen wir $\frac{\sin x}{\cos x}$ statt tgx, und schreiben unsere Function in der

Form $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}.\sin x$, so wird, für $x=\frac{\pi}{2}$, der eine Factor $\sin x$ gleich 1, und in dem andern Factor $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ nähern sich wie bekannt Zähler und Nenner ohne Ende der Gleichheit, je näher x dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ kommt, und folglich nähert sich der Werth von $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ ohne Ende der Einheit; und der Ausdruck $\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$ ist für $x=\frac{\pi}{2}$ nothwendig gleich 1 zu setzen, obgleich er für diesen Werth von x in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergeht.

Kehren wir zurück zu dem Restausdruck der Taylor'schen Reihe. Um ein Beispiel zu geben, in welchem dieser Restausdruck für ein unendlich großes n die Form $\infty.0$ annimmt, so nehmen wir die Function A^x. Die successiven Differentialquotienten derselben sind $lA.A^x$, $(lA)^2.A^x$, $(lA)^3.A^x$, und dieselben werden, wenn A größer ist als die Basis des natürlichen Logarithmensystems und folglich lA größer als 1, vom ersten an gerechnet wachsen, und im Fortgang unbegrenzt wachsen. Drücken wir die willkürlich Veränderliche unserer Function durch $a+x$ aus, und betrachten wir in der Function A^{a+x} die Zahl a als den Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung stattfindet, und x als das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall, so wird nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$A^{a+x}=A^a+lA.A^a.\frac{x}{1}+(lA)^2A^a.\frac{x^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$+(lA)^nA^a.\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+(lA)^{n+1}A^{(a+\vartheta x)}.\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}.$$

Obgleich der Factor $(lA)^{n+1}.A^{(a+\vartheta x)}$ des Restausdruckes für ein unendlich großes n unendlich groß wird, so

geht doch der ganze Reſtausdruck dem Nullwerthe entgegen. Denn ſchreibt man denſelben in der Form

$$A^{(a+\vartheta x)} \cdot \frac{(lA.x)^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$$

ſo ſieht man, daß der Ausdruck $\frac{(lA.x)^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ ſo gut als der Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ ſich mit wachſendem n dem Nullwerthe nähert, und daß folglich, da der Factor $A^{(a+\vartheta x)}$ für jeden endlichen Werth von x einen endlichen Werth hat, der ganze Reſtausdruck ſich unbegrenzt dem Nullwerthe nähert.

Wenn nun, wie man ſieht, auch bei ſolchen Functionen, deren Differentialquotienten mit ſteigender Rangzahl unendlich groß werden, der Reſtausdruck der Taylor'ſchen Reihe dem Nullwerthe ſich nähern kann, ſo entſteht die Frage, worin denn der Unterſchied derjenigen Functionen, bei welchen die Grenze $\infty.0$ des Reſtausdruckes für jedes beliebige Intervall gleich Null zu ſetzen iſt, von den andern Functionen, bei welchen dies nicht der Fall iſt, eigentlich beſteht. In Betreff dieſer Frage kommt man leicht zu dem Reſultate, daß es weſentlich darauf ankommt, um wie vielmal ein folgender Differentialquotient größer iſt als der vorhergehende, und daß der Reſtausdruck für jedes beliebige Intervall ſich dem Nullwerthe nähert bei allen Functionen, bei welchen die Zahl, welche angibt, um wie vielmal ein folgender Differentialquotient größer iſt als der vorhergehende, ſich innerhalb endlicher Grenzen hält. Denn da der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)}$ des Reſtausdruckes ſich nicht blos dem Nullwerthe nähert, ſondern bei jedem beliebigen Werthe von x ein ſolcher Werth von n gedacht werden kann, daß die Zahl, welche angibt, um wie vielmal dieſer Factor kleiner wird bei dem Uebergange zur nächſt höheren Potenz von x, jede beliebig große gegebene Zahl überſteigt, ſo wird, wenn die beim Fortgange zu einem nächſt höheren

Differentialquotienten eintretende verhältnißmäßige Vergrößerung des andern Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ eine gewisse Zahl nicht übersteigt, immer ein solcher Werth von n angegeben werden können, von welchem an bei weiterem Wachsen des n der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ sich fortwährend in stärkerem Maße verkleinert, als der Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ sich vergrößert, und folglich wird sich der ganze Restausdruck unbegrenzt dem Nullwerthe nähern. Bei der vorhergebrauchten Function A^x hat der Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ des Restausdruckes die Form $(lA)^{n+1}.A^{(a+\vartheta x)}$. Wenn nun auch ϑ für den $(n+1)$ten Differentialquotienten einen möglichst kleinen Werth hätte, und beinahe gleich Null wäre, und für den nächsten Differentialquotienten einen möglichst großen, und beinahe gleich 1 wäre, so würde doch der für das Intervall x durchschnittliche Werth des $(n+1)$ten Differentialquotienten größer als $(lA)^{n+1}.A^a$, und der durchschnittliche Werth des nächsten Differentialquotienten kleiner als $(lA)^{n+2}.A^{(a+x)}$ oder $(lA)^{n+2}.A^a.A^x$ sein, und folglich kann die verhältnißmäßige Vergrößerung eines folgenden Differentialquotienten den Zahlenwerth $lA.A^x$ nicht erreichen.

Als Functionen, bei denen der Restausdruck der Taylor'schen Reihe sich nicht nothwendig zuletzt dem Nullwerthe unbegrenzt nähert, bleiben uns demnach schließlich nur diejenigen übrig, bei welchen die verhältnißmäßige Vergrößerung eines folgenden Differentialquotienten mit steigender Rangzahl derselben selbst maßlos wächst. Beispiel einer solchen Function ist lx. Der nte Differentialquotient derselben ist $\frac{1.2.3....(n-1)}{x^n}$. Man sieht, daß n immer so groß genommen werden kann, daß die Zahl, welche angibt, um wie vielmal der folgende Differentialquotient größer ist als der vorhergehende, jede be-

liebig große gegebene Zahl übersteigt. Bei solchen Functionen befinden sich nun die beiden Factoren des Restausdruckes der Taylor'schen Reihe in Betreff ihrer verhältnißmäßigen Vergrößerung und Verkleinerung in gleichem Falle, indem immer ein solcher Werth von n angegeben werden kann, daß der Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ beliebig vielmal größer und der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ beliebig vielmal kleiner wird, sobald man die Zahl n um eine Einheit wachsen läßt. Ob also bei wachsendem n die verhältnißmäßige Vergrößerung des Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ mehr beträgt als die verhältnißmäßige Verkleinerung des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ oder ob das Umgekehrte stattfindet, d. h. ob der Restausdruck fortwährend wächst oder abnimmt, das wird nicht mehr allgemein aus der Natur der berührten Function bestimmt werden können, sondern wird davon abhängen, wie groß das Intervall x genommen wird, und wie groß der Werth a der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung der Functionen stattfinden soll, genommen wird. Denn von dem Werthe der Zahl x hängt das Maß der bei wachsendem n zuletzt nothwendig eintretenden Verkleinerung des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ ab, und von a und x zugleich hängt der Werth $(a+\vartheta x)$ der willkürlich Veränderlichen ab, für welchen der $(n+1)$te Differentialquotient genommen wird, und folglich hängt von a und x auch das Maß der Vergrößerung ab, welche der Factor $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ bei wachsendem n erleidet. Daß nun bei den hier in Betracht gezogenen Functionen für jeden Werth a der willkürlich Veränderlichen der Werth des Intervalles x immer so groß genommen werden kann, daß der Restausdruck fortwährend wächst, und immer so klein, daß derselbe fortwährend ab-

nimmt, ist daraus einleuchtend, daß das Maß der Verkleinerung, welche der Factor $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ bei Fortgang von einer Potenz zur nächsthöheren erleidet, durch Veränderung der Zahl x in allen denkbaren Graden abgestuft werden kann. Wie wenig auch das Maß der mit steigender Rangzahl eintretenden verhältnißmäßigen Vergrößerung des Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ wächst, so ist doch immer ein großer Werth von x denkbar, daß das Maß der in den entsprechenden Werthen des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ eintretenden verhältnißmäßigen Verkleinerung geringer ist, und folglich der Restausdruck mit steigendem Berührungsgrade immer größer wird. Ebenso wird umgekehrt die bei jedem folgenden Differentialquotienten eintretende verhältnißmäßige Vergrößerung des Factors $\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}$ durch die in den entsprechenden Werthen des Factors $\frac{x^{n+1}}{1.2.3...n(n+1)}$ eintretende verhältnißmäßige Verkleinerung überboten werden können, sobald man nur das Intervall x klein genug macht. Es gibt also bei allen solchen Functionen für jeden Werth a der willkürlich Veränderlichen eine Grenze des Intervalles x, unterhalb deren der Restausdruck in ein unbegrenztes Abnehmen, und oberhalb deren derselbe in ein unbegrenztes Wachsen übergehen muß.

Betrachten wir z. B. die Function lx, so haben wir nach der Taylor'schen Reihe

$$l(a+x)=la+\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{1}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{1.2}{a^3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$-\frac{1.2.3}{a^4}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}\cdots\cdots+\frac{1.2.3...(n-1)}{a^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3....n}$$

und der Restausdruck dieser Reihe ist

$$\frac{1.2.3...n}{(a+\vartheta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3....n(n+1)} \text{ oder } \left(\frac{x}{a+\vartheta x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$

Ist x kleiner als a, und folglich $\frac{x}{a}$ und ebenso $\frac{x}{a+\vartheta x}$ ein ächter Bruch, so wird der Werth von $\left(\frac{x}{a+\vartheta x}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$ mit wachsendem n fortwährend kleiner und nähert sich unbegrenzt dem Nullwerthe. Sobald also bei der Function lx das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall kleiner ist als der Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung statthat, so wird die ins Unendliche fortgesetzte berührende Function der Function lx adäquat sein. Daß in dem Falle, als x größer ist wie a, die berührende Function zuletzt immer stärker abweichen muß von der Berührten lx, kann man am leichtesten aus dem allgemeinen Gliede der obigen Reihe ableiten. Denn das nte Glied der Reihe ist $\left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$. Wie wenig auch $\left(\frac{x}{a}\right)$ größer sein möge als 1, so läßt sich doch ein so großer Werth von n denken, daß bei weiterem Wachsen des n der Factor $\left(\frac{x}{a}\right)^n$ in stärkerem Maße wächst als der Factor $\frac{1}{n}$ abnimmt. Von da an müssen also die einzelnen Glieder der Taylor'schen Reihe immer größer werden und unbegrenzt wachsen, und folglich muß auch die Abweichung der berührenden Function unbegrenzt wachsen.

Das Wichtigste würde nun ohne Zweifel sein, ein allgemeines Verfahren anzugeben, durch welches man bei solchen Functionen die Grenze bestimmen kann, innerhalb und außerhalb welcher der Restausdruck sich zuletzt nothwendig dem Nullwerthe oder dem Unendlichen nähert. Aber an einem solchen Verfahren fehlt es noch gänzlich, und die Aufsuchung dieser Grenzen wird bei den einzelnen Functionen, wo sie gelingt, bewerkstelligt durch Mittel, welche sich in der Regel nur speciell auf die der Untersuchung vorliegende Function beziehen, und sich im Wesentlichen nicht unterscheiden von den in der niederen Analysis gebräuchlichen

Mitteln der Unterſuchung der Convergenz oder Divergenz der Reihen. Da uns mit der Kenntniß dieſer Grenzen für einzelne Functionen nicht gedient ſein kann, ſo laſſen wir dieſe Unterſuchungen bei Seite, und bemerken nur noch, daß auch außerhalb dieſer Grenzen die berührende Function bis zu einem gewiſſen Berührungsgrade ſich dem Werthe der berührten Function ſehr wohl immer mehr nähern kann, und daß durch den obigen Satz nur das endliche Eintreten einer unbegrenzt wachſenden Abweichung behauptet wird, wie ja umgekehrt auch berührende Functionen, die ſich zuletzt nothwendig der berührten Function unbegrenzt nähern, in niederen Berührungsgraden immer ſtärker werdende Abweichungen zeigen können.

Da innerhalb gewiſſer Grenzen des vom Berührungspunkte aus genommenen Intervalles bei allen Functionen durch in höheren Graden berührende Functionen eine unbegrenzte Annäherung an den Functionswerth erzielt werden kann, ſo wird man in allen den Fällen, in welchen man nur die Veränderung beſtimmen will, die eine Function innerhalb eines beliebig kleinen von einem gegebenen Punkte aus genommenen Intervalles erleidet, ohne Weiteres die Taylor'ſche Reihe gebrauchen können, und es wird unbedingt geſtattet ſein, jeder beliebigen Function die durch die Taylor'ſche Reihe gegebene Potenzenreihe zu ſubſtituiren, wobei aber, wie ſich von ſelbſt verſteht, immer vorausgeſetzt iſt, daß die Differentialquotienten der berührten Function, ſo viel man deren nimmt, im Berührungspunkte endliche Werthe haben. Will man z. B. wiſſen, ob eine Function für einen gewiſſen Werth a der willkürlich Veränderlichen einen größten Werth annimmt, ſo kommt es nur darauf an, zu wiſſen, ob es vor und nach dem Werthe a ein wie klein auch immer zu nehmendes Intervall gibt, für deſſen ſämmtliche Punkte die Function kleinere Werthe hat als für den Punkt a. Dieſe Frage kann alſo nicht blos für jeden einzelnen Werth einer beliebigen Function durch die Taylor'ſche Reihe entſchieden werden, ſondern es können auch aus der Betrach-

tung der Taylor'schen Reihe allgemeingültige Regeln über die Bedingungen des Vorhandenseins eines größten Functionswerthes aufgestellt werden. Ein ähnlicher Fall der Untersuchung ist es, wenn man von zwei Linien, die in irgend einem Punkte eine gemeinschaftliche Ordinate haben, und die sich dabei in einem beliebigen Grade berühren mögen, entscheiden will, ob bei diesem Zusammentreffen die Eine auf derselben Seite der Andern bleibt, oder ob beide Linien sich kreuzen. Hier ist nur zu bestimmen, ob es vor oder nach dem Punkte des Zusammentreffens Intervalle, wenn auch beliebig kleine, gibt, innerhalb derer die Ordinate der einen Linie größere Werthe hat als die der andern, oder ob die Ordinate der einen Linie in dem ersten Intervalle größere und in dem zweiten kleinere Werthe hat als die Ordinate der andern. In sofern nun vorausgesetzt wird, daß die Differentialquotienten beider Functionen, so viel man deren nimmt, für den Punkt des Zusammentreffens endliche Werthe haben, können durch die Taylor'sche Reihe allgemeingültige Regeln aufgestellt werden darüber, ob die in irgend einem Grade sich berührenden Linien im Punkte des Zusammentreffens sich kreuzen oder nicht.

Es ist bisher immer nur von der Taylor'schen Reihe und dem Restausdrucke derselben die Rede gewesen, und man könnte fragen, unter welchen Bedingungen die übrigen Reihen, die sämmtlich Ausdrücke einer in einem höheren Grade berührenden und in demselben Grade gleichmäßig wachsenden Function sind, eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function gestatten. Man wird aber bemerken, daß die bei Zugrundelegung der Taylor'schen Reihe gefundenen Resultate mit der Natur dieser Reihe speciell nichts zu schaffen haben. Denn die Vorstellung einer im nten Grade berührenden und im $(n+1)$ten Grade gleichmäßig wachsenden Function, deren constante Stärke des Wachsens mit derjenigen Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade der berührten Function, welche für das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall die

durchſchnittliche iſt, zuſammenfällt, aus welcher Vorſtellung der Reſtausdruck der Taylor'ſchen Reihe abgeleitet war, läßt ſich unverändert auf alle Ausdrücke einer in einem höheren Grade gleichmäßig wachſenden und berührenden Function übertragen; und da die Betrachtung des Reſtausdruckes der Taylor'ſchen Reihe nur auf die Beſchaffenheit der Differentialquotienten der berührten Function als auf das Weſentliche, wovon die Annäherung abhängt, geführt hat, ſo ſieht man, daß alle Ausdrücke für ſolche berührende Functionen eine unbegrenzte Annäherung an die berührte geſtatten werden, entweder für jedes oder nur für ein innerhalb gewiſſer Grenzen genommenes Intervall genau unter denſelben Umſtänden, unter welchen die Taylor'ſche Reihe eine ſolche Annäherung geſtattet.

Das Reſultat der Unterſuchungen dieſes Paragraphen können wir in folgenden Satz zuſammenfaſſen: Unter der Vorausſetzung, daß eine Function und ihre ſämmtlichen Differentialquotienten innerhalb eines Intervalles keine Unterbrechung ihrer Stetigkeit erleiden, werden die in höheren Graden berührenden und in denſelben Graden gleichmäßig wachſenden Functionen bei gehöriger Steigerung des Berührungsgrades zuletzt immer eine unbegrenzte Annäherung an den Werth der berührten Function liefern für jedes beliebige Intervall der willkürlich Veränderlichen, ſobald entweder die Differentialquotienten ſelbſt oder die verhältnißmäßigen Vergrößerungen der aufeinander folgenden Differentialquotienten bei beliebig hoher Rangzahl in angebbaren endlichen Grenzen bleiben, und dieſe berührenden Functionen werden nur für ein innerhalb gewiſſer Grenzen zu nehmendes Intervall eine unbegrenzte Annäherung geſtatten, wenn die verhältnißmäßige Vergrößerung eines folgenden Differentialquotienten mit ſteigender Rangzahl unbegrenzt wächſt.

§. 134.

Der Cauchy'sche Restausdruck.

Cauchy hat noch eine andere Form des Restes der Taylor'schen Reihe auf einem etwas künstlichen Wege abgeleitet. Nicht wegen der Wichtigkeit der Sache selbst, sondern weil dieser Restausdruck in alle neueren Lehrbücher der Differentialrechnung übergegangen und neben dem Lagrange'schen in Gebrauch gekommen ist, wollen wir denselben hier kurz entwickeln. Die Cauchy'sche Ableitung läuft ungefähr auf Folgendes hinaus: Bezeichnet man den Rest der bis zum nten Gliede fortgesetzten Taylor'schen Reihe durch R, so hat man

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{(x-a)^2}{1.2}\ldots\ldots$$
$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}+R.$$

Wenn der Werth a der willkürlich Veränderlichen, für welchen die Berührung stattfindet, wie gewöhnlich zwar unbestimmt aber unveränderlich genommen wird, und die Zahl x als veränderlich, so kann man den Rest als eine Function von x oder von dem Intervalle x — a betrachten. Wenn wir aber, was auch gestattet ist, die Zahl x als unveränderlich annehmen, und die Zahl a als veränderlich, so wird, da in diesem Falle für jeden andern Werth von a auch der Werth des Restes ein anderer werden muß, der Restausdruck auch als eine Function von a betrachtet werden können. Es mögen die Ordinaten der Linie efg (Fig. 66) die durch die Taylor'sche Reihe zu berechnende Function, das Abscissenstück bd möge die Zahl x und das Stück bc die Zahl a vorstellen. Wenn man nun bei unveränderlichem Werthe von bd den Punkt c, für welchen die im nten Grade berührende Linie ihren Berührungspunkt hat, verschiebbar setzt, so wird es für jeden andern Werth von bc oder der Zahl a einen andern Werth des Restes geben, um welchen die im nten Grade gleichmäßig wachsende und

im nten Grade berührende Function von dem festen Werth dg oder f(x) abweicht. Die bei dieser Verschiebung des Berührungspunktes hervortretenden Eigenschaften der den Rest angebenden Function hat Cauchy zur Entwicklung dieser Function benutzt.

In sofern wir in der obigen Reihe die Zahl a veränderlich setzen, haben wir die Werthe, welche die Differentialquotienten der Function f(x) für einen beliebigen Werth a annehmen, durch $\frac{df(a)}{da}$, $\frac{d^2f(a)}{da^2}$ u. s. w. zu bezeichnen. Stellen wir die Function von a, welche dem R der obigen Gleichung gleich sein soll, durch $\varphi(a)$ vor, und bezeichnen wir x als eine Constante durch C, so nimmt die obige Gleichung folgende Form an:

$$f(C)=f(a)+\frac{df(a)}{da}\cdot\frac{C-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{da^2}\cdot\frac{(C-a)^2}{1.2}\ldots + \frac{d^nf(a)}{da^n}\cdot\frac{(C-a)^n}{1.2....n}+\varphi(a).$$

Wenn wir a so weit wachsen lassen, daß es gleich C wird, so ist, wie die Gleichung zeigt, der Restausdruck gleich Null. Wir haben also $\varphi(C)=0$ zu setzen. Bilden wir aus der vorliegenden Gleichung durch Transposition die Gleichung

$$\varphi(a)=f(C)-f(a)-\frac{df(a)}{da}\cdot\frac{C-a}{1}-\frac{d^2f(a)}{da^2}\cdot\frac{(C-a)^2}{1.2}\ldots - \frac{d^nf(a)}{da^n}\cdot\frac{(C-a)^n}{1.2....n}$$

und nehmen wir beiderseits die Differentialquotienten nach a als willkürlich Veränderliche, so werden, wenn man auf den Gliedern $\frac{df(a)}{da}\cdot\frac{C-a}{1}$, $\frac{d^2f(a)}{da^2}\cdot\frac{(C-a)^2}{1.2}$ u. s. w., als Producten zweier Functionen von a betrachtet, nach den bekannten Regeln die Differentialquotienten nimmt, auf der rechten Seite der Gleichung alle Glieder sich gegenseitig aufheben, und es wird nur der Ausdruck $-\frac{(C-a)^n}{1.2....n}\cdot\frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}}$

als der Differentialquotient der rechten Seite der Gleichung übrig bleiben, und man erhält die Gleichung

$$\frac{d\varphi(a)}{da} = -\frac{(C-a)^n}{1.2.3...n} \cdot \frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}}.$$

Läßt man a bis zum Werthe C wachsen, so wird, wie diese letzte Gleichung zeigt, der Differentialquotient der Function $\varphi(a)$ gleich Null, oder es ist $\frac{d\varphi(C)}{da} = 0$. Mit dem Wachsen des Intervalles C—a, d. h. mit dem Abnehmen des a wird im Allgemeinen ein Wachsen der Function $\varphi(a)$ verbunden sein. Wir können uns die Werthe der Function $\varphi(a)$, von der wir wissen, daß sie selbst und ihr erster Differentialquotient im Punkte d (Fig. 66) gleich Null ist, durch die Ordinaten einer Linie, wie etwa der Linie dhi versinnlichen. Die Stärke des Wächsens im ersten Grade der Function $\varphi(a)$ hat in irgend einem zwischen den Punkten c und d gelegenen Punkte ihren für das Intervall C—a durchschnittlichen Werth. Wenn wir den Werth der Abscisse, für welchen dieser durchschnittliche Werth statthat, durch $a+\vartheta_1(C-a)$ bezeichnen, wobei ϑ_1 zwischen den Grenzen von 0 und 1 zu denken ist, so können wir die einem beliebigen Werthe a zugehörige Ordinate ch oder $\varphi(a)$ nach §. 132 ausdrücken durch den Einzelwerth $\varphi(C)$ und den mit dem Intervalle C—a multiplicirten Durchschnittswerth der Stärke des Wachsens der Function $\varphi(a)$. Und da hier C größer ist als a, so erhalten wir, indem wir die Regel des §. 132 für ein von dem festen Werthe C aus rückwärts genommenes Intervall modificiren,

$$\varphi(a) = \varphi_1(C) - \frac{d\varphi[a+\vartheta_1(C-a)]}{da} \cdot (C-a).$$

Es ist aber, wie oben gezeigt, $\varphi(C)=0$, und folglich

$$\varphi(a) = -\frac{d\varphi[a+\vartheta_1(C-a)]}{da} \cdot (C-a).$$

Da hier $\varphi(a)$ durch einen gewissen Werth des Differentialquotienten von $\varphi(a)$ ausgedrückt erscheint, und der Diffe-

rentialquotient $\frac{d\varphi a}{da}$ schon oben auf einen Differentialquotienten von f(a) zurückgebracht ist, so können wir auch $\varphi(a)$ durch einen Differentialquotienten von f(a) ausdrücken. Setzen wir, da der obige für $\frac{d\varphi(a)}{da}$ gegebene Ausdruck für jeden Werth der Veränderlichen a gilt, in diesem Ausdrucke statt a den Werth $a+\vartheta_1(C-a)$, so haben wir

$$\frac{d\varphi[a+\vartheta_1(C-a)]}{da}=\frac{[C-a-\vartheta_1(C-a)]^n}{1.2.3.....n}\cdot\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}.$$

Substituiren wir nun in dem für $\varphi(a)$ gefundenen Ausdrucke statt $\frac{d\varphi[a+\vartheta_1(C-a)]}{da}$ den gleichgeltenden Werth, so haben wir

$$\varphi(a)=\frac{[C-a-\vartheta_1(C-a)]}{1.2.3....n}\cdot\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}.(C-a)$$

da statt $[C-a-\vartheta_1(C-a)]^n$ auch geschrieben werden kann $[(C-a)(1-\vartheta_1)]^n$ oder $(C-a)^n.(1-\vartheta_1)^n$, so ist auch

$$\varphi(a)=\frac{(C-a)^{n+1}.(1-\vartheta_1)^n}{1.2.3....n}\cdot\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}$$

und diese Form ist es, welche Cauchy dem Restausdruck der Taylor'schen Reihe gegeben hat. Indem wir in unsere obige ursprüngliche Gleichung statt $\varphi(a)$ diesen Restausdruck setzen, haben wir

$$f(C)=f(a)+\frac{df(a)}{da}\cdot\frac{(C-a)}{1}+\frac{d^2f(a)}{da^2}\cdot\frac{(C-a)^2}{1.2}+....$$
$$+\frac{d^nf(a)}{da^n}\cdot\frac{(C-a)^n}{1.2.3....n}+\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(C-a)]}{da^{n+1}}$$
$$\cdot\frac{(1-\vartheta_1)^n.(C-a)^{n+1}}{1.2.3....n}.$$

Da C zwar im Laufe der gegebenen Entwickelung als constant angesehen worden ist, übrigens aber einen ganz beliebigen Zahlenwerth vorstellt, so kann man in dem gefundenen Resultate auch C wieder als die willkürlich Veränderliche betrachten, und als den beliebigen aber einzelnen Werth der willkürlich Veränderlichen, für welchen die B-

rührung der Functionen stattfindet, und indem man wieder den Buchstaben x statt C setzt, erhält man

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x-a}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots.n}+\frac{d^{n+1}f[a+\vartheta_1(x-a)]}{dx^{n+1}}$$
$$\cdot\frac{(1-\vartheta_1)^n.(x-a)^{n+1}}{1.2.3\ldots n}.$$

Drücken wir endlich das vom Berührungspunkte aus genommene Intervall der willkürlich Veränderlichen durch den einfachen Buchstaben x aus, und folglich die ganze willkürlich Veränderliche durch $a+x$, so haben wir

$$f(a+x)=f(a)+\frac{df(a)}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2f(a)}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\ldots.$$
$$+\frac{d^nf(a)}{dx^n}\cdot\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta_1x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{(1-\vartheta_1)^n.x^{n+1}}{1.2.3\ldots.n}.$$

Der Lagrange'sche Restausdruck ist

$$\frac{d^{n+1}f(a+\vartheta x)}{dx^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}.$$

Die Abweichung beider Formen erklärt sich daraus, daß ϑ in dem Lagrange'schen Restausdruck eine andere Zahl bedeutet, als ϑ_1 in dem Cauchy'schen. Denn $a+\vartheta x$ stellt den Werth der willkürlich Veränderlichen vor, bei welchem die Stärke des Wachsens im $(n+1)$ten Grade der Function $f(a+x)$ ihren für das Intervall x durchschnittlichen Werth hat, und $a+\vartheta_1x$ stellt den Werth der willkürlich Veränderlichen vor, bei welchem die Stärke des Wachsens im ersten Grade der den Rest angebenden Function $\varphi(a)$ ihren für das Intervall x durchschnittlichen Werth hat. Es ist keine Kunst, durch Veränderung der Bedeutung des Buchstabens ϑ noch andere Formen des Restausdruckes der Taylor'schen Reihe zu finden. Da sie aber alle im Wesentlichen auf die Form des Lagrange'schen hinauslaufen, indem sie aus zwei Factoren bestehen, von denen der Eine einen einzelnen Werth eines höheren Differentialquotienten der Function $f(a+x)$, und der Andere eine Potenz des Intervalles x, dividirt

durch das Product der natürlichen Zahlenreihe, darstellt, so läßt sich kein Nutzen dieser unwesentlichen Modificationen des Restausdruckes absehen.

Elftes Capitel.

Von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachsens in allen Graden.

§. 135.

Von dem Zeichenwechsel der Functionen und ihrer Differentialquotienten.

Einen Gegenstand von allgemeinerer Bedeutung für das Wesen der Differentialrechnung bilden noch die in dem Fluß einer Function vorkommenden Uebergänge aus einer Art des Wachsens in die andere. Wie wir aus dem Früheren (§. 124) wissen, sind alle Arten des Wachsens bestimmt durch die Vorzeichen der successiven Differentialquotienten, und mithin kann ein Uebergang aus Einer Art des Wachsens in eine Andere nur vorkommen, wo ein Differentialquotient sein Vorzeichen wechselt. Wir haben demnach den Wechsel der Vorzeichen der Differentialquotienten und die damit verbundenen Eigenthümlichkeiten des Wachsens ins Auge zu fassen. Eigentlich kann ein Zeichenwechsel bei einem Ausdrucke nur eintreten, wenn eine Function einer Veränderlichen, als Bestandtheil dieses Ausdruckes, bei irgend einem Werthe der Veränderlichen durch den Nullwerth hindurchgeht, und dabei aus positiven in negative Werthe oder umgekehrt übergeht. Da aber in dem Falle, als eine Function einer Veränderlichen in Form eines Quotienten zweier Functionen gegeben ist, diejenige Function, welche den Nenner bildet, mit Zeichenwechsel durch den Nullwerth gehen kann, ohne daß der Zähler gleich Null

wird, so wird der Quotient oder die Gesammtfunction ihr Vorzeichen wechseln, und mit diesem Zeichenwechsel ein unendlich großer Functionswerth verbunden sein. Wir haben also in Betreff des Zeichenwechsels der Functionen zwei Fälle zu betrachten, den Durchgang des Functionswerthes durch Null und durch das Unendliche.

Obschon nun eine Function nur bei dem Durchgange durch Null oder das Unendliche ihr Vorzeichen wechseln kann, so kann sie doch natürlich auch ohne Zeichenwechsel diese Werthe passiren. Wenn eine Function den Werth Null oder unendlich mit positiven Werthen erreicht, und auch mit positiven Werthen wieder verläßt, oder wenn eine Function in den Werth Null oder unendlich mit negativen Werthen eintritt, und mit negativen Werthen austritt, so wollen wir sagen, daß die Function einstimmig durch Null oder das Unendliche fortschreitet. Erreicht hingegen eine Function den Werth Null oder unendlich mit positiven Werthen, und verläßt sie dieselben mit negativen Werthen, oder tritt sie mit negativen Werthen in dieselben ein, und mit positiven heraus, so sagen wir, die Function schreitet entgegengesetzt durch Null oder unendlich fort. Obgleich eine Function in dem Momente, wo sie den Nullwerth annimmt, weder positiv noch negativ zu nennen ist, so sagen wir doch bei dem einstimmigen Durchgange durch Null kurzweg, die Function schreitet positiv oder negativ durch den Nullwerth, je nachdem die Functionswerthe vor und nach dem Durchgange durch Null positiv oder negativ sind. Ob eine Aenderung in der Art des Wachsens irgend eines Grades bei dem Durchgange des Werthes eines Differentialquotienten durch Null oder unendlich eintritt oder nicht, das wird immer davon abhängen, ob ein solcher Differentialquotient entgegengesetzt oder einstimmig durch Null oder unendlich fortschreitet, weil nur der Zeichenwechsel eines Differentialquotienten eine Aenderung der Art des Wachsens hervorbringen kann.

In Bezug auf den Zusammenhang, welcher zwischen

dem Functionswerthe und dem Werthe des erſten Differentialquotienten ſtattfindet bei dem Durchgange des Functionswerthes durch Null oder unendlich, unterſcheiden ſich dieſe beiden Durchgänge weſentlich von einander. Bei dem Durchgange eines Functionswerthes durch das Unendliche hat der Differentialquotient dieſer Function nothwendig auch einen unendlichen Werth. Dies folgt daraus, daß, ſobald der Differentialquotient einer Function innerhalb eines Intervalles und im Endpunkte dieſes Intervalles durchaus endliche Werthe hat, die Function keinen unendlich großen Werth im Endpunkte des Intervalles annehmen kann. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht. Denn der Differentialquotient einer Function kann in einem Intervalle wohl maßlos wachſen, und im Endpunkte deſſelben unendlich groß werden, ohne daß die Function einen unendlich großen Werth erreicht. Betrachten wir hingegen den Durchgang eines Functionswerthes durch Null, ſo kann der Differentialquotient dieſer Function dabei ſowol den Nullwerth, als einen endlichen Werth, als auch einen unendlichgroßen Werth annehmen. Mag der Functionswerth einſtimmig oder entgegengeſetzt durch Null gehen, ſo kann in beiden Fällen der Differentialquotient gleich Null ſein, wie der Differentialquotient der Ordinaten der Linie uai (Fig. 50) im Punkte a, oder der Differentialquotient der Ordinaten der Linie fgchi (Fig. 56) im Punkte c, und in beiden Fällen kann der Differentialquotient unendlich ſein, wie der Differentialquotient der Ordinaten der Linie decfg (Fig. 67) im Punkte c, oder der Differentialquotient der Ordinaten der Linie abcde (Fig. 68) im Punkte c. Einen endlichen Werth hingegen kann der Differentialquotient einer durch den Nullwerth fortſchreitenden Größe nur haben, wenn der Functionswerth entgegengeſetzt durch Null geht. Denn wäre die Function einſtimmig durch Null gegangen, ſo hätte ſie, wenn ſie poſitiv war, vor dem Nullwerthe abgenommen und nachher zugenommen, und wenn ſie negativ war, vor dem Nullwerthe zugenommen und nachher abgenommen, und in beiden

Fällen hätte der Differentialquotient sein Vorzeichen gewechselt, konnte also bei diesem Wechsel nur den Werth Null oder unendlich, aber keinen endlichen Werth haben.

Da in Bezug auf den Zusammenhang des Functionswerthes und des Werthes des ersten Differentialquotienten der Durchgang des Functionswerthes durch das Unendliche sich einfacher erweist, als der Durchgang durch Null, so lassen wir die Betrachtung des ersten Durchganges vorangehen. Daraus, daß beim Durchgange einer Function durch das Unendliche auch der Differentialquotient dieser Function unendlich wird, folgt selbstverständlich, daß wenn ein Differentialquotient irgend einer Rangzahl für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich groß wird, alle folgenden Differentialquotienten für denselben Werth der willkürlich Veränderlichen ebenfalls unendlich groß werden. Bei allen den folgenden Sätzen, welche von dem Uebergange der Functionen aus positiven Werthen in negative oder dem umgekehrten Uebergange handeln, ist immer vorausgesetzt, daß die Veränderungen der willkürlich Veränderlichen durch Zusetzung von positiven Incrementen hervorgebracht werden, und in diesem Sinne das Fortschreiten der Functionswerthe zu nehmen ist, mag nun die willkürlich Veränderliche positive oder negative Werthe haben.

In Betreff der für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werdenden Functionen und ihrer ersten Differentialquotienten gelten folgende Sätze:

1) Geht für einen gewissen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen eine Function einstimmig durch das Unendliche, so geht der Differentialquotient dieser Function für denselben Werth der willkürlich Veränderlichen entgegengesetzt durch das Unendliche.

Da die Function, wenn sie mit positiven Werthen durch das Unendliche geht, vor diesem Durchgange gewachsen ist, und nachher abgenommen hat, so ist der Differentialquotient derselben aus positiven in negative Werthe durch das Unendliche übergegangen, und da ferner die

Function, wenn sie mit negativen Werthen durch das Unendliche geht, vorher abgenommen und nachher zugenommen hat, so ist der Differentialquotient derselben aus negativen Werthen in positive durch das Unendliche übergegangen. Beispiel einer solchen Function sind die Ordinaten der Linie fghikl (Fig. 69), welche nach der Ordinatengleichung $y = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ gebildet ist, und für $x = o$ oder im Punkte c der Figur mit positiven Werthen durch das Unendliche geht.

2) Geht eine Function entgegengesetzt durch das Unendliche, so geht ihr Differentialquotient einstimmig durch das Unendliche, und zwar wird der Differentialquotient, wenn die Function aus positiven in negative Werthe übergeht, positiv unendlich, und wenn die Function aus negativen in positive Werthe übergeht, negativ unendlich.

Hat nämlich eine Function das Unendliche mit positiven Werthen erreicht, und tritt sie mit negativen aus demselben heraus, so sind erst die positiven Werthe immer größer und dann die negativen immer kleiner geworden, und in beiden Fällen ist der Differentialquotient dieser Function positiv. Hat aber umgekehrt eine Function das Unendliche mit wachsenden negativen Werthen erreicht, und verläßt sie dasselbe mit abnehmenden positiven, so ist in beiden Fällen der Differentialquotient dieser Function negativ. Beispiel einer solchen Function ist die Ordinate der Linie abcdef (Fig. 70), welche nach der Ordinatengleichung $y = \frac{1}{1-x}$ gebildet ist, im Punkte h den Nullpunkt der Abscisse hat, und für $x = 1$ oder im Punkte g der Abscisse entgegengesetzt durch das Unendliche geht.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt zunächst, daß die successiven Differentialquotienten, wenn sie für einen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werden, in Bezug auf die Einstimmigkeit oder Entgegensetzung, mit

welcher sie durch das Unendliche hindurchgehen, regelmäßig abwechseln. In sofern man eine Regel haben will, nach welcher man aus der Beschaffenheit eines für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werdenden Differentialquotienten auf den zugehörigen Werth der Function oder auf die Natur des Wachsens derselben zurückschließen kann, so wird man aus den beiden vorhergehenden Sätzen leicht die folgenden beiden ableiten:

3) Geht ein Differentialquotient entgegengesetzt durch das Unendliche, und zwar aus positiven Werthen in negative, so geht die Function, wenn sie unendlich ist, mit positiven Werthen durch das Unendliche, und wenn sie endlich ist, aus dem Wachsen ins Abnehmen über, und erlangt einen relativ größten Werth. Geht aber der Differentialquotient durch das Unendliche aus negativen in positive Werthe über, so geht die Function, wenn sie unendlich ist, bei diesem Uebergange, durch das negativ Unendliche, und wenn sie endlich ist, aus dem Abnehmen ins Wachsen über und erreicht einen relativ kleinsten Werth.

4) Geht der Differentialquotient einer Function einstimmig durch das Unendliche, so geht die Function, wenn sie unendlich ist, bei diesem Uebergang entgegengesetzt durch das Unendliche, und wenn sie endlich ist, nicht aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über, vielmehr wird die Function, wenn der Differentialquotient durch das positiv Unendliche geht, vor und nach diesem Durchgange wachsen, und wenn der Differentialquotient durch das negativ Unendliche geht, vor und nach diesem Durchgange abnehmen.

Was den Zeichenwechsel der Functionen und ihrer ersten Differentialquotienten bei dem Durchgange durch den Nullwerth betrifft, so gelten darüber folgende Sätze:

5) Geht für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen eine Function einstimmig durch Null, so muß der Differentialquotient dieser Function bei diesem Durchgange sein Vorzeichen wechseln, und derselbe

Function, wenn ſie mit negativen Werthen durch das Un endliche geht, vorher abgenommen und nachher zugenom men hat, ſo iſt der Differentialquotient derſelben aus n gativen Werthen in poſitive durch das Unendliche übergegangen. Beiſpiel einer ſolchen Function ſind die Ordinaten der Linie fghikl (Fig. 69), welche nach der Ordinatengleichung $y = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ gebildet iſt, und für $x=o$ oder im Punkte c der Figur mit poſitiven Werthen durch das Unendliche geht.

2) Geht eine Function entgegengeſetzt durch das Unendliche, ſo geht ihr Differentialquotient einſtimmig durch das Unendliche, und zwar wird der Differentialquotient, wenn die Function aus poſitiven in negative Werthe übergeht, poſitiv unendlich, und wenn die Function aus negativen in poſitive Werthe übergeht, negativ unendlich.

Hat nämlich eine Function das Unendliche mit poſitiven Werthen erreicht, und tritt ſie mit negativen aus derſelben heraus, ſo ſind erſt die poſitiven Werthe immer größer und dann die negativen immer kleiner geworden, es in beiden Fällen iſt der Differentialquotient dieſer Function poſitiv. Hat aber umgekehrt eine Function das Unendliche mit wachſenden negativen Werthen erreicht, und verläßt dasſelbe mit abnehmenden poſitiven, ſo iſt in beiden Fällen der Differentialquotient dieſer Function negativ. Beiſpiel einer ſolchen Function iſt die Ordinate der Linie abcd (Fig. 70), welche nach der Ordinatengleichung $y=\frac{1}{1-x}$ gebildet iſt, im Punkte h den Nullpunkt der Abſciſſe hat und für $x=1$ oder im Punkte g der Abſciſſe entgegengeſetzt durch das Unendliche geht.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt zuerſt daß die ſucceſſiven Differentialquotienten, wenn ſie für einen Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werden, in Bezug auf die Einſtimmigkeit oder Entgegenſetzung, mit

welcher ſie durch das Unendliche hindurchgehen, regelmäßig abwechſeln. In ſofern man eine Regel haben will, nach welcher man aus der Beſchaffenheit eines für einen beſtimmten Werth der willkürlich Veränderlichen unendlich werdenden Differentialquotienten auf den zugehörigen Werth der Function oder auf die Natur des Wachſens derſelben zurückſchließen kann, ſo wird man aus den beiden vorhergehenden Sätzen leicht die folgenden beiden ableiten:

3) Geht ein Differentialquotient entgegengeſetzt durch das Unendliche, und zwar aus poſitiven Werthen in negative, ſo geht die Function, wenn ſie unendlich iſt, mit poſitiven Werthen durch das Unendliche, und wenn ſie endlich iſt, aus dem Wachſen ins Abnehmen über, und erlangt einen relativ größten Werth. Geht aber der Differentialquotient durch das Unendliche aus negativen in poſitive Werthe über, ſo geht die Function, wenn ſie unendlich iſt, bei dieſem Uebergange, durch das negativ Unendliche, und wenn ſie endlich iſt, aus dem Abnehmen ins Wachſen über und erreicht einen relativ kleinſten Werth.

4) Geht der Differentialquotient einer Function einſtimmig durch das Unendliche, ſo geht die Function, wenn ſie unendlich iſt, bei dieſem Uebergang entgegengeſetzt durch das Unendliche, und wenn ſie endlich iſt, nicht aus dem Wachſen ins Abnehmen oder umgekehrt über, vielmehr wird die Function, wenn der Differentialquotient durch das poſitiv Unendliche geht, vor und nach dieſem Durchgange wachſen, und wenn der Differentialquotient durch das negativ Unendliche geht, vor und nach dieſem Durchgange abnehmen.

Was den Zeichenwechſel der Functionen und ihrer erſten Differentialquotienten bei dem Durchgange durch den Nullwerth betrifft, ſo gelten darüber folgende Sätze:

5) Geht für einen beſtimmten Werth der willkürlich Veränderlichen eine Function einſtimmig durch Null, ſo muß der Differentialquotient dieſer Function bei dieſem Durchgange ſein Vorzeichen wechſeln, und derſelbe

wird alſo entgegengeſetzt durch Null oder das Unendliche gehen.

Haben nämlich die poſitiven Werthe der Function bis zu Null abgenommen und dann zugenommen, ſo iſt der Differentialquotient vor dem Nullwerthe der Function negativ und nachher poſitiv, und haben die negativen Werthe der Function bis zu Null abgenommen und ſich dann wieder vergrößert, ſo iſt der Differentialquotient vor dem Nullwerthe der Function poſitiv und nachher negativ. In beiden Fällen hat alſo der Differentialquotient bei dem Nullwerth der Function ſein Vorzeichen gewechſelt, und kann alſo ſelbſt nur gleich Null oder gleich unendlich ſein.

Aus dieſem Beweiſe des Satzes 5 folgt noch als nähere Beſtimmung deſſelben:

6) Geht eine Function mit poſitiven Werthen durch Null, ſo geht der Differentialquotient derſelben aus negativen Werthen in poſitive über, und geht die Function mit negativen Werthen durch Null; ſo geht der Differentialquotient aus poſitiven Werthen in negative über.

7) Geht bei einem beſtimmten Werthe der willkürlich Veränderlichen eine Function entgegengeſetzt durch Null, ſo kann der Differentialquotient dieſer Function keinesfalls ſein Vorzeichen wechſeln; derſelbe kann dabei im Allgemeinen jeden beliebigen Werth haben, wenn er aber gleich Null oder unendlich iſt, ſo geht er einſtimmig durch die Werthe.

Geht nämlich eine Function entgegengeſetzt durch Null, ſo hat ſie entweder bis zu Null abnehmende poſitive und dann zunehmende negative Werthe, und in dieſem Falle iſt der Differentialquotient vor und nach dem Uebergange negativ, oder ſie hat bis zu Null abnehmende negative und dann zunehmende poſitive Werthe, und dann iſt der Differentialquotient vor und nach dieſem Uebergange poſitiv.

Aus dieſem Beweiſe des Satzes 7 folgt als nähere Beſtimmung deſſelben zugleich:

8) Geht eine Function entgegengeſetzt durch Null an

positiven Werthen in negative, so ist der Differentialquotient bei diesem Uebergange negativ, und geht sie aus negativen in positive, so ist der Differentialquotient positiv.

Wenn man von einem durch den Nullwerth gehenden ersten Differentialquotienten einer Function auf die Natur des Wachsens dieser Function schließen will, so gelten darüber folgende Sätze:

9) Geht für einen bestimmten Werth der willkürlich Veränderlichen der erste Differentialquotient entgegengesetzt durch Null, so geht die Function bei diesem Durchgange aus dem Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt über, und zwar wird die Function aus dem Wachsen ins Abnehmen übergehen, wenn der Differentialquotient aus positiven Werthen in negative übergeht, und aus dem Abnehmen ins Wachsen, wenn der Differentialquotient aus negativen in positive Werthe übergeht.

Dieser Satz ist aus den früheren allgemeinen Lehren über die Bedeutung der positiven und negativen Werthe des ersten Differentialquotienten einleuchtend.

10) Geht der erste Differentialquotient einer Function einstimmig durch Null, so geht die Function weder aus dem Wachsen ins Abnehmen noch umgekehrt über; vielmehr wird, wenn der Differentialquotient mit positiven Werthen durch Null geht, die Function fortwährend wachsen, so lange der Differentialquotient positive Werthe hat, und fortwährend abnehmen, so lange der Differentialquotient negative Werthe hat.

Aus den Sätzen 5 und 7 folgt zunächst, daß, wenn mehrere aufeinanderfolgende Differentialquotienten für einen gewissen Werth der willkürlich Veränderlichen gleich Null werden, dieselben in Bezug auf die bei diesem Durchgange stattfindende Einstimmigkeit oder Entgegensetzung regelmäßig abwechseln.

Da in dem Falle, als eine Function einstimmig durch Null geht, der erste Differentialquotient, wenn er nicht unendlich ist, entgegengesetzt durch Null gehen muß, so kann

erſt der zweite Differentialquotient einen endlichen Werth haben. Iſt aber der zweite Differentialquotient ſelbſt gleich Null, in welchem Falle er nach Satz 7 einſtimmig durch Null geht, ſo muß der dritte Differentialquotient, wenn er nicht unendlich iſt, nach Satz 5 gleich Null ſein, und entgegengeſetzt durch Null gehen. Der vierte Differentialquotient kann dann zwar einen endlichen von Null verſchiedenen Werth haben; wenn er aber ſelbſt gleich Null iſt, und zwar alsdann nothwendig einſtimmig durch Null geht, ſo muß auch der fünfte Differentialquotient, wenn er nicht unendlich iſt, gleich Null ſein, und erſt der ſechſte Differentialquotient kann einen von Null verſchiedenen endlichen Werth haben. Dieſe Schlußweiſe läßt ſich ſo fortſetzen, und es ergibt ſich daraus folgender Satz:

11) Wenn eine Function einſtimmig durch Null geht, und es werden mehrere der nächſten aufeinanderfolgenden Differentialquotienten bei dieſem Uebergange gleich Null, ſo muß derjenige Differentialquotient, welcher zuerſt einen von Null verſchiedenen Werth annimmt, von gerader Ranggahl ſein.

Geht eine Function entgegengeſetzt durch Null, ſo kann der erſte Differentialquotient einen endlichen Werth haben. Iſt er aber ſelbſt gleich Null, und geht er mithin einſtimmig durch Null, ſo muß auch der zweite Differentialquotient, wenn er nicht etwa unendlich iſt, gleich Null ſein, und erſt der dritte Differentialquotient kann einen endlichen Werth haben. Iſt aber auch dieſer gleich Null, wobei er nothwendig einſtimmig durch Null geht, ſo muß auch der vierte Differentialquotient, wenn er nicht unendlich iſt, gleich Null ſein, und erſt der fünfte kann einen von Null verſchiedenen endlichen Werth annehmen. Auf dieſe Weiſe weiter ſchließend erhält man folgenden Satz:

12) Geht eine Function entgegengeſetzt durch Null, und ſind mehrere ihrer nächſten Differentialquotienten bei dieſem Uebergange gleich Null, ſo iſt derjenige Differentialquotient, welcher zuerſt einen von Null verſchiedenen endlichen Werth hat, von ungerader Ranggahl.

Es läßt ſich aus dem Vorzeichen, welches der zuerſt einen endlichen Werth annehmende Differentialquotient hat, auch ſchließen, mit welchem Vorzeichen, oder mit welchem Wechſel der Vorzeichen die Function durch Null geht. Denn geht die Function einſtimmig poſitiv durch Null, ſo geht nach Satz 6 der erſte Differentialquotient aus negativen Werthen in poſitive über durch Null. Der zweite Differentialquotient iſt in dieſem Falle nach Satz 8 poſitiv. Iſt er aber ſelbſt gleich Null, und folglich ſo gut als die urſprüngliche Function eine mit poſitiven Werthen durch Null hindurchgehende Größe, ſo iſt aus demſelben Grunde der vierte Differentialquotient poſitiv. Ebenſo iſt der ſechſte poſitiv, wenn etwa der vierte gleich Null war. Wenn eine Function einſtimmig negativ durch Null geht, ſo folgt aus den Sätzen 6 und 8 auf dieſelbe Weiſe, daß der zweite Differentialquotient negativ iſt bei dieſem Uebergange; iſt er aber ſelbſt gleich Null, ſo iſt auch der vierte negativ, und ſo weiter. Es ergibt ſich daraus folgender Satz:

13) Geht eine Function durch Null, und ſind mehrere ihrer nächſten Differentialquotienten bei dieſem Durchgange gleich Null, ſo geht die Function mit poſitiven oder mit negativen Werthen einſtimmig durch Null, je nachdem derjenige Differentialquotient von gerader Rangzahl, welcher zuerſt einen von Null verſchiedenen endlichen Werth annimmt, poſitiv oder negativ iſt.

Wenn eine Function beim Durchgange durch Null aus poſitiven Werthen in negative übergeht, ſo geht der erſte Differentialquotient, falls er gleich Null iſt, nach Satz 8 mit negativen Werthen durch Null, und mithin geht der zweite Differentialquotient nach Satz 6 aus poſitiven in negative Werthe über durch Null. Der dritte Differentialquotient iſt alſo negativ, und falls er ſelbſt gleich Null iſt, ſo iſt auch der fünfte negativ und ſo weiter. Geht aber eine Function beim Durchgange durch Null aus negativen Werthen in poſitive über, ſo geht der erſte Differentialquotient, falls er gleich Null iſt, nach Satz 8 mit poſiti-

ven Werthen durch Null, und mithin muß nach Satz 6 der zweite Differentialquotient aus negativen Werthen in positive übergehen. Der dritte Differentialquotient ist also wieder positiv, und wenn er durch Null geht, so ist aus demselben Grunde auch der fünfte positiv, und so weiter. Es folgt daraus

14) Gehen eine Function und mehrere ihrer nächsten Differentialquotienten durch Null, so geht die Function aus positiven Werthen in negative über, wenn derjenige Differentialquotient von ungerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, negativ ist, und die Function geht aus negativen Werthen in positive über, wenn derjenige Differentialquotient von ungerader Rangzahl, welcher zuerst einen von Null verschiedenen endlichen Werth annimmt, positiv ist.

Diese sämmtlichen Sätze über den Zusammenhang des Zeichenwechsels der Functionen und ihrer Differentialquotienten sind von mannichfachem Gebrauche, und es können durch dieselben viele Untersuchungen, welche man sonst durch Vergleichung von Formeln und Reihen führen muß, sehr abgekürzt werden. Es ergibt sich zugleich aus denselben, daß von den verschiedenen Arten des Wachsens irgend eines Grades nur einige ineinander übergehen können und andere nicht. Denn da z. B., sobald irgend ein Differentialquotient sein Vorzeichen wechselt, der folgende Differentialquotient keinen Zeichenwechsel erfahren kann, so werden alle Uebergänge der Arten des Wachsens irgend eines Grades, welche einen Zeichenwechsel dieses Grades und zugleich des vorhergehenden Grades voraussetzen, unmöglich sein. Welche Uebergänge überhaupt möglich sind, und welche nicht, wird aus den aufgestellten Sätzen ohne Schwierigkeit beantwortet werden können.

§. 136.

Aufsuchung der größten und kleinsten Werthe der Functionen.

Alle Untersuchungen über die Uebergangspunkte der Stärke des Wachsens irgend eines Grades können zurück-

geführt werden auf die Unterſuchung über den Uebergang aus dem Wachſen ins Abnehmen oder den umgekehrten Uebergang, indem eine Function oder irgend welche ihrer Differentialquotienten aus dem Wachſen ins Abnehmen oder umgekehrt übergehen müſſen, ſobald ein Uebergang aus einer Art des Wachſens in die andere ſtattfinden ſoll. Geht eine Function aus dem Wachſen ins Abnehmen über, ſo erreicht ſie einen relativ größten Werth, und geht ſie aus dem Abnehmen ins Wachſen über, ſo erlangt ſie einen relativ kleinſten Werth. Mithin bildet die Lehre von der Aufſuchung der größten und kleinſten Werthe der Functionen zugleich die Grundlage der Lehre von den Uebergängen der Arten des Wachſens. Es iſt zwar in dem erſten Theile dieſes Lehrbuchs in den Paragraphen 93 und 94 ſchon von den größten und kleinſten Werthen der Functionen die Rede geweſen. Aber es handelte ſich dort nur um eine vorläufige kurze Nachweiſung des Gebrauchs der Differentialrechnung zur Auflöſung ſolcher Aufgaben, und der Wichtigkeit dieſer Aufgaben. An dieſem Orte erſt kann das Verfahren vollſtändig angegeben werden, durch welches man alle größten und kleinſten Werthe einer Function findet, und durch welches die Entſcheidung, ob es größte oder kleinſte Werthe ſind, am leichteſten herbeigeführt werden kann. Es iſt noch zu bemerken, daß man, um den Regeln Kürze und Allgemeingültigkeit zu geben, einen relativ größten negativen Werth einer Function einen kleinſten, und einen relativ kleinſten negativen Werth einen größten nennt.

Eine Function kann aus dem Wachſen ins Abnehmen oder umgekehrt nur übergehen, wenn der Differentialquotient derſelben aus poſitiven Werthen in negative oder umgekehrt übergeht. Der Differentialquotient muß alſo nothwendig durch Null oder durch das Unendlichgroße hindurchgehen. Da aber der Differentialquotient auch einſtimmig durch Null oder das Unendliche gehen kann, und in dieſem Falle die Function niemals aus dem Wachſen ins Abneh-

annimmt, poſitiv, ſo geht der erſte Differentialquotient (nach Satz 14 §. 135) aus negativen Werthen in poſitive über, und die Function geht aus dem Abnehmen ins Wachſen über, und durchläuft einen kleinſten Werth.

Da wir früher (§. 94) ſchon angewandte Aufgaben aus der Lehre von den größten und kleinſten Werthen der Functionen gelöſt haben, ſo wollen wir hier nur noch einige Functionen, die ohne Beziehung zu beſtimmten Aufgaben beliebig genommen ſind, auf ihre größten oder kleinſten Werthe unterſuchen. Es ſollen die Werthe von x beſtimmt werden, bei welchen die Function $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ größte und kleinſte Werthe annimmt. Der erſte Differentialquotient dieſer Function iſt $\frac{-2x}{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$, und der zweite iſt $\frac{-(6+2x^2)}{9(1-x^2)^{\frac{5}{3}}}$. Der erſte Differentialquotient wird gleich Null, wenn der Zähler $2x$ gleich Null iſt, alſo für $x=0$, und wird unendlich, wenn der Nenner $3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$ gleich Null wird. Aus der Gleichung $3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}=0$, oder $1-x^2=0$ folgt $x=+1$ und $x=-1$. Alſo können bei den drei Werthen -1, 0 und $+1$ möglicherweiſe größte und kleinſte Werthe der Function $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ eintreten. Für $x=0$ hat der erſte Differentialquotient einen endlichen von Null verſchiedenen Werth, und folglich geht der erſte Differentialquotient entgegengeſetzt durch Null, und die Function erreicht einen größten oder kleinſten Werth. Da aber dieſer Werth des zweiten Differentialquotienten negativ iſt, nämlich $=-\frac{2}{3}$, ſo iſt für $x=0$ der Functionswerth ein Maximum. Für $x=+1$ und $x=-1$ geht die Function $3(1-x^2)$ weil ſie ein Quadrat iſt, einſtimmig durch Null, und folglich geht der erſte Differentialquotient einſtimmig durch Unendliche, die Function erreicht alſo weder einen größ

noch einen kleinſten Werth. Für $x=-1$ geht der erſte Differentialquotient mit poſitiven Werthen durch das Unendliche, und für $x=+1$ mit negativen. Der zweite Differentialquotient wechſelt, wie ſich von ſelbſt verſteht, ſein Vorzeichen bei dieſen Werthen von x, und geht für $x=-1$ aus poſitiven Werthen in negative, und für $x=+1$ aus negativen Werthen in poſitive über. Stellt man die Function $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$ durch Coordinaten einer Linie dar, ſo erhält man die Linie ebdcf (Fig. 71), bei welcher in a der Nullpunkt, in b der Werth -1 und in c der Werth $+1$ der Abſciſſe geſetzt iſt.

Nehmen wir noch die Function

$$2+(x^3-3x^2+2x)^{\frac{2}{3}}$$

und unterſuchen dieſelbe auf ihre größten oder kleinſten Werthe. Der erſte Differentialquotient derſelben iſt,

$$\frac{2(3x^2-6x+2)}{3(x^3-3x^2+2x)^{\frac{1}{3}}}$$

und der zweite iſt

$$\frac{36(x^3-3x^2+2x)(x-1)-2(3x^2-6x+2)^2}{9(x^3-3x^2+2x)^{\frac{4}{3}}}.$$

Der erſte Differentialquotient wird Null, wenn der Zähler $2(3x^2-6x+2)$ gleich Null iſt. Aus der Gleichung

$$3x^2-6x+2=0$$

folgt $x=1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $x=1-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Der erſte Differentialquotient wird ferner unendlich groß, wenn der Nenner $3(x^3-3x^2+2x)^{\frac{1}{3}}$ gleich Null iſt. Aus der Gleichung

$$x^3-3x^2+2x=0$$

folgt zunächſt, daß 0 eine Wurzel der Gleichung iſt. Dividiren wir, um die übrigen Wurzeln zu finden, die Gleichung durch x, ſo erhalten wir aus der Gleichung

$$x^2-3x+2=0$$

$x=2$ und $x=1$. Alſo für die Werthe $1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $1-\sqrt{\frac{1}{3}}$ der willkürlich Veränderlichen wird der erſte Differentialquotient gleich Null, und für die Werthe 0, 1, 2 derſelben wird er unendlich groß. Um zu entſcheiden, ob der erſte Differentialquotient bei den Werthen $1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $1-\sqrt{\frac{1}{3}}$ einſtimmig oder entgegengeſetzt durch Null geht, betrachten wir den Werth, welchen der zweite Differentialquotient bei dieſen Werthen von x annimmt. Der Zähler des zweiten Differentialquotienten wird gleich -8 ſowol für $x=1+\sqrt{\frac{1}{3}}$ als für $x=1-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Und da der Nenner des zweiten Differentialquotienten für alle Werthe von x nothwendig poſitiv iſt, und mithin der zweite Differentialquotient einen endlichen negativen Werth hat, ſo durchläuft die Function an den entſprechenden Stellen zwei größte Werthe. Indem der Nenner des erſten Differentialquotienten bei den Werthen 0, 1, 2 der willkürlich Veränderlichen durch Null geht, wechſelt die Function x^3-3x^2+2x offenbar ihr Vorzeichen, und folglich auch die dritte Wurzel derſelben, oder die Function $(x^3-3x^2+2x)^{\frac{1}{3}}$. Und da bei denſelben drei Werthen der willkürlich Veränderlichen der Zähler ſein Vorzeichen nicht wechſelt, ſo geht der erſte Differentialquotient bei dieſen Werthen entgegengeſetzt durch das Unendliche, und folglich die Function aus dem Wachſen ins Abnehmen oder umgekehrt über. Für $x=0$ iſt der Zähler des erſten Differentialquotienten poſitiv, und der Nenner deſſelben geht aus negativen Werthen in poſitive über; folglich geht der erſte Differentialquotient aus negativen Werthen in poſitive über, und die Function durchläuft ein Minimum. Für $x=1$ iſt der Zähler des erſten Differentialquotienten negativ, der Nenner geht aus poſiti-

ven Werthen in negative über, und folglich der erste Differentialquotient aus negativen Werthen in positive, und die Function durchläuft ebenfalls ein Minimum. Für $x=2$ ist der Zähler positiv, der Nenner geht aus negativen Werthen in positive über, und folglich hat der erste Differentialquotient denselben Uebergang, und die Function erreicht zum dritten Mal ein Minimum. Setzen wir in b (Fig. 72) den Nullpunkt der Abscisse, $bc=1$ und $bd=2$, so stellen die Ordinaten der Linie fghiklm die Function $2+(x^3-3x^2+2x)^{\frac{2}{3}}$ dar, deren Differentialquotient zweimal Null und dreimal unendlich wird, und welche an den entsprechenden Punkten zwei Maxima und drei Minima enthält.

Um die Werthe der willkürlich Veränderlichen zu finden, für welche die Stärke des Wachsens, oder die Beschleunigung des Wachsens oder überhaupt die Stärke des Wachsens irgend eines Grades größte oder kleinste Werthe durchläuft, wird man den ersten Differentialquotienten oder den zweiten oder überhaupt einen beliebigen als die ursprünglich gegebene Function betrachten, welche man ganz auf die schon beschriebene Weise in Bezug auf ihre größten und kleinsten Werthe untersucht. Nehmen wir z. B. die Function $\sin x$. Wir wollen dieselbe gleich durch die Ordinaten einer Linie darstellen. Die Ordinaten der gemeinen Wellenlinie agchei (Fig. 73) repräsentiren die Function $\sin x$, wobei in a der Nullpunkt der Abscisse, und $ab=\frac{\pi}{2}$, $ac=\pi$, $ad=\frac{3\pi}{2}$ u. s. w. gesetzt ist. Um zuerst die größten und kleinsten Werthe der gegebenen Function selbst zu finden, setzen wir den ersten Differentialquotienten von $\sin x$, nämlich $\cos x$, da er den Werth unendlich nicht annehmen kann, blos gleich Null. Aus der Gleichung $\cos x=0$ folgen unzählig viele Werthe von x, welche der Gleichung

genügen, nämlich $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{2}$ u. ſ. w. Der zweite Differentialquotient von $\sin x$ iſt $-\sin x$. Da derſelbe bei allen Werthen von x, für welche $\cos x$ gleich Null iſt, einen von Null verſchiedenen endlichen Werth hat, ſo geht der erſte Differentialquotient an allen betreffenden Punkten entgegengeſetzt durch Null, und die Function $\sin x$ hat größte und kleinſte Werthe. Für die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ u. ſ. w. iſt die Function $-\sin x$ negativ, und folglich hat die Function $\sin x$ bei dieſen Werthen Maxima. Und da für die Werthe π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ u. ſ. w. der zweite Differentialquotient poſitiv iſt, ſo hat die Function an den betreffenden Stellen Minima.

Unterſuchen wir den erſten Differentialquotienten $\cos x$ in Bezug auf ſeine Maxima und Minima. Der erſte Differentialquotient von $\cos x$, nämlich $-\sin x$, wird gleich Null, wenn x die Werthe, 0, π, 2π, 3π u. ſ. w. hat. Der zweite Differentialquotient von $\cos x$, nämlich $-\cos x$ iſt bei den Werthen 0, 2π, 4π u. ſ. w. gleich $+1$, und bei den Werthen π, 3π, 5π u. ſ. w. gleich -1. Folglich hat die Function $\cos x$, oder die Stärke des Wachſens der Function $\sin x$, ihre größten Werthe in den Punkten a, e u. ſ. w. der Figur, und ihre kleinſten in den Punkten c, k u. ſ. w. Um zu beſtimmen, an welchen Stellen die Beſchleunigung des Wachſens der Function $\sin x$, oder die Function $-\sin x$ ihre größten und kleinſten Werthe hat, ſetzen wir $-\cos x=0$. Von den Werthen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ u. ſ. w., welche dieſer Gleichung genügen, machen die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ u. ſ. w. den zweiten Differentialquotienten von $-\cos x$, nämlich $\sin x$, poſitiv, und die Werthe $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ u. ſ. w. ma-

denſelben negativ. Folglich hat die Beſchleunigung des Wachſens der Function sinx bei den erſteren Werthen ihre Minima, und bei den letzteren ihre Maxima.

Die Lehren von den größten und kleinſten Werthen der Functionen ſind die wichtigſten aber bei Weitem nicht die einzigen Anwendungen, welche von der Lehre über die in den verſchiedenen Graden des Wachſens eintretenden Uebergangspunkte gemacht werden. So wie man in der Curvenlehre gemeine Curvenpunkte von beſonderen oder ausgezeichneten Curvenpunkten unterſcheidet, und unter den letzteren ſolche verſteht, in welchen irgend ein Differentialquotient der Coordinaten einen Uebergangspunkt oder einen Zeichenwechſel hat, ſo kann man auch, abgeſehen von räumlichen Repräſentanten der Functionen, gemeine Functionswerthe und ausgezeichnete oder beſondere Functionswerthe unterſcheiden, und die Ableitung der Eigenſchaften der Letzteren auf die Lehre von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachſens der verſchiedenen Grade gründen. So z. B. läßt ſich leicht der für die Berührungen der Functionen und für die nach Anleitung des vorhergehenden Capitels zu bewerkſtelligende Berechnung einer Function durch eine Berührende wichtige Satz ableiten, daß von ſolchen Functionen, welche ſich in irgend einem Grade von ungerader Rangzahl berühren, die Eine vor und nach dem Berührungspunkte größere Werthe haben muß als die Andere, ſobald derjenige Differentialquotient, welcher um einen Grad höher iſt als der Berührungsgrad, ſein Vorzeichen im Berührungspunkte nicht wechſelt, und daß von ſolchen Functionen, welche ſich in irgend einem Grade von gerader Rangzahl berühren, die Eine vor dem Berührungspunkte größere und nach demſelben kleinere Werthe haben muß als die Andere, ſobald der den Berührungsgrad um eine Einheit überſteigende Differentialquotient im Berührungspunkte ſein Zeichen nicht wechſelt. In Bezug auf Linien wird dieſer Unterſchied des Zuſammentreffens der ſich berührenden Linien ſich ſo darſtellen, daß entweder die eine Linie auf derſelben

Seite der berührten bleibt, oder daß beide Linien sich kreuzen, und sobald der Berührungspunkt in Bezug auf den den Berührungsgrad um eine Einheit übersteigenden Differentialquotient ein gemeiner Curvenpunkt ist für beide Linien, wird in Bezug auf das Sichkreuzen oder Nichtkreuzen der Linien eine feste Regel gelten bei jedem Berührungsgrade, welche aus dem Obigen sich leicht ableiten läßt, und welche in die entgegengesetzte übergeht, sobald der genannte Differentialquotient in Einer von beiden Linien sein Zeichen wechselt.

Wir wollen mit Verzichtleistung auf die ausführliche Lehre von den Uebergangspunkten der Stärke des Wachsens beliebiger Grade die allgemeine Lehre von den höheren Differentialquotienten der Functionen Einer Veränderlichen hiermit als geschlossen betrachten. Von der Fruchtbarkeit und den außerordentlichen Erfolgen der Analyse des in allen seinen inneren Momenten verfolgten Begriffs einer Stärke des Wachsens hier zu reden ist überflüssig, da das Vorhergehende schon hinreichende Belege dazu liefert, und auch an verschiedenen Stellen schon auf die Bedeutung derselben hingewiesen worden ist. Es mögen nun noch einige Anwendungen folgen. Und da alle directen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf das Stetige, auf den Raum und die Verbindung von Raum und Zeit, d. h. auf Geometrie und Bewegungslehre sich beziehen, so sind in den beiden folgenden Capiteln noch ein umfassendes geometrisches und ein größeres mechanisches Problem abgehandelt werden.

Zwölftes Capitel.

Von der Krümmungsstärke der krummen Linien.

§. 137.

Begriff und Maß der Krümmungsstärke.

Unter den Eigenschaften der krummen Linien, welche man durch Hülfe der Differential- und Integralrechnung entwickelt, und deren Erörterung man als lehrreiches Beispiel des Nutzens und Erfolges dieser Rechnung gebrauchen kann, nimmt die Krümmungsstärke einen vorzüglichen Rang ein, weil sich diese Eigenschaft durch die sonstigen Hülfsmittel der Mathematik nur sehr mangelhaft und schwerfällig und in einzelnen leichteren Fällen behandeln läßt, durch die Differential- und Integralrechnung aber auf eine leichte umfassende Art entwickelt wird. Es gibt zwei ursprüngliche verschiedene Bewegungen, durch welche man sich alle Raumgrößen erzeugt denken kann, die fortschreitende Bewegung und die drehende Bewegung. Eine gerade Linie wird erzeugt durch eine blos fortschreitende Bewegung eines Punktes ohne alle Richtungsveränderung oder Drehung. Setzt man gerade Linien zu einer Figur zusammen, und durchläuft den Umfang dieser Figur, so fallen die fortschreitende Bewegung und die drehende Bewegung noch ganz auseinander, weil man abwechselnd bald eine blos fortschreitende Bewegung, bald eine blos drehende an den Ecken der Figur, vornimmt. Das Wesen der krummen Linie besteht darin, daß diese beiden entgegengesetzten Bewegungsarten ineinander fließen und continuirlich verbunden sind, so daß kein noch so kleiner Fortschritt auf der Länge der Linie ohne Drehung, und keine noch so kleine Drehung ohne Fortschritt statt-

finden kann. Die Krümmung selbst, in sofern sie eine verschiedene ist in verschiedenen krummen Linien oder in den Theilen einer und derselben Linie, wird auf dem Verhältniß beruhen, welches diese beiden Arten der Bewegung haben.

Da die momentane Richtung, welche eine krumme Linie in einem Punkte hat, angegeben wird durch die Tangente dieses Punktes, so wird der Richtungsunterschied oder die Drehungsgröße, welche man von einem Curvenpunkte zu einem andern fortschreitend durchlaufen hat, angegeben werden durch den Winkel, welchen die beiden Tangenten dieser Curvenpunkte miteinander bilden. Ist bei einem gewissen Fortschritte auf der Länge der krummen Linie, wie bei dem Fortschritte von c nach d (Fig. 74), die Drehung oder der Winkel egd, welchen die Tangenten der Punkte c und d bilden, geringer, als der Winkel, welchen bei einem ebenso großen Fortschritte von a nach b die Tangenten dieser Punkte bilden, so wird im Allgemeinen die Krümmung der Curve in der Gegend des Stückes cd geringer sein als in der Gegend des Stückes ab. Aber diese Vorstellungen sind offenbar noch viel zu unbestimmt, um darauf den Begriff eines Maßes für die Krümmung oder einer bestimmten Krümmungsstärke zu gründen. Da im Allgemeinen bei den krummen Linien mit gleichen Zunahmen der Länge derselben ungleiche Zunahmen der Drehung, welche man zu machen hat, um aus einer gewissen beliebigen Anfangsrichtung in die Lage der Tangenten zu kommen, verbunden sind, so wird man hier, wie überall bei ungleichmäßig wachsenden Größen, eine bestimmte Vorstellung von der Stärke des Wachsens derselben sich nur bilden können, wenn man zuerst den Fall betrachtet, in welchem die veränderlichen Größen gleichmäßig wachsend sind.

Es ist aus den Elementen der Geometrie bekannt, daß diejenige krumme Linie, in welcher mit gleichen Fortschritten auf der Länge der Curve gleiche Drehungen der Tangenten verbunden sind, die Kreislinie ist, und daß der Kreislinie allein diese Eigenschaft zukommt. Die Kreislinie

allein hat demnach eine constante Krümmungsstärke. Betrachten wir eine beliebige Richtung ab (Fig. 75) als die Anfangsrichtung, und nennen wir den veränderlichen Winkel, welchen die Tangenten des Kreises mit derselben bilden, W, und die veränderliche Curvenlänge L, so ist der Differenzquotient dieser Veränderlichen beim Kreise constant, und es ist durch die Gleichung $\frac{\Delta W}{\Delta L} = a$ eine charakteristische Eigenschaft des Kreises ausgesprochen. Da man die Krümmung um so stärker nennt, je größer die Zunahme von W ist bei derselben Zunahme von L, so kann der Zahlenwerth dieses Differenzquotienten unmittelbar als Maß der Krümmung dienen. Es fragt sich nur noch, durch welche bestimmte Zahl dieser Differenzquotient bei einem Kreise von bestimmter Größe auszudrücken ist. Hierzu ist nöthig, daß man die Drehung durch eine Zahl ausdrückt. Wir legen der ganzen Umdrehung den Zahlenwerth 2π bei. Um nun bei einem Kreise, dessen Radius den Zahlenwerth r hat, den Zahlenwerth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ zu finden, verfahren wir wie bei allen gleichmäßig Wachsenden am einfachsten so, daß wir der willkürlich Veränderlichen L eine Zunahme gleich 1 ertheilen; alsdann ist die zugehörige Zunahme der abhängig Veränderlichen ohne Weiteres dem constanten Differenzquotienten gleich. Hat der Bogen ed (Fig. 75) bei dem angenommenen Zahlenwerth des Radius den Zahlenwerth 1, so wird, da ed zu der Länge des ganzen Kreises, d. h. zu $2r\pi$ sich verhält wie der Zahlenwerth des Winkels ecd zu der Zahl 2π, aus der Proportion $1 : 2r\pi = ecd : 2\pi$ folgen $ecd = \frac{1}{r}$. Und da der Winkel fgd dem Centriwinkel ecd gleich ist, und der Zahlenwerth des Winkels fgd dem constanten Differenzquotienten von W und L gleich sein muß, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\Delta W}{\Delta L} = \frac{1}{r}.$$

Wir ſehen hieraus, daß die Krümmungsſtärken verſchiedener Kreiſe ſich umgekehrt wie ihre Radien verhalten, und daß, wenn die Krümmungsſtärke durch die Zahl 1 ausgedrückt erſcheint, wir darunter zu verſtehen haben die Krümmung eines Kreiſes, deſſen Radius den Zahlenwerth 1 hat. Ueberhaupt iſt klar, wie man den beliebigen Zahlenwerth, welcher gleich $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ gefunden wird, auf einen Kreis zu beziehen hat. Denn aus der Gleichung $\frac{dW}{dL} = \frac{1}{r}$ folgt $r = \frac{1}{\frac{dW}{dL}}$, d. h. die durch den Zahlenwerth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ ausgedrückte Krümmungsſtärke iſt identiſch mit der eines Kreiſes, deſſen Radius gleich $\frac{1}{\frac{\Delta W}{\Delta L}}$ iſt.

§. 138.

Die momentane Krümmungsſtärke eines Curvenpunktes bei Parallelordinaten.

In allen krummen Linien, die nicht Kreiſe ſind, werden mit gleichen, auch beliebig kleinen Zunahmen der Curvenlänge ungleiche Zunahmen des Winkels, welchen die Tangenten mit einer Anfangsrichtung machen, verbunden ſein, oder die Größen L und W, in der vorher erklärten Bedeutung genommen, werden ungleichmäßig wachſend ſein. Die Krümmungsſtärke wird alſo ſtetig veränderlich ſein, und es kann nicht die Rede ſein von der in einem gewiſſen Curvenſtück vorhandenen Krümmung, ſondern nur von der in einem Punkte vorhandenen. Die von einem gewiſſen Curvenpunkte genommene Zunahme von L verglichen mit der zugehörigen Zunahme von W kann aber kein Maß für die in dieſem Curvenpunkte vorhandene Krümmungsſtärke abgeben, weil das Verhältniß beider Zunahmen zufällig und veränderlich iſt, wenn man eine andere Zunahme von L ſetzt. Da jedoch die Krümmung ſtetig veränderlich iſt

so wird der Werth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ die in einem Curvenpunkte vorhandene Krümmung um so genauer angeben, je kleiner die von diesem Punkte aus genommene Zunahme von L ist, und der Zahlenwerth, dem sich der Werth von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ mit Verkleinerung des ΔL ohne Ende nähert, d. h. der Zahlenwerth von $\frac{dW}{dL}$ wird die in einem Curvenpunkte vorhandene Krümmung genau angeben, in demselben Sinne, in welchem dem Obigen zu Folge eine Zahl eine Krümmungsstärke ausdrückt. Wird nämlich für einen bestimmten Curvenpunkt der Werth des Differentialquotienten $\frac{dW}{dL}$ gleich a gefunden, so heißt das, die Krümmungsstärke in diesem Curvenpunkte ist so groß als die eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{a}$ ist.

Wenn man bei einer Curve die Veränderliche W durch eine Function der Veränderlichen L ausdrückte, indem man diese Größen als die Veränderlichen eines eigenthümlichen Coordinatensystems nähme, so brauchte man nur den Differentialquotienten der gegebenen Function von L zu nehmen, um in demselben ohne Weiteres die momentane Krümmungsstärke der Curve als Function von L zu haben *). In sofern man aber das Coordinatensystem, durch welches eine Curve gegeben ist, nicht verändern will, und also den Werth von $\frac{dW}{dL}$ durch eine Function der dem Coordinatensysteme zu Grunde liegenden willkürlich Veränderlichen ausdrücken will, muß man einen kleinen Umweg einschlagen. Heißt nämlich die willkürlich Veränderliche

*) Anleitung dazu, die Veränderliche W als Function von L darzustellen bei jeder Curve, findet man in der „Neuen Curvenlehre von Adolf Peters. Dresden 1835."

eines Coordinatenſyſtemes x, und ſtellen wir ſowol den Differentialquotienten von L und x als den von W und x als Functionen von x dar, ſo folgt aus den beiden Gleichungen

$$\frac{dL}{dx} = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dx} = \varphi(x)$$

wenn wir die zweite durch die erſte dividiren

$$\frac{dW}{dL} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

und damit haben wir den Differentialquotienten von W und L als Function der Veränderlichen x.

Wir wollen zuerſt den Ausdruck für die Krümmungsſtärke bei dem Parallelcoordinatenſyſtem aufſuchen, und zwar bei ſenkrechten Parallelordinaten. Nehmen wir eine beliebige Curve fde (Fig. 76), ihre Abſciſſe heiße x, und ihre Ordinate f(x). Durch welche Function von x der Differentialquotient der Curvenlänge und der Abſciſſe darzuſtellen iſt, wiſſen wir ſchon aus §. 53. Es iſt dort gefunden

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Um auch den Differentialquotienten von W und x zu erhalten, müſſen wir zuerſt W ſelbſt als eine Function von x darſtellen. Da unter W verſtanden wird die Drehung, welche man vornehmen muß, um aus einer gewiſſen Anfangsrichtung in die Richtung der Tangente eines Curvenpunktes überzugehen, ſo müſſen wir erſt feſtſetzen, welche Richtung als Anfangsrichtung gelten ſoll, und nach welcher Seite die unter W verſtandene Drehung ſtattfinden ſoll. Als Anfangsrichtung wird am bequemſten die Abſciſſe genommen, und zwar der vom Nullpunkte aus genommene poſitive Zweig derſelben. Bei der Drehung unterſcheidet man die Drehung nach rechts und nach links. Wenn eine Linie ſo umgedreht wird, wie der Zeiger einer Uhr läuft, ſo ſagt man, ſie wird rechts gedreht. Im entgegengeſetzten Falle heißt ſie links gedreht. Wir wollen

unter W eine aus der Anfangsrichtung nach links vorgenommene Drehung verstehen, und in sofern wir die Drehungen als positive und negative unterscheiden, ist demnach die Drehung nach links als die positive zu betrachten. Gemäß diesen Erklärungen ist der Winkel ebc (Fig. 76) der Werth von W für den Curvenpunkt e. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist gleich dem Differentialquotienten der Coordinaten der Curve für den Punkt e genommen, oder allgemein für jeden Curvenpunkt gleich $\frac{df(x)}{dx}$. Der Zahlenwerth des Winkels ebc ist also, in sofern die ganze Umdrehung wie angenommen durch 2π ausgedrückt wird, gleich dem Bogen, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{df(x)}{dx}$ ist. Wir erhalten demnach, zunächst W als Function von x durch die Gleichung

$$W = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{df(x)}{dx}\right).$$

Um $\frac{dW}{dx}$ zu finden, brauchen wir nur die in §. 90, 3. aufgestellte Gleichung

$$\frac{d\,\text{Arc}(\text{tg} = x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

anzuwenden. Setzen wir statt der Veränderlichen x die Veränderliche $\frac{df(x)}{dx}$, so erhalten wir

$$\frac{d\,\text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{df(x)}{dx}\right)}{d\,\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Hier haben wir zunächst den Differentialquotienten der Function $\text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{df(x)}{dx}\right)$ in Bezug auf $\frac{df(x)}{dx}$ als willkürlich Veränderliche. Um denselben aber in Bezug auf x als willkürlich Veränderliche zu haben, brauchen wir nur

ſtatt $d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ zu ſetzen $\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}.dx$ oder $\frac{d^2f(x)}{dx^2}.dx$, und indem wir die Gleichung mit $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ multipliciren, erhalten wir

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{dW}{dx}=\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Dividiren wir endlich, wie oben vorgeſchrieben, $\frac{dW}{dx}$ durch $\frac{dL}{dx}$, ſo erhalten wir

$$\frac{dW}{dL}=\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

und damit die Krümmungsſtärke eines beliebigen Curvenpunktes als Function des zugehörigen Abſciſſenwerthes.

Der Ausdruck für die Krümmungsſtärke wird poſitiv ſein, wenn mit der Zunahme von L und folglich auch mit der Zunahme von x eine Zunahme von W verbunden iſt, und negativ, wenn mit der Zunahme von x eine Abnahme von W verbunden iſt. Nun wird aber bei einer Linie, die in Bezug auf die angenommenen Coordinaten convex zu nennen iſt (in dem früher feſtgeſtellten Sinne) mit wachſendem x die Größe W immer größer, ſowol in demjenigen Theile der convexen Linie, in welchem die Ordinaten beſchleunigt wachſen, wie in dem Theile de (Fig. 76), als in demjenigen Theile, in welchem die Ordinaten retardirt abnehmen, wie in dem Theile fd (Fig. 76), weil in der

letzteren Theile der Winkel fgh, den man durch eine aus der Abscissenrichtung nach rechts vorgenommene Drehung erzeugt zu denken und also negativ zu betrachten hat, mit wachsendem x immer kleiner wird, oder weil der Winkel fgc, den man durch eine aus der Abscissenrichtung nach links vorgenommene Drehung erzeugt zu denken und also positiv zu setzen hat, mit wachsendem x immer größer wird. Der positive Werth der Krümmungsstärke deutet also auf eine convexe Linie, oder bezieht sich, wenn eine Curve für dieselben Werthe der Abscisse einen convexen und einen concaven Zweig hat, auf den convexen Zweig. Bei einer concaven Linie wird mit einer Zunahme des x und folglich auch mit einer Zunahme des L eine Abnahme des W verbunden sein, und folglich der Werth von $\frac{dW}{dL}$ negativ ausfallen. Man konnte dies auch unmittelbar aus der Formel

$$\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ableiten. Denn der Nenner ist nothwendig immer positiv, und der ganze Ausdruck wird also positiv oder negativ sein, je nachdem der Zähler $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ positiv oder negativ ist. Nun ist aber bekanntlich der zweite Differentialquotient der Ordinaten positiv bei den convexen und negativ bei den concaven Theilen einer krummen Linie.

§. 139.

Beispiele zur Berechnung der Krümmungsstärke.

Die Linie bac Fig. 77 sei gebildet nach der Coordinatengleichung $y=x^2$. Dieselbe ist also eine gemeine Parabel, deren Parameter gleich 1 ist. Der erste Differentialquotient der Ordinaten ist gleich 2x und der zweite gleich 2. Nach unserer allgemeinen Formel für die

Krümmungsstärke oder für $\frac{dW}{dL}$ ist also bei dieser Parabel

$$\frac{dW}{dL} = \frac{2}{[1+4x^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Im Punkte a der Curve, wo $x=0$ ist, hat die Krümmungsstärke den Werth 2, oder ist gleich der Krümmung eines Kreises, dessen Radius gleich $\frac{1}{2}$ oder gleich dem halben Parameter ist. Der Kreis, dessen constante Krümmung gleich ist der momentanen eines Curvenpunktes, heißt der Krümmungskreis dieses Punktes. Durch den Krümmungskreis wird die momentane Krümmungsstärke eines Curvenpunktes versinnlicht, weil in demselben diejenige Stärke des Wachsens der Größen W und L, welche in dem Curvenpunkte momentan vorhanden ist, constant ist und zur Ausführung kommt. Soll der Krümmungskreis an den betreffenden Curvenpunkt so angebracht werden, daß man ihn als die geometrische Construction des Differentialquotienten $\frac{dW}{dL}$ betrachten kann in dem früher erklärten Sinne der Construction eines Differentialquotienten veränderlicher Raumgrößen, so ist, wie in dem folgenden Paragraphen noch bewiesen werden soll, nur nöthig, den Kreis so durch den betreffenden Curvenpunkt gehen zu lassen, daß beide krumme Linien in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben. Dadurch ist die Lage des Radius des Krümmungskreises vorgeschrieben. Und da die Länge des Radius durch $\frac{dW}{dL}$ gegeben ist, so ist die geometrische Construction der momentanen Krümmungsstärke sehr leicht auszuführen. Um also die im Punkte a unserer Parabel vorhandene Krümmungsstärke zu construiren, errichten wir auf der Tangente des Punktes a eine Senkrechte ag von der Länge $\frac{1}{2}$, und beschreiben mit derselben

als Radius einen Kreis. Im Curvenpunkte h, wo $x=1$ ist, nimmt der Ausdruck $\frac{2}{[1+4x^2]^{\frac{3}{2}}}$ der Krümmungsstärke unserer Parabel den Werth $\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$ oder $\frac{2}{5\sqrt{5}}$ an. Ziehen wir auf die Tangente hi eine Senkrechte von der Länge $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ oder 5,590, so enthält der damit beschriebene Kreis khl die geometrische Construction der Krümmungsstärke des Punktes h.

Betrachten wir noch die Krümmungsstärken in einer Ellipse. Die halbe kleine Achse ac der Ellipse Fig. 78 sei $=3$, und die halbe große Achse ce$=5$. Alsdann ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse $y=\pm\frac{3}{5}[5^2-x^2]^{\frac{1}{2}}$. Daraus ergibt sich $\frac{dy}{dx}=\mp\frac{3x}{5(5^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}=\mp\frac{15}{(5^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Der negative Werth dieser Differentialquotienten gilt für die positiven Ordinaten, und der positive für die negativen Ordinaten. Nach der allgemeinen Formel für $\frac{dW}{dL}$ haben wir bei unserer Ellipse

$$\frac{dW}{dL}=\mp\frac{\frac{15}{(5^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left[1+\frac{9x^2}{25(5^2-x^2)}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach gehöriger Zusammenziehung dieses Ausdrucks erhalten wir

$$\frac{dW}{dL}=\mp\frac{15.125}{(625-16x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der negative Werth der Krümmung bezieht sich auf den durch die positiven Ordinaten gegebenen Curvenzweig, und der positive auf den andern. Im Punkte a der Ellipse oder für $x=0$ ist die Krümmung gleich $-\frac{3}{25}$, und der mit dem Radius $\frac{25}{3}$ beschriebene Kreis fag gibt die Krümmungsstärke des Punktes a an. Im Punkte d oder e, wo x gleich -5 oder $+5$ ist, erhält die Krümmung den Werth $\frac{5}{9}$, und zwar nach Belieben $+\frac{5}{9}$, oder $-\frac{5}{9}$, weil in den Punkten d und e die convexen und concaven Curvenzweige zusammenstoßen. Der mit dem Radius $\frac{9}{5}$ beschriebene Kreis dh gibt die Construction der Krümmung des Punktes d. Im Punkte i der Curve, wo $x=4$ ist, hat die Krümmung den Werth $-\frac{15.125}{369^{\frac{3}{2}}}$ oder $-0{,}2645...$ Der Radius des Krümmungskreises min ist also gleich 3,780... zu nehmen.

An den Stellen der Curve, bei welchen die Tangente senkrecht auf der Abscisse steht, und also der erste und zweite Differentialquotient der Ordinaten unendlich groß sind, wie bei den Punkten d und e der Ellipse, wird in der Regel der Ausdruck für die Krümmungsstärke unbestimmt werden, weil Zähler und Nenner desselben zugleich unendlich groß werden, wie auch der obige Ausdruck der Krümmung der Ellipse in der ersten unzusammengezogenen Form für $x=5$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ übergeht, und in der zweiten Form nur deswegen einen bestimmten Werth gibt, weil der Bestandtheil (5^2-x^2), welcher das Unendlichwerden des Zählers und Nenners hervorbringt, bei der Zusammenziehung der Formel durch Aufhebung verschwunden ist. Um an solchen Stellen der Curve

die Krümmungsstärke zu berechnen, kann man entweder den wahren Werth des unbestimmten Ausdrucks nach den gewöhnlichen Regeln berechnen, oder, was meistens einfacher ist, die Coordinatenaxen verwechseln, wodurch die unendlichen Werthe der Differentialquotienten der Curven verschwinden.

Wie man an den vorhergehenden Beispielen gesehen hat, so bleibt der Krümmungskreis bald auf derselben Seite der Curve, bald schneidet er dieselbe. Das Erstere kann offenbar nur eintreten an denjenigen Curvenpunkten, in welchen die Krümmung einen größten oder kleinsten Werth hat. Ist nämlich im Punkte a der Ellipse (Fig. 78) die Krümmung ein Minimum, so wird sie vor und nach dem Punkte a stärker sein, als die Krümmung des Kreises fag, und mithin werden auch, wenn man vom Punkte a aus vor- und rückwärts Zunahmen der Curvenlänge setzt, die Tangenten der Ellipse sich stärker aus der Richtung der gemeinschaftlichen Tangente drehen, als die Tangenten des Kreises bei gleich großen Zunahmen der Curvenlänge. Es wird also die Curve vor und nach dem Berührungspunkte innerhalb des Kreises bleiben. Aus denselben Gründen folgt, daß die Curve zu beiden Seiten des Berührungspunktes außerhalb des Krümmungskreises fallen muß, wenn in dem Berührungspunkte ein Maximum der Krümmung stattfindet. In allen Curvenpunkten aber, in welchen weder ein Maximum noch ein Minimum der Krümmung stattfindet, muß der Krümmungskreis die Curve schneiden. Denn die Curve hat, in sofern ihre Krümmung im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist, entweder vor dem Berührungspunkte eine kleinere Krümmung als der Krümmungskreis und nachher eine größere, oder umgekehrt. Folglich werden die Tangenten der Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes sich mehr aus der Richtung der gemeinschaftlichen Tangente entfernen als die Tangenten des Kreises bei gleichen Zunahmen der Curvenlänge, und auf der andern Seite weniger, und folglich muß die

Curve nach der einen Seite innerhalb und nach der andern außerhalb des Kreises liegen.

Betrachten wir noch die Krümmung der Wellenlinie agche Fig. 73. Die Gleichung derselben ist $y=\sin x$. Der erste Differentialquotient von $\sin x$ ist $\cos x$ und der zweite ist $-\sin x$. Folglich ist.

$$\frac{dW}{dL}=-\frac{\sin x}{[1+(\cos x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Im Punkte g, wo $x=\frac{\pi}{2}$ ist, hat die Krümmung den Werth -1, und im Punkte h, wo $x=\frac{3\pi}{2}$, den Werth $+1$. In diesen Punkten sind offenbar Maxima der Krümmung, weil in dem Ausdrucke für die Krümmungsgröße der Zähler seinen größten und der Nenner seinen möglichst kleinsten Werth hat. Im Punkte c, wo $x=\pi$, nimmt der Ausdruck der Krümmung den Werth 0 an. Der Radius des Krümmungskreises ist also an diesem Wendungspunkte unendlich groß, und dieser Kreis geht in eine gerade Linie über. Wo eine krumme Linie einen Wendungspunkt hat, und aus Convexität in Concavität oder umgekehrt übergeht, und mithin der zweite Differentialquotient der Parallelordinaten sein Zeichen wechselt, wird auch der Ausdruck für die Krümmung sein Zeichen wechseln, und folglich entweder durch den Nullwerth oder das Unendliche gehen. In der krummen Linie abc Fig. 79 z. B., welche nach der Gleichung $y=2+(1-x)^{\frac{5}{3}}$ gebildet ist, wobei in der Nullpunkt der Abscisse und de gleich 1 gesetzt ist, wird der zweite Differentialquotient der Ordinaten, nämlich $\frac{10}{9(1-x)^{\frac{1}{3}}}$, unendlich groß für $x=1$, und geht entgegengesetzt durch das Unendliche. Da der erste Differentialquotient der Ordinaten, nämlich $-\frac{5}{3}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, für den

den Werth von x gleich Null wird, so ist im Punkte b die Krümmung unendlich groß, und der Radius des Krümmungskreises geht in einen Punkt über. Natürlich kann der zweite Differentialquotient auch einstimmig durch Null oder das Unendliche gehen, und die Krümmung gleich Null oder unendlich groß werden, ohne daß ein Wendungspunkt der Curve vorhanden ist. In der Curve efg Fig. 80, welche nach der Gleichung $y=4-(1-x)^{\frac{4}{3}}$ gebildet ist, wobei in c der Nullpunkt der Abscisse und cb gleich 1 gesetzt ist, und welche die Form eines Spitzbogens darstellt, ist für $x=1$ der erste Differentialquotient der Ordinaten $\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}$ gleich Null, und der zweite $-\frac{4}{9(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ unendlich groß, geht jedoch einstimmig mit negativen Werthen durch das Unendliche. Die Krümmung ist also in der ganzen Curve negativ, und im Punkte f unendlich groß.

§. 140.

Der Berührungsgrad des Krümmungskreises.

Der Krümmungskreis hat seinem Begriffe nach denselben Differentialquotienten der Veränderlichen W und L, den eine Curve in demjenigen Punkte hat, dessen momentane Krümmungsstärke durch den Krümmungskreis angegeben wird. Es fragt sich nun, ob der Krümmungskreis auch einen oder mehrere Differentialquotienten der Ordinaten mit der Curve, deren momentane Krümmung durch ihn bestimmt wird, gemeinschaftlich hat, d. h. ob er die Curve im ersten oder in einem höheren Grade berührt. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zuerst die allgemeine Gleichung des Kreises aufstellen. Wir setzen einen gegen den Kreis ganz beliebig gelegten Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinatenaxen. Es sei ch Fig. 81 die Abscisse, und c ihr Nullpunkt. Die Abscisse des Mittelpunktes des Kreises cd heiße a, und die Ordinate de des Mittel-

punktes heiße b. Der Radius des Kreiſes heiße r. Bezeichnen wir die Abſciſſe eh eines beliebigen Curvenpunktes f durch x, die Ordinate hf deſſelben Punktes durch y, ſo iſt, da $eg = x - a$ und $gf = y - b$, und $eg^2 + gf^2 = r^2$, auch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

und dies iſt die allgemeine auf jedes beliebige Coordinatenſyſtem bezügliche Gleichung des Kreiſes. Drücken wir, wie gewöhnlich, die Ordinate als Function der Abſciſſe aus, ſo haben wir

$$y = b \pm [r^2 - (x-a)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Soll ein Kreis irgend eine andere Curve im zweiten Grade berühren, ſo müſſen drei Bedingungen erfüllt werden, nämlich erſtens muß, in ſofern beide Curven auf daſſelbe Coordinatenſyſtem bezogen werden, im Berührungspunkte der Kreis dieſelbe Ordinate haben als die andere Curve, zweitens muß er denſelben erſten Differentialquotienten der Ordinaten, und drittens denſelben zweiten Differentialquotienten der Ordinaten haben im Berührungspunkte als die andere Curve. Stellen wir die Ordinate der andern Curve durch $f(x)$ vor, ſo muß bei dem einzelnen übrigens beliebigen Werthe x_1 der Abſciſſe, für welchen die Berührung ſtattfinden ſoll 1) $y = f(x_1)$, 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x_1)}{dx}$, 3) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$ ſein. Da die allgemeine Gleichung des Kreiſes drei unbeſtimmte Conſtanten a, b und r enthält, ſo ſieht man, daß die Werthe von a, b und r immer ſo genommen werden können, daß den drei obigen Gleichungen genügt wird. Es folgt daraus, daß es bei jeder Curve möglich iſt, durch jeden beliebigen Curvenpunkt einen Kreis zu legen, welcher die Curve im zweiten Grade berührt. Zugleich folgt aber auch, daß man bei einem Kreiſe nicht vorſchreiben kann, daß er eine Curve im dritten oder in einem höheren Grade berühren ſoll, weil er ſonſt noch mehreren Bedingungen genügen müßte, während die drei Con-

stanten doch durch drei Bedingungen schon völlig bestimmt werden. Der Kreis kann nur zufällig eine andere Curve in einem höheren als dem zweiten Grade berühren, wenn es sich entweder gerade so trifft, daß der dritte Differentialquotient der Ordinaten einer Curve mit dem des Kreises zusammenfällt, oder wenn dieser dritte Differentialquotient absichtlich so bestimmt wird. Setzen wir in den obigen drei Gleichungen statt y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Werthe, die diesen Ausdrücken zukommen vermöge der allgemeinen Gleichung des Kreises, und lösen wir diese Gleichungen so auf, daß die Constanten a, b und r durch die Größen x_1, $f(x_1)$, $\frac{df(x_1)}{dx}$, $\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$ ausgedrückt erscheinen, und setzen diese für a, b und r erhaltenen Werthe in die allgemeine Gleichung des Kreises, so haben wir in derselben die Gleichung eines Kreises, welcher eine beliebige Curve, deren Ordinate f(x) ist, in einem Punkte, dessen zugehörige Abscisse den beliebigen Werth x_1 hat, im zweiten Grade berührt.

Aus der Gleichung

$$y = b \pm [r^2 - (x-a)^2]^{\frac{1}{2}}$$

erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{x-a}{[r^2-(x-a)^2]^{\frac{1}{2}}} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{r^2}{[r^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mithin sind unsere drei Bedingungsgleichungen

$$b \pm [r^2-(x_1-a)^2]^{\frac{1}{2}} = f(x_1) \quad (1)$$

$$\mp \frac{x_1-a}{[r^2-(x_1-a)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{df(x_1)}{dx} \quad (2)$$

$$\mp \frac{r^2}{[r^2-(x_1-a)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2f(x_1)}{dx^2} \quad (3).$$

Um zunächst r zu finden, brauchen wir nur die beiden Gleichungen (2) und (3) zu benutzen, weil in denselben nur die zwei Unbekannten a und r vorkommen. Aus der Gleichung (2) folgt

$$(x_1-a)^2=\frac{r^2\cdot\left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}{1+\left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2} \quad (4)$$

Setzen wir diesen Werth von $(x_1-a)^2$ in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\mp\frac{r^2}{\left[r^2-\frac{r^2\cdot\left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}{1+\left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Zusammenziehung

$$r=\mp\frac{\left[1+\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}}.$$

Es kommt uns zwar eigentlich hier nur auf die Größe des Radius des im zweiten Grade berührenden Kreises an; wollte man aber die vollständige Gleichung dieses Kreises haben, so brauchte man nur den für r gefundenen Werth in die Gleichung (4) einzuschieben, und erhielte

$$a=x_1-\frac{\frac{df(x_1)}{dx}\left[1+\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}}$$

ferner diese für a und r gefundenen Werthe in die Gleichung (1) zu setzen, und erhielte

$$b=f(x_1)+\frac{1+\left[\frac{df(x_1)}{dx}\right]^2}{\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}}$$

und endlich die drei durch die gegebenen Größen x_1, $f(x_1)$, $\frac{df(x_1)}{dx}$, $\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}$ bestimmten Ausdrücke für die drei Constanten a, b und r in die Gleichung (1) zu setzen.

Der Zusammenhang des in einem Curvenpunkte im zweiten Grade berührenden Kreises mit dem Krümmungskreise dieses Punktes ist aus dem Ausdrucke für r ersichtlich. Denn da die Krümmungsstärke oder $\frac{dW}{dL}$ bei einer Curve mit der Ordinate f(x) in einem Curvenpunkte, dessen zugehörige Abscisse x_1 ist, gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dW}{dL} = \frac{\frac{d^2f(x_1)}{dx}}{\left[1+\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

und da ferner der Radius r des Krümmungskreises dieses Punktes gleich ist $\frac{1}{\frac{dW}{dL}}$, so haben wir

$$r = \frac{\left[1+\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2f(x_1)}{dx^2}}$$

und sehen also, daß der Radius des in irgend einem Curvenpunkte im zweiten Grade berührenden Kreises zusammenfällt mit dem Radius des Krümmungskreises dieses Curvenpunktes. Nun hat der im zweiten Grade berührende Kreis im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente mit der berührten Curve. Wenn wir demnach den aus dem Werthe von $\frac{dW}{dL}$ berechneten Radius des Krümmungskreises eines Curvenpunktes senkrecht auf die Tangente dieses Punktes abtragen, so wird dieser Krümmungskreis zugleich die Curve im zweiten Grade berühren. Und da der im zweiten Grade berührende Kreis den ersten und

zweiten Differentialquotienten der Ordinaten mit der berührten Curve gemeinschaftlich hat im Berührungspunkte, und aus diesen Differentialquotienten der Ordinaten der Ausdruck für $\frac{dW}{dL}$ zusammengesetzt ist, so stellt dieser Kreis die geometrische Construction des momentanen Werthes von $\frac{dW}{dL}$ in dem öfter erwähnten Sinne vor.

Die Berechnung der Krümmungsstärke und des Radius des Krümmungskreises ist natürlich ganz unabhängig von dieser Abtragung des Kreises in der Lage, in welcher er zugleich im zweiten Grade berührt. Gewöhnlich wird bei der Erörterung der eben behandelten Aufgabe, statt, wie hier geschehen, von dem Begriffe der Krümmung und der durch die Werthe von $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ und $\frac{dW}{dL}$ bestimmten Stärke derselben auszugehen, und die Lage des Krümmungskreises als eines im zweiten Grade berührenden, oder die geometrische Construction der Krümmungsstärke, als eine Zugabe beizufügen, von dem im zweiten Grade berührenden Kreise als solchem ausgegangen, und dann der Beweis zugefügt, daß die constante Krümmung desselben mit der momentanen des berührten Curvenpunktes zusammenfällt. In sofern dabei, was oft der Fall ist, der Begriff der Krümmung und die Bestimmung ihrer Stärke durch die Werthe der Ausdrücke $\frac{\Delta W}{\Delta L}$ und $\frac{dW}{dL}$ nicht vorangestellt und bestimmt hervorgehoben wird, läßt dieser Beweis sowol in Beziehung auf Deutlichkeit als auf Bündigkeit Manches zu wünschen übrig. Das Natürlichste und Sachgemäßeste ist aber offenbar, aus dem Begriffe und Wesen der Krümmung zuerst das Verfahren ihrer Berechnung abzuleiten, und darauf das Verfahren der geometrischen Construction zu gründen. Insbesondere hat man bei diesem Gange der Untersuchung den Vortheil, daß die Bedeutung der positiven oder negativen Werthe der Krümmungsstärke

unmittelbar einleuchtend ist, indem der positive oder negative Werth des Differentialquotienten $\frac{dW}{dL}$ keinen andern Sinn hat als der jedes andern Differentialquotienten. Der Radius des Krümmungskreises, da er gleich $\frac{1}{\frac{dW}{dL}}$ ist, hat nur abgeleiteterweise einen positiven oder negativen Werth. In sofern man nun von diesem Werthe des Radius als dem Ursprünglichen ausgeht, ist es zwar auch möglich, zu zeigen, daß der Werth des Radius positiv ausfällt bei einer convexen und negativ bei einer concaven Linie, aber dieser Nachweis beschränkt sich eigentlich auf die Darlegung des Zusammenfallens dieser Bestimmungen, ohne daß in dem Radius als solchem die Bedeutung einer solchen Entgegensetzung erkenntlich ist. Daß die Bedeutung dieser Entgegensetzung des Radius nicht ohne Schwierigkeit erschienen ist, beweisen am besten die vielen zum großen Theil sehr schwerfälligen und breiten Erklärungen, die man von derselben zu geben sich gemüßigt gefunden hat.

§. 141.

Die Gleichung der Tangente bei Polarcoordinaten.

Um die Formel für die Krümmungsstärke bei Polarcoordinaten aufzufinden, wollen wir denselben Weg wie vorher einschlagen, nämlich die beim Fortschritte der Curvenlänge eintretenden Veränderungen des Winkels, welchen die Tangente mit einer gewissen Anfangsrichtung macht, betrachten, und den Differentialquotienten dieser beiden Veränderlichen durch eine Function der willkürlich Veränderlichen des Polarcoordinatensystems darstellen. Wie man eine Tangente construirt bei einer Curve, deren Gleichung für Polarcoordinaten gegeben ist, vermittelst der Subtangente, oder wie man die Subtangente berechnet, ist zwar im §. 99 schon gezeigt worden. Aber die Kenntniß einer solchen einzelnen Linie, die gegen die Tangente in einer bestimmten Lage sich befindet, reicht für die Zwecke der

analytiſchen Geometrie im Allgemeinen und für die Auf-
löſung des vorliegenden Problems nicht hin. Dazu bedarf
es der allgemeinen Gleichung der Tangente, vermöge wel-
cher wir jede beliebige Ordinate der Tangente, und nicht blos
die Subtangente, angeben können. Die allgemeine Glei-
chung einer berührenden Geraden bei Polarcoordinaten kann
nicht wie die allgemeine Gleichung der Tangente bei Paralle-
coordinaten ohne Weiteres aus der Reihe (1) §. 125 ent-
nommen werden, weil bei Polarcoordinaten die Ordinaten
der geraden Linie nicht gleichmäßig wachſend ſind, und jene
Reihe nur das allgemeine Geſetz enthält für die Bildung
der Gleichungen der in irgend einem Grade berührenden
und in demſelben Grade gleichmäßig wachſenden Linien.
Vielmehr würde die aus jener Reihe entnommene Gleichung
einer im erſten Grade gleichmäßig wachſenden und in der-
ſelben Grade berührenden Linie, in ſofern ſie auf Polarcoor-
dinaten bezogen wird, die allgemeine Gleichung einer im erſten
Grade berührenden Archimedeiſchen Spirale ſein, weil in
dieſer Spirale die Polarcoordinaten gleichmäßig wachſend ſind.

Die allgemeine Gleichung der Tangente können wir
nur aus der allgemeinen Gleichung der geraden Linie ab-
leiten. Was die Aufſtellung der Gleichung einer Linie
überhaupt betrifft, ſo geht man bekanntlich dabei immer
von demjenigen Coordinatenſyſtem aus, durch welches die
Gleichung dieſer Linie ſich am leichteſten finden läßt, und
geht hernach durch Coordinatenverwandlung zu einem an-
dern Coordinatenſyſtem über. Die Gleichung der gera-
Linie iſt offenbar für Parallelcoordinaten am leichteſten zu
erhalten, und dieſelbe iſt bekanntlich $y = a + bx$. Um aus
derſelben die allgemeine Polargleichung der geraden Linie
darzuſtellen, wollen wir in Betreff der vorzunehmenden
Coordinatenverwandlung folgende Annahmen machen. Es
ab Fig. 82 die Abſciſſe einer durch ſenkrechte Parallelcoordi-
naten beſchriebenen Linie df, und in c der Anfangspunkt
der Ordinatenaxen. Der Mittelpunkt des Abſciſſenkreiſes
ſoll in dieſen Anfangspunkt der Parallelordinaten verlegt

werden. Der negative Arm der Abscissenaxe soll die Anfangsrichtung der Polarordinaten sein, und folglich im Punkte o der Nullpunkt des Abscissenkreises. Die Drehung aus dem Nullpunkte nach rechts soll positiv sein, oder die durch diese Drehung erhaltenen Bogen des Abscissenkreises sollen durch positive Zahlen ausgedrückt werden. Der Radius des Abscissenkreises erhält immer den Zahlenwerth 1. Den veränderlichen Bogen oq oder op des Abscissenkreises wollen wir durch w und die zugehörige Polarordinate cd oder cf durch z ausdrücken, und die Parallelordinaten wie gewöhnlich durch x und y. Was unter den hier gesetzten Annahmen den Zusammenhang der beiden Ordinatensysteme betrifft, so ist unmittelbar einleuchtend, daß $z.\sin w = y$ und $-z.\cos w = x$ ist. Setzen wir also in eine Parallelcoordinatengleichung statt x und y diese Werthe, so erhalten wir eine Gleichung zwischen z und w, und somit die verlangte Polargleichung. Nehmen wir in der Gleichung $y = a + bx$ der geraden Linie diese Substitutionen vor, so erhalten wir

$$z.\sin w = a - b.z.\cos w \text{ oder}$$

$$z = \frac{a}{\sin w + b\cos w}$$

und dies ist die allgemeine Polargleichung der geraden Linie.

Soll eine gerade Linie Tangente einer Curve sein, so muß sie, wie leicht zu sehen, auch bei Polarordinaten im Berührungspunkte dieselbe Ordinate und denselben ersten Differentialquotienten der Ordinaten haben als die berührte Curve. Die Ordinate der berührten Curve, die eine ganz beliebige Function von w ist, sei vorgestellt durch $f(w)$. Die Gleichungen der berührten Curve und der Tangente sollen auf dieselben Ordinaten bezogen sein. Bezeichnen wir den einzelnen übrigens ganz beliebigen Werth von w, für welchen die Berührung der Tangente stattfinden soll, durch w_1, so muß der Werth, den die Ordinate fw annimmt für den Werth w_1 der Abscisse, oder fw_1 gleich sein dem Werthe, den die Ordinate der geraden Linie hat für

denſelben Werth der Abſciſſe, d. h. gleich $\frac{a}{\sin w_1 + b \cos w_1}$. Ebenſo muß der für w_1 genommene erſte Differentialquotient von fw, d. h. $\frac{df w_1}{dw}$ gleich ſein dem für w_1 genommenen erſten Differentialquotienten der Function $\frac{a}{\sin w + b \cos w}$. Der erſte Differentialquotient dieſer Function von w iſt $\frac{a(b \sin w - \cos w)}{(\sin w + b \cos w)^2}$. Wir erhalten alſo, wenn die allgemeine Gleichung der geraden Linie in die allgemeine Gleichung der Tangente übergehen ſoll, für dieſelbe die beiden Bedingungsgleichungen

$$fw_1 = \frac{a}{\sin w_1 + b \cos w_1} \quad (1)$$

$$\frac{df w_1}{dw} = \frac{a(b \sin w_1 - \cos w_1)}{[\sin w_1 + b \cos w_1]^2} \quad (2).$$

Die beiden Werthe von a, die ſich aus beiden Gleichungen ergeben, ſind

$$a = fw_1 (\sin w_1 + b \cos w_1)$$

$$a = \frac{df w_1}{dw} \cdot \frac{[\sin w_1 + b \cos w_1]^2}{b \sin w_1 - \cos w_1}.$$

Setzen wir dieſe Werthe von a unter einander gleich, und löſen die dadurch entſtehende Gleichung auf in Bezug auf b, ſo erhalten wir

$$b = \frac{\frac{df w_1}{dw} \cdot \sin w_1 + fw_1 \cos w_1}{fw_1 \sin w_1 - \frac{df w_1}{dw} \cdot \cos w_1}.$$

Dieſen Werth von b eingeſetzt in die Gleichung (1) ergibt ſich

$$a = \frac{(fw_1)^2}{fw_1 \sin w_1 - \frac{df w_1}{dw} \cdot \cos w_1}.$$

Wenn wir dieſe Werthe, welche die Größen a und b in der allgemeinen Gleichung der geraden Linie annehmen für

Fall, daß die gerade Linie eine Curve mit der Ordinate fw für den Werth w_1 der Abscisse im ersten Grade berührt, in die allgemeine Gleichung der geraden Linie einsetzen, so erhalten wir

$$z = \frac{(fw_1)^2}{fw_1 \sin w_1 - \frac{df w_1}{dw} \cdot \cos w_1}$$
$$\sin w + \left[\frac{\frac{df w_1}{dw} \cdot \sin w_1 + fw_1 \cos w_1}{fw_1 \sin w_1 + \frac{df w_1}{dw} \cdot \cos w_1}\right] \cos w$$

$$z = \frac{(fw_1)^2}{\left[fw_1 \sin w_1 - \frac{df w_1}{dw} \cdot \cos w_1\right] \sin w + \left[\frac{df w_1}{dw} \cdot \sin w_1 + fw_1 \cos w_1\right] \cos w}$$

und somit die allgemeine Gleichung der Tangente. Die Buchstaben w und w_1 sind wohl zu unterscheiden in dieser Formel, indem w den fließenden oder veränderlichen Werth der Abscisse angibt, für welchen eine beliebige Ordinate der Tangente berechnet werden soll, und w_1 den festen Werth der Abscisse, für welchen die Berührung der Tangente stattfinden soll.

Dieser allgemeine Ausdruck für die Ordinate der Tangente ist von dem mannichfaltigsten und ausgedehntesten Gebrauche. Der nächste und unmittelbarste ist, irgend eine bestimmte Ordinate der Tangente zu berechnen, was so viel heißen will als statt des w einen Werth zu setzen, der mit w_1 in irgend einem bestimmten Zusammenhange steht. Die sogenannte Subtangente z. B. ist diejenige Ordinate der Tangente, welche auf der Ordinate des Berührungspunktes senkrecht steht (siehe §. 99). Ist der Werth von $\frac{df w_1}{dw}$ positiv, so geht die Subtangente durch einen Punkt des Abscissenkreises, welcher gleich $w_1 - \frac{\pi}{2}$ ist. Wenn wir dem-

nach in dem allgemeinen Ausdrucke für die Ordinate der Tangente ſtatt des veränderlichen w den Werth $w_1 - \frac{\pi}{2}$ ſetzen, ſo wird, da $\sin\left(w_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos w_1$ und $\cos\left(w_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \sin w_1$

$$\frac{(fw_1)^2}{-\left[fw_1 \sin w_1 - \frac{df w_1}{dw} \cdot \cos w_1\right] \cos w_1 + \left[\frac{df w_1}{dw} \cdot \sin w_1 + fw_1 \cos w_1\right] \sin w_1}$$

oder $\dfrac{(fw_1)^2}{\frac{df w_1}{dw}}$

der Werth der beſtimmten Ordinate, welche die Subtangente heißt, und iſt mit dem §. 99 gefundenen Ausdrucke derſelben identiſch.

§. 142.

Ausdruck der Krümmungsſtärke bei Polarcoordinaten.

Der Winkel dac Fig. 82, den eine Tangente da mit der Anfangsrichtung der Ordinaten macht, ſoll W heißen, wobei vorausgeſetzt iſt, daß W durch eine aus der Richtung ac nach links gehende Drehung beſchrieben iſt. W iſt wol als die Curvenlänge L ſind Functionen der Abſciſſe w. Wenn wir $\frac{dW}{dw}$ durch $\frac{dL}{dw}$ dividiren, ſo erhalten wir $\frac{dW}{dL}$ als Function von w, und folglich die momentane Krümmungsſtärke als Function von w. Den Ausdruck für $\frac{dW}{dw}$ können wir nicht unmittelbar aufſtellen, ſondern wir müſſen erſt W als Function von w darſtellen, um den Differentialquotienten durch Differentiiren bilden. Ziehen wir gc ſenkrecht auf die Anfangsrichtung der Ordi-

ten, so ist $\frac{gc}{ac}$ die trigonometrische Tangente des Winkels W, und in sofern wir, wie oben angenommen, die ganze Umdrehung durch die Zahl 2π ausdrücken, ist der Werth von W gleich dem des Bogens, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{gc}{ac}$ ist. gc ist aber diejenige Ordinate der Tangente ag, für welche die Abscisse w den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat, und ac ist die Ordinate der Tangente, für welche w den Werth 0 hat. Aus dem allgemeinen Ausdrucke der Ordinate der Tangente folgt, indem wir $w=\frac{\pi}{2}$ setzen,

$$gc=\frac{(fw_1)^2}{fw_1 \sin w_1-\frac{df w_1}{dw}.\cos w_1}$$

und indem wir $w=0$ setzen,

$$ac=\frac{(fw_1)^2}{\frac{df w_1}{dw}.\sin w_1+fw_1\cos w_1}.$$

Da nun $W=\text{Arc}\left(tg=\frac{gc}{ac}\right)$, so haben wir allgemein

$$W=\text{Arc}\left[tg=\frac{\frac{df w_1}{dw}.\sin w_1+fw_1\cos w_1}{fw_1\sin w_1-\frac{df w_1}{dw}.\cos w_1}\right].$$

In der Gleichung der Tangente war unter w_1 zwar ein einzelner aber ganz beliebiger Werth von w vorgestellt. Der für W gefundene Ausdruck bezieht sich demnach auf alle beliebigen Werthe von w. Indem wir W veränderlich denken bei unserer Untersuchung über die Krümmung, so ist auch w_1 veränderlich zu denken, und es wird angemessen sein, in dem Ausdrucke für W überall w statt w_1 zu schreiben. Setzen wir in der schon oft gebrauchten Gleichung

$\frac{d\,\mathrm{Arc}(tg=x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$ ſtatt x eine Function f(x) als willkürlich Veränderliche, ſo erhalten wir

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}[tg=f(x)]}{df(x)}=\frac{1}{1+[f(x)]^2}$$

und wenn wir ſtatt df(x) ſetzen $\frac{df(x)}{dx}\,.\,dx$, und mit $\frac{df(x)}{dx}$ die Gleichung multipliciren, haben wir

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}[tg=f(x)]}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}}{1+[f(x)]^2}.$$

Nach dem Schema dieſer letzten Gleichung erhalten wir, indem wir $\frac{\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\sin\omega+f\omega\cos\omega}{f\omega\sin\omega-\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\cos\omega}$ ſtatt f(x) ſetzen

$$\frac{d\,\mathrm{Arc}\left[tg=\frac{\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\sin\omega+f\omega\cos\omega}{f\omega\sin\omega-\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\cos\omega}\right]}{d\omega}$$

$$=\frac{d\left[\frac{\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\sin\omega+f\omega\cos\omega}{f\omega\sin\omega-\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\cos\omega}\right]}{d\omega}$$

$$1+\left[\frac{\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\sin\omega+f\omega\cos\omega}{f\omega\sin\omega-\frac{df\omega}{d\omega}\,.\,\cos\omega}\right]^2$$

Durch Ausführung der vorgeſchriebenen Differentiation und gehörige Zuſammenziehung geht die rechte Seite dieſer Gleichung über in den Ausdruck

$$\frac{fw \cdot \frac{d^2 fw}{dw^2} - (fw)^2 - 2\left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}{(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}$$

mithin ist die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{dW}{dw} = \frac{fw \cdot \frac{d^2 fw}{dw^2} - (fw)^2 - 2\left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}{(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}$$

Wir müssen nun auch noch den Ausdruck für $\frac{dL}{dw}$ haben. Da derselbe in früheren Uebungsbeispielen noch nicht vorgekommen ist, so wollen wir ihn hier entwickeln. Die Linie ad Fig. 83 sei eine beliebige Curve, deren Ordinate gleich fw ist. Es handelt sich darum den Grenzwerth zu bestimmen, welchem sich der Quotient von ad und fg um so mehr nähert, je kleiner die Zunahme fg der Abscisse genommen wird, und zwar diesen Grenzwerth darzustellen als Function des beliebigen Abscissenwerthes, von welchem aus die Zunahme fg genommen ist. Da cf den Zahlenwerth 1 hat, und ca den Werth fw, so wird, wenn wir mit dem Radius ea den Kreisbogen ab beschreiben, bei jeder beliebigen Verkleinerung von fg der Bogen ab immer fw mal so groß sein als fg. Es reicht also, um den Grenzwerth des Quotienten $\frac{ad}{af}$ zu erhalten, auch hin, den Grenzwerth des Quotienten $\frac{ad}{ab}$ aufzustellen, und dann den Nenner desselben fw mal zu verkleinern, oder den Quotienten mit fw zu multipliciren. Indem wir die Linie cd nach der Lage der Linie ca zurückgedreht denken, so nähert sich das gemischtlinigte Dreieck abd ohne Ende einem geradlinigten, dessen eine aus dem Bogen ab hervorgegangene Seite senkrecht auf der zurückgedrehten Linie cd steht, und dessen andere aus dem Bogen ad hervorgegangene Seite die Richtung der Tangente ae hat. Die Grenze,

welcher sich der Quotient $\frac{db}{fg}$ bei Verkleinerung von … ohne Ende nähert, ist nichts Anderes als $\frac{df\omega}{d\omega}$. Da … Grenze des Quotienten $\frac{db}{ab}$ $f\omega$ mal so klein ist, so ist … selbe gleich $\frac{1}{f\omega}\cdot\frac{df\omega}{d\omega}$. Folglich ist in dem angestr… ten rechtwinkligen Dreieck die der Ecke a gegenüb… gende Kathete $\frac{1}{f\omega}\cdot\frac{df\omega}{d\omega}$ mal so groß als die anlieg… Kathete. Setzen wir also die Letztere gleich 1 und … nach die Andere gleich $\frac{1}{f\omega}\cdot\frac{df\omega}{d\omega}$, so ist die Hypote… gleich $\sqrt{1+\frac{1}{(f\omega)^2}\cdot\left(\frac{df\omega}{d\omega}\right)^2}$. Der Ausdruck der … tenuse des angestrebten Dreiecks dividirt durch die der … a anliegende Kathete, oder, da diese Kathete gleich 1 … setzt war, dieser Ausdruck selbst ist der Grenzwerth … Quotienten $\frac{ad}{ab}$; und da derselbe, wie oben schon erw… $f\omega$ mal so klein ist als der Grenzwerth des Quotie… $\frac{ad}{fg}$, d. h. als der Differentialquotient von Curv… und Abscisse, so ist

$$\frac{dL}{d\omega}=f\omega\cdot\sqrt{1+\frac{1}{(f\omega)^2}\cdot\left(\frac{df\omega}{d\omega}\right)^2}$$

$$\frac{dL}{d\omega}=\sqrt{(f\omega)^2+\left(\frac{df\omega}{d\omega}\right)^2}.$$

Wenn wir den obigen Ausdruck von $\frac{dW}{d\omega}$ durch $\frac{dL}{d\omega}$ … diren, so erhalten wir $\frac{dW}{dL}$ oder die Krümmungsf… Es ist also

$$\frac{dW}{dL} = \frac{fw \cdot \frac{d^2 fw}{dw^2} - (fw)^2 - 2\left(\frac{dfw}{dw}\right)^2}{\left[(fw)^2 + \left(\frac{dfw}{dw}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieser Werth der Krümmungsstärke wird positiv ausfallen, wenn mit der Vergrößerung von L, oder was als dasselbe betrachtet werden darf, mit der Vergrößerung von w eine Vergrößerung von W, d. h. eine Drehung der Tangenten nach links verbunden ist, und negativ, wenn mit dem Wachsen des w eine Drehung der Tangenten nach rechts verbunden ist.

§. 143.

In der krummen Linie cbdea Fig. 47 (B. I.) ist in a der Nullpunkt des Abscissenkreises gesetzt, und $fw = \frac{1}{2\pi} \cdot w$. Beispiele von der Krümmungsstärke bei Polarcoordinaten.

Da hier $\frac{dfw}{dw} = \frac{1}{2\pi}$ und $\frac{d^2 fw}{dw^2} = 0$ ist, so haben wir

$$\frac{dW}{dL} = \frac{-\frac{w^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}}{\left[\frac{w^2}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2}\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\pi(w^2+2)}{(w^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Krümmung ist hier durchaus negativ, weil mit dem Wachsen des w immer eine Drehung der Tangenten nach rechts verbunden ist. Im Punkte c, wo $w=0$ ist, hat die Krümmung den Werth -4π, und der Radius des Krümmungskreises ist $\frac{1}{4\pi}$. Im Punkte a, wo $w=2\pi$, ist die Krümmung gleich $\frac{-2\pi(4\pi^2+2)}{(4\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Je größer w wird, desto mehr verschwindet die Zahl 1 und 2 gegen w^2. Läßt man diese Zusätze wegfallen, so geht der Ausdruck der

Krümmungsstärke über in $\frac{2\pi}{w}$, d. h. je größer w wi
desto mehr steht die Abnahme der Krümmung im gan
Verhältniß zu w, und die Krümmung nähert sich
Nullwerth.

In der Curve gek Fig. 48 ist in a der Nullp
des Abscissenkreises, und $fw = \frac{1}{w}$. Da hier $\frac{df w}{dw} = -$
und $\frac{d^2 fw}{dw^2} = \frac{2}{w^3}$, so ist

$$\frac{dW}{dL} = \frac{\frac{1}{w} \cdot \frac{2}{w^3} - \frac{1}{w^2} - 2\frac{1}{w^4}}{\left[\frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dW}{dL} = -\frac{w^6}{(w^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $w = 0$ ist auch die Krümmung Null. Im Punkt
wo $w = 1$, ist die Krümmung $-\frac{1}{2}$, und der Radius
Krümmungskreises also doppelt so groß als der des
scissenkreises abf. Da für große Werthe von w die Zah
als wegfallend gegen w^3 betrachtet werden kann, un
diesem Falle die Krümmung kurzweg gleich $-w$ wird,
sieht man, daß die Krümmung dieser Curve zuletzt im g
den Verhältniß von w wächst.

Die Gleichung einer Linie sei $fw = \sin w$, und d
das Krümmungsgesetz derselben bestimmt werden.
$\frac{df w}{dw} = \cos w$ und $\frac{d^2 fw}{dw^2} = -\sin w$, so ist

$$\frac{dW}{dL} = \frac{-\sin^2 w - \sin^2 w - 2\cos^2 w}{[\sin^2 w + \cos^2 w]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{1}.$$

Die Krümmung dieser Curve ist constant und gleich 2,
doppelt so groß als die Krümmung des Abscissenkre
Die durch die Gleichung $fw = \sin w$ bestimmte Curve

also selbst ein Kreis, welcher, da für $w=0$ auch $\sin w=0$ ist, durch den Mittelpunkt des Abscissenkreises gehen muß. In der That erhält man, wenn man den Kreis a b d Fig. 84 als Abscissenkreis und den Punkt a als Nullpunkt desselben nimmt, durch Construction der Function $\sin w$ den Kreis b c.

Untersuchen wir noch das Krümmungsgesetz der Curve, deren Gleichung ist

$$fw = \frac{a}{\sin w + b\cos w}.$$

Lassen wir die Ausführung der Differentiation bei Seite, und nehmen nur die Resultate derselben, so ist

$$\frac{df w}{dw} = -\frac{a(\cos w - b\sin w)}{(\sin w + b\cos w)^2}$$

und $$\frac{d^2 f w}{dw^2} = \frac{a}{\sin w + b\cos w} + \frac{2a(\cos w - b\sin w)^2}{(\sin w + b\cos w)^3}.$$

Der Zähler des Ausdruckes der Krümmung ist demnach gegeben durch die Function

$$+\frac{a^2}{(\sin w + b\cos w)^2} + \frac{2a^2(\cos w - b\sin w)^2}{(\sin w + b\cos w)^4}$$
$$-\frac{a}{(\sin w + b\cos w)^2} - \frac{2a^2(\cos w - b\sin w)^4}{(\sin w + b\cos w)^6}.$$

Da dieser Zähler gleich Null ist, und der Nenner nicht, so ist die Krümmung gleich Null, und durch die obige Gleichung, wie wir auch aus §. 141 schon wissen, die gerade Linie vorgeschrieben.

Am Schlusse dieser Lehre von der Krümmungsstärke mag noch eine nachträgliche Bemerkung Platz finden. Nach Beantwortung der Frage, wie groß die Krümmung eines Curvenpunktes oder die momentane Stärke des Wachsens der Größen W und L ist, kann die Frage aufgeworfen werden, wie groß die Beschleunigung des Wachsens der Größen W und L ist, oder wie stark die Krümmung sich verändert. Denn wenn die Krümmung sich stetig verändert, so gibt es allaugenblicklich eine bestimmte Größe dieser Veränderung. Um diese bestimmen zu können, ist es nöthig, zuerst ein Maß für die Veränderung der Krüm-

mungsstärke festzusetzen, und dasselbe durch eine bestimmte Linie zu einer anschaulichen Vorstellung zu erheben, wie der Kreis die Krümmung selbst veranschaulicht und ein Maß für dieselbe abgibt. Eine Linie, in welcher die Krümmungsstärke gleichmäßig wächst mit der Größe L, oder welche eine gleichförmige Beschleunigung des Wachsens der Größen W und L hat, wird eine solche sein, in welcher $W = a + bL + cL^2$ ist. Um diese Linie, welche die schön geschwungene Form der Linie bae Fig. 85 hat, darzustellen und durch dieselbe jede momentane Veränderung der Krümmungsstärke zu construiren, ist es unerläßlich, auf das schon oben erwähnte in der Curvenlehre von Peters angewandte Coordinatensystem und auf den Zusammenhang desselben mit andern Coordinatensystemen zurückzugehen. Da dies System aber nicht so bekannt geworden ist*), daß man die Behandlung der Curven nach demselben als etwas Geläufiges voraussetzen dürfte, so müssen wir, da wir hier doch keine Coordinatenlehre einschalten können, auf jede weitere Vertiefung in den Begriff der Krümmung, und auf die interessanten Gesetze der Wandlungen der Krümmungsstärke verzichten.

*) Vielleicht haben die zum Theil wegwerfenden Urtheile mancher Mathematiker über diese Curvenlehre der Verbreitung derselben entgegengewirkt. Ich gestehe, daß mir in einem solchen Urtheile kein Verstand zu liegen scheint. Denn ich möchte doch wissen, auf welche Weise die Mathematiker auch nur diese einfache Aufgabe, die momentane Veränderung der Krümmungsstärke durch die erwähnte Linie zu construiren, wie man die Krümmungsstärke durch den Kreis construirt, auflösen wollten ohne Anwendung dieses Coordinatensystems, geschweige denn alle anderen die Gesetze der Krümmungsveränderung betreffenden Fragen.

Dreizehntes Capitel.

Von der geradlinigten Bewegung in einem widerstehenden Medium.

§. 144.

So lange man den veränderlichen Zahlenwerth einer Raumgröße, sei es einer geraden oder krummen Linie, eines Winkels, einer Fläche, eines Kubikinhaltes oder welcher Raumgröße auch immer, als Function des veränderlichen Zahlenwerthes irgend einer andern Raumgröße betrachtet, befindet man sich auf dem Gebiete der Geometrie. Wenn man aber den veränderlichen Werth einer Raumgröße als Function des veränderlichen Zahlenwerthes der von einem beliebigen Anfangspunkte an gerechneten Zeit betrachtet, befindet man sich auf dem Gebiete der Bewegungslehre. Rein mathematisch betrachtet erscheint als das Wesentliche dabei, daß die Raumgrößen als Functionen einer veränderlichen Zahl überhaupt, die keinen räumlichen Repräsentanten hat, aufgefaßt werden sollen. Da aber alle Anwendungen, welche man von einer solchen Auffassung der Raumgrößen, als Functionen einer unräumlichen Veränderlichen, macht, sich auf die Bewegung beziehen, so wird diese den Raumgrößen zu Grunde gelegte willkürlich veränderliche Zahl lieber gleich beim Namen genannt, und man betrachtet die Raumgrößen als Functionen des fließenden Zahlenwerthes der Zeit. Es ist einleuchtend, daß diese Bewegungslehre so gut als die Geometrie ein Theil der reinen Mathematik ist, und mit äußeren Thatsachen nichts zu thun hat, und daß ferner alle irgendwo vorkommenden Bewegungsgesetze darin

enthalten ſind, weil man die abſtracten und reinen Bewegungsgeſetze unter ſo viel beliebigen und complicirten Annahmen aufſtellen kann, daß alle in der Natur irgend vorkommende Erſcheinungen von Bewegungen darunter begriffen werden können. Sache der Erfahrung oder vielmehr der Anwendung iſt dann blos dies, aus den Bedingungen einer Erſcheinung entweder zu entſcheiden, unter welches in der allgemeinen Bewegungslehre entwickelte Geſetz dieſe Erſcheinung ſubſumirt werden kann, oder zu entſcheiden, nach welcher Seite hin und für welche beſonderen Annahmen man noch die Lehrſätze der allgemeinen Bewegungslehre ausbilden muß, um diejenigen Geſetze zu finden, unter welche eine vorhandene Erſcheinung ſubſumirt werden kann. Denn die Menge der beliebigen Annahmen, unter welchen Geſetze der reinen Bewegungslehre aufgeſtellt werden können, iſt unendlich, und man wird hauptſächlich diejenigen Lehrſätze dieſer Wiſſenſchaft ausbilden, mit welchen ſich ein äußeres Intereſſe, das Intereſſe der Erklärung äußerlich dargebotener Naturerſcheinungen verbindet.

Die zu einer Bewegung gebrauchte Zeit bezeichnen wir durch t, den durchlaufenen Raum durch s, die Geſchwindigkeit durch c. In Bezug auf s iſt zu bemerken, daß man darunter eigentlich zu verſtehen hat die Bahnlänge, um welche der bewegte Körper von einem in ſeiner Bahn willkürlich genommenen Nullpunkt der Bahn entfernt iſt. Denn wenn ein Körper ſich in einer Bahn hin- und herbewegt, wie etwa ein Pendel oder ein in die Höhe ſteigender und auf derſelben Linie wieder herabfallender Körper, und Selbſtbedeckungen der Bahn ſtattfinden, ſo wäre es mit Unbequemlichkeiten verbunden, wenn man unter s den nach einer gewiſſen Zeit und nach mehreren Hin- und Hergängen wirklich durchlaufenen Raum verſtehen wollte. Man verſteht daher in dieſem, wie in jedem andern Falle unter s die Bahnlänge, um welche der ſich bewegende Punkt von dem Nullpunkte der Bahn entfernt iſt. Iſt die von dem Nullpunkte der Bahn nach Einer Seite hin genommene

Bahnlänge positiv gesetzt, so ist die nach der entgegengesetzten Seite genommene Bahnlänge negativ zu setzen. Denken wir den Raum s als Function der Zeit, so ist, wie schon §. 41 nachgewiesen, der erste Differentialquotient von Raum und Zeit gleich der momentanen Geschwindigkeit desjenigen Zeitpunktes, für welchen der Differentialquotient genommen ist, oder es ist allgemein $\frac{ds}{dt}=c$. Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten gibt der Zahlenwerth, welcher gleich $\frac{ds}{dt}$ erhalten wird für einen bestimmten Werth der Zeit, die Anzahl der Raumeinheiten an, welche vermöge der vorhandenen momentanen Geschwindigkeit in Einer Zeiteinheit durchlaufen werden würden, wenn diese Geschwindigkeit unverändert bliebe. Da $\frac{ds}{dt}$ positiv oder negativ ausfällt, je nachdem mit Zunahmen der Zeit positive oder negative Incremente von s verbunden sind, so wird die Richtung einer durch eine positive Zahl ausgedrückten Geschwindigkeit in der Richtung des Wachsens von s zu nehmen sein, mag dabei s selbst einen positiven oder negativen Werth haben und die Richtung einer durch eine negative Zahl ausgedrückten Geschwindigkeit in der Richtung des Abnehmens von s.

Der zweite Differentialquotient von s und t drückt die Beschleunigung des Wachsens von s und t aus. Nach dem allgemeinen Begriffe des zweiten Differentialquotienten gibt der Zahlenwerth, welcher gleich $\frac{d^2s}{dt^2}$ erhalten wird bei einem bestimmten Werthe von t, die Raumeinheiten an, um welche der in der zweiten Zeiteinheit durchlaufene Raum größer sein würde als der in der ersten Zeiteinheit durchlaufene, wenn die bei dem bestimmten Werthe von t vorhandene momentane Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit dauernd wäre. Da $c=\frac{ds}{dt}$, so wird der

Werth von $\frac{d^2s}{dt^2}$ zusammenfallen mit dem Werthe von $\frac{dc}{dt}$

In sofern man entweder die Masse des bewegten Körp als die Einheit der Masse betrachtet, oder die Bewegu unter Umständen auffaßt, bei welchen keine Verschiedenh der Masse in Betracht kommt, so fällt die Beschleunig des Wachsens von Raum und Zeit, oder die Stärke Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit bei einer geradlin ten Bewegungsbahn mit demjenigen zusammen, was m im physischen Sinne Kraft nennt. An sich ist die B schleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, oder Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit n kein Maß der Kraft, sondern diese Beschleunigung m noch bezogen werden auf die Masse, welcher dieselbe t theilt wird. In der reinen Bewegungslehre, in welc man nur die Bewegung eines Punktes auffaßt, kann n türlich von Kraft als solcher gar keine Rede sein, sonde nur von den rein mathematischen Begriffen der Beschl nigung des Wachsens von Raum und Zeit, oder Stärke des Wachsens von Geschwindigkeit und Zeit, die Vorstellung der Kraft auf der Verbindung des Begri einer Beschleunigung des Wachsens von Raum und mit dem Begriffe der Masse beruht. In sofern man die Masse eines bewegten Körpers als die unbestimmte Ei heit der Masse betrachtet, so fällt der Begriff der K mit dem der Beschleunigung des Wachsens von Raum Zeit zusammen. Man bedient sich deshalb auch mehr der reinen Bewegungslehre des Wortes Kraft, indem m statt eines bewegten Punktes sich einen bewegten Kör mit der unbestimmten Masseneinheit denkt. In dies Sinne soll in dem Folgenden das Wort Kraft gebra werden. Drücken wir die Kraft ebenso wie die Gesch digkeit durch ein einfaches Zeichen aus, durch v, so hab wir in den Gleichungen

$$\frac{ds}{dt} = c \quad \text{und} \quad \frac{d^2s}{dt^2} \text{ oder } \frac{dc}{dt} = v$$

die Fundamentalsätze zunächst der geradlinigten Bewegung, aber damit auch aller Bewegung überhaupt, weil die Gesetze der krummlinigten Bewegung sich aus denen der geradlinigten ableiten lassen.

Was zunächst die geradlinigte Bewegung betrifft, so sieht man, daß das Gesetz einer solchen Bewegung vollkommen bestimmt ist, wenn irgend eine der vier Größen t, s, c, v als Function irgend einer andern unter denselben gegeben ist. Aufgabe der Lehre von der geradlinigten Bewegung wird es also sein, aus der zwischen zweien von den Größen t, s, c, v gegebenen Gleichung die Gleichung zwischen jeden zwei andern von diesen Größen abzuleiten. Um diese Aufgabe vollständig zu lösen, nehmen wir alle Combinationen dieser vier Elemente zu zweien, betrachten die Gleichung zwischen den combinirten Elementen als gegeben, und leiten die Gleichungen zwischen jedem Paar der Elemente daraus her. Indem wir bei einer zwischen zweien von diesen Größen, z. B. zwischen t und s, gegebenen Gleichung den Fall, in welchem s als Function von t gegeben ist, nicht unterscheiden von demjenigen, in welchem t als Function von s gegeben ist, so erhalten wir nur sechs Fälle von gegebenen Gleichungen. Es kann nämlich gegeben sein 1) s als Function von t. 2) c als Function von t. 3) v als Function von t. 4) c als Function von s. 5) v als Function von s. 6) v als Function von c.

Betrachten wir die sechs Fälle einzeln.

1) Gegeben ist s als Function von t, und gesucht ist c als Function von t und v als Function von t.

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus den obigen Fundamentalgleichungen. Denn da $s=f(t)$ gegeben ist, und daraus

$$c=\frac{df(t)}{dt} \text{ und } v=\frac{d^2f(t)}{dt^2}$$

folgt, so hat man c und v als Functionen von t.

2) Gegeben ist c als Function von t und gesucht s als Function von t und v als Function von t.

Setzt man in der gegebenen Gleichung $c=f(t)$ statt c den Ausdruck $\frac{ds}{dt}$, so hat man $\frac{ds}{dt}=f(t)$, und folglich

$$s=\int f(t).dt$$

und somit s als Function von t. Aus der gegebenen Gleichung folgt ferner $\frac{dc}{dt}=\frac{df(t)}{dt}$ oder

$$v=\frac{df(t)}{dt}$$

und also v als Function von t.

3) Gegeben ist v als Function von t, und die Functionen von t, welche gleich s und c sind, werden gesucht. Aus der gegebenen Gleichung $v=f(t)$ folgt zunächst, indem wir $\frac{dc}{dt}$ statt v setzen, $\frac{dc}{dt}=f(t)$ und folglich

$$c=\int f(t).dt.$$

Indem man in dieser letzten Gleichung $\frac{ds}{dt}$ statt c setzt, wird man aus der Gleichung $\frac{ds}{dt}=\int f(t)dt$ erhalten

$$s=\int[\int f(t)dt]dt.$$

Daß man, in sofern es sich um Lösung einer bestimmten Aufgabe der Art handelt, nach der ersten Integration in der Gleichung $c=\int f(t)dt$ erst die Constante bestimmen muß, ehe man zur zweiten Integration fortschreitet, versteht sich von selbst.

4) Gegeben ist c als Function von s und gesucht sind t und v als Functionen von s.

Aus der gegebenen Gleichung $c=f(s)$ folgt $\frac{ds}{dt}=f(s)$ oder $\frac{1}{f(s)}.ds=dt$ und folglich ist

$$t=\int\frac{1}{f(s)}.ds.$$

Da $\frac{dc}{dt} = v$, und folglich in unſerm Falle $\frac{df(s)}{dt} = v$, ſo haben wir noch, um v als Function von s zu erhalten, aus dieſer Gleichung dt zu eliminiren, und dt durch s auszudrücken. Dies kann geſchehen, indem wir in der allgemeinen Gleichung $\frac{ds}{dt} = c$ den in unſerm Falle gegebenen Werth von c, nämlich $f(s)$ ſetzen, und werden aus der Gleichung $\frac{ds}{dt} = f(s)$ erhalten $dt = \frac{ds}{f(s)}$. Wird dieſer Werth von $d(t)$ in die obige Gleichung $v = \frac{df(s)}{dt}$ ſubſtituirt, ſo ergibt ſich

$$v = \frac{df(s)}{ds} . f(s).$$

5) Gegeben iſt v als Function von s, und geſucht ſind die Functionen von s, welche gleich t und c ſind.

Die gegebene Gleichung $v = f(s)$ wird zunächſt geſchrieben $\frac{dc}{dt} = f(s)$. Um eine Gleichung blos zwiſchen c und s zu erhalten, müſſen wir dt in dieſer Gleichung eliminiren, und durch c und s ausdrücken. Dies geſchieht vermittelſt der Gleichung $\frac{ds}{dt} = c$, aus welcher wir $dt = \frac{ds}{c}$ erhalten. Setzen wir in die gegebene Gleichung dieſen Werth von dt, ſo haben wir $c.dc = f(s)ds$, und folglich, indem wir beiderſeits integriren

$$\frac{c^2}{2} = \int f(s).ds.$$

Will man c für ſich als Function von s darſtellen, ſo muß man bei einer vorgelegten beſtimmten Aufgabe zuerſt die Conſtante beſtimmen. Nennen wir dieſelbe C, ſo haben wir

$$\frac{c^2}{2} = \int f(s).ds + C$$

$$c = \sqrt{2 \int f(s) ds + C}.$$

Setzen wir, um t als Function von s zu erhalten, in dieser Gleichung $\frac{ds}{dt}$ statt c, so kommt $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2\int f(s)ds + C}$ und $dt = \frac{ds}{\sqrt{2\int f(s)ds + C}}$, folglich ist

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int f(s)ds + C}}.$$

6) Ist endlich v als Function von c gegeben, so s und t als Functionen von c zu suchen.

Schreibt man in der gegebenen Gleichung $v = \frac{dc}{dt}$ statt v, so folgt aus der Gleichung $\frac{dc}{dt} = f(c)$ nächst $dt = \frac{dc}{f(c)}$ und

$$t = \int \frac{dc}{f(c)}.$$

Um die Gleichung zwischen s und c zu erhalten, brauchen nur in der Gleichung $dt = \frac{dc}{f(c)}$ den aus der allgemeinen G chung $\frac{ds}{dt} = c$ zu entnehmenden Werth von dt zu substitu und erhalten $\frac{ds}{c} = \frac{dc}{f(c)}$, oder $ds = \frac{c.dc}{f(c)}$, und folgli

$$s = \int \frac{c.dc}{f(c)}.$$

Wir haben zwar, wenn Eine von den vier Gr t, s, c, v als Function einer Andern gegeben war, den voranstehenden Gleichungen zunächst nur die be Uebrigen als Functionen derselben willkürlich Veränderl dargestellt; aber es ist einleuchtend, daß vermöge der fundenen Gleichungen auch jede von den vier veränderl Größen als Function jeder andern erhalten werden k in jedem von den sechs Hauptfällen. Denn wollte z. B. in dem Falle (4), in welchem c als Function gegeben war, und t und v als Functionen von s gef worden sind, die Gleichung zwischen c und t aufstell

brauchte man nur die Gleichungen $c=f(s)$ und $t=\int\frac{1}{f(s)}.ds$ in Bezug auf s als Unbekannte aufzulösen, und die zwei Werthe von s, von denen der Eine durch c, der Andere durch t ausgedrückt erscheint, untereinander gleich zu setzen, um eine Gleichung zwischen t und c zu haben. Oder wollte man bei demselben Falle (4) die Gleichung zwischen v und c haben, so brauchte man nur die aus den Gleichungen $c=f(s)$ und $v=\frac{df(s)}{ds}.f(s)$ entnommenen Ausdrücke für s untereinander gleich zu setzen.

Die in den sechs Hauptfällen abgeleiteten Gleichungen geben den Gang an, den man nothwendig nehmen muß, um von einer zwischen zweien der vier Größen t, s, c, v gegebenen Gleichung zu der Gleichung zwischen jeden zweien andern dieser Größen zu gelangen, und bringen dadurch Ordnung und Plan in eine vorgelegte Untersuchung der Art. Denn die beiden aus der gegebenen Gleichung in jedem der sechs Fälle abgeleiteten Gleichungen sind überall die ersten und nächsten, die man haben muß, um zu andern Gleichungen zu gelangen. Wir haben schon im letzten Paragraphen des achten Capitels eine hierhergehörende Aufgabe gelöst. Wir hatten uns dort die Aufgabe gestellt, die geradlinigte Bewegung zu bestimmen, welche ein Körper annimmt, wenn er von einer Kraft getrieben wird, die in demselben Maße zunimmt, als die Entfernung des Körpers von einem gewissen Punkte, den wir die Gleichgewichtslage nannten, zunimmt. In dieser Aufgabe war also v, oder die Beschleunigung des Wachsens von Raum und Zeit, als Function des Raumes gegeben, und dieselbe gehörte unter den fünften der oben aufgezählten Fälle. Wenn man die in dem angezogenen Paragraphen gegebene Behandlung dieser Aufgabe nachsehen will, so wird man finden, daß die in dem Falle (5) angegebene Aufeinanderfolge der Gleichungen auch in der Lösung dieser Aufgabe vorkommt.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die über

den Zuſammenhang und die Abhängigkeit von Zeit, Raum Geſchwindigkeit und Kraft bei der geradlinigten Bewegung aufgeſtellten Sätze an ſich mit dieſen beſtimmten Größen nichts zu ſchaffen haben, ſondern ganz unabhängig von dieſer Anwendung als allgemeine ganz abſtracte Sätze aufgeſtellt werden können. Denn in ſofern man s als eine Function von t betrachtet, iſt c der erſte und v der zweite Differentialquotient dieſer Function. Wenn man nun ſtatt der benannten Zahl t eine willkürlich Veränderliche x überhaupt ſetzt, ſtatt s eine Function $f(x)$, ſtatt c die Function $\frac{df(x)}{dx}$, und $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ſtatt v, ſo ſieht man, daß man auf die über den Zuſammenhang von t, s, c und v entwickelten Sätze kommen muß, ſobald man ſich die Aufgabe ſtellt, aus jeder zwiſchen zweien der vier Größen x, $f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ gegebenen Gleichung die Gleichung zwiſchen jeden zwei andern derſelben vier Größen herzuleiten. Es ſind alſo nur ganz allgemeine abſtracte Sätze der Differentialrechnung, welche auf die benannten Größen Zeit, Raum, Geſchwindigkeit und Kraft angewandt die ſämmtlichen Geſetze der geradlinigten Bewegung darſtellen. Man ſtellt freilich dieſe Sätze, wie unzählige andere, in der Regel nur in Beziehung auf eine von denſelben zu machende Anwendung auf. Es iſt übrigens hieraus erſichtlich, daß die Differential- und Integralrechnung allein die angemeſſenen und hinreichenden Mittel darbieten kann, Geſetze der Bewegung zu finden, weil dieſe erſten und wichtigſten Geſetze der Bewegungslehre nichts weiter ſind, als in beſondere Worte eingekleidete Sätze der Differential- und Integralrechnung. Man könnte jene Sätze auch beliebig erweitern, indem man zu den vier Größen x, $f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ noch die fünfte $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, oder einen folgenden Differentialquotienten zufügte, und aus der zwiſchen zweien

dieſer Größen gegebenen Gleichung die Gleichung zwiſchen jeden zwei anderen ableitete. Man thut es aber nicht, weil in der Anwendung dieſer Sätze auf die Bewegungslehre der Fall kaum vorkommt, daß $\frac{d^2 s}{dt^2}$ oder $\frac{dv}{dt}$, d. h. die Veränderung der Kraft, als Function des Raumes oder der Geſchwindigkeit und dergleichen urſprünglich gegeben wäre.

§. 145.

Maß des Widerſtandes in einem flüſſigen Medium.

Um die in dem Folgenden aufzuſtellenden Geſetze der Bewegung in einem widerſtehenden Medium durch anſchauliche und naheliegende Beiſpiele erläutern zu können, iſt es nöthig, vorher die Größe des Widerſtandes in beliebigen Medien feſtzuſetzen. Was erſtens die Abhängigkeit des Widerſtandes von der Geſchwindigkeit des bewegten Körpers betrifft, ſo iſt dieſelbe leicht allgemein zu beſtimmen. Denn bewegt ſich ein Körper bei übrigens ungeänderter Größe und Lage der Oberflächentheile, welche das flüſſige Medium aus ſeiner Stelle drängen, mit doppelt ſo großer Geſchwindigkeit, ſo müſſen nicht blos doppelt ſo viel Flüſſigkeitstheile in Bewegung geſetzt werden, ſondern dieſe Theile müſſen auch in der Hälfte der Zeit eine ebenſo große Verſchiebung aus ihrer Lage erhalten, d. h. dieſen Flüſſigkeitstheilen muß eine doppelt ſo große Geſchwindigkeit ertheilt werden. Nun gehört aber, um einer doppelt ſo großen Maſſe eine doppelt ſo große Geſchwindigkeit in einer gewiſſen Zeit zu ertheilen, eine viermal ſo große Kraft dazu als um der einfachen Maſſe in derſelben Zeit die einfache Geſchwindigkeit zu ertheilen. Folglich wird auch die auf den mit doppelter Geſchwindigkeit bewegten Körper ausgeübte Kraft des Widerſtandes viermal ſo groß ſein als die auf den mit einfacher Geſchwindigkeit bewegten Körper, und überhaupt wird die Kraft des Widerſtandes im quadratiſchen Verhältniſſe der Geſchwindigkeit des bewegten Körpers zunehmen.

Es fragt ſich nun, wie groß dieſe Kraft des Widerſtandes iſt, wenn in einem Medium von beſtimmter Dichtigkeit eine ebene Fläche mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit ſich ſo fortbewegt, daß die Richtung der Bewegung ſenkrecht auf die ebene Fläche iſt. Dieſe Kraft des Widerſtandes wird wie jede andere Kraft ausgedrückt durch ein Gewicht, d. h. durch den Druck, welchen eine gewiſſe Maſſe auf die Oberfläche der Erde ausübt. In dieſem Drucke hat man beide Beſtimmungen, auf welche es bei dem Begriffe der Kraft ankommt, nämlich eine Maſſe, und eine in dieſer Maſſe ſtattfindende Beſchleunigung des Wachſens von Raum und Zeit, zuſammen. Denn indem ich ſage, ein Gewicht von drei Pfunden, ſo drücke ich damit nicht blos eine beſtimmte Maſſe aus, ſondern eine Maſſe, welche einer beſtimmten Beſchleunigung, nämlich der bekannten durch die Schwerkraft hervorgebrachten Beſchleunigung, unterworfen iſt. Ob der Körper, dem ich dieſe Beſchleunigung beilege, ruht oder ſich bewegt, iſt für die Beſchleunigung ganz gleichgültig. Denn die Geſchwindigkeit oder der erſte Differentialquotient von Raum und Zeit kann wohl Null ſein, ohne daß das Beſtreben, dieſe Geſchwindigkeit zu ändern, d. h. der zweite Differentialquotient von Raum und Zeit, gleich Null zu ſein braucht, wie ja auch ein ſenkrecht ſteigender und wieder herabfallender Körper in demjenigen Zeitpunkte, in welchem die ſteigende Bewegung in die fallende übergeht, und die Geſchwindigkeit gleich Null iſt, noch dieſelbe Beſchleunigung der Schwerkraft hat wie in allen andern Zeitpunkten. Weil ein Gewicht eine Maſſe und eine Beſchleunigung zugleich ausdrückt, ſo wird man, ſobald eine Kraft durch ein Gewicht angegeben iſt, im Stande ſein, die durch dieſe Kraft in jeder beliebigen Maſſe hervorgebrachte Beſchleunigung zu beſtimmen; denn die Beſchleunigung nimmt in demſelben Maße ab, als die Maſſe oder, was daſſelbe iſt, der Trägheitswiderſtand zunimmt. Wenn z. B. eine Kraft, die dem Drucke von fünf Pfunden gleich iſt, auf eine Maſſe von 100 Pfunden wirkt, ſo

hat dieſelbe eine Beſchleunigung, welche dem zwanzigſten Theile der Beſchleunigung des freien Falles gleich iſt, oder der in jeder folgenden Secunde durchlaufene Raum iſt um $\frac{3}{2}$ Fuß größer als der in der vorhergehenden Secunde durchlaufene.

Bei Beſtimmung des Druckes, den eine Flüſſigkeit auf eine Fläche ausübt, iſt es offenbar einerlei, ob ich annehme, daß dieſe Fläche mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit ſich in einem flüſſigen Medium fortbewegt, oder ob ich annehme, daß die Fläche ruht, und die Flüſſigkeit ſich mit derſelben Geſchwindigkeit bewegt, und an die widerſtehende Fläche antrifft. Ferner iſt es für die Beſtimmung einer Kraft gleichgültig, ob dieſelbe ſich dadurch äußert, daß ſie einer beſtimmten Maſſe in einer gewiſſen Zeit eine beſtimmte Geſchwindigkeit ertheilt, oder dadurch, daß ſie dieſer Maſſe in derſelben Zeit dieſe Geſchwindigkeit entzieht, ſowie es auch gleichgültig iſt, ob eine Kraft darnach abgeſchätzt wird, daß ſie beſtrebt iſt einer beſtimmten Maſſe in einer gewiſſen Zeit eine beſtimmte Geſchwindigkeit zu ertheilen, ohne daß wirklich eine Bewegung entſteht, oder darnach, daß ſie die Entſtehung dieſer Geſchwindigkeit in dieſer Maſſe verhindert.

Die letztere Weiſe, die Kraft zu ſchätzen, wird uns dienen, den Druck, welchen eine bewegte Flüſſigkeit auf eine widerſtehende Fläche ausübt, in Pfunden auszudrücken. Denken wir ein mit Waſſer gefülltes Gefäß, ſo iſt der Druck, den daſſelbe auf jeden Flächentheil des Bodens oder einer Seitenwand ausübt, gleich dem Gewicht einer Waſſerſäule, welche dieſen Flächentheil zur Grundfläche, und die Tiefe deſſelben unter dem Niveau zur Höhe hat. Macht man eine Oeffnung in den Boden, ſo fließt bekanntlich das Waſſer aus mit derjenigen Geſchwindigkeit, welche ein frei fallender Körper erhalten haben würde, wenn er von dem Niveau des Waſſers bis auf den Boden heruntergefallen wäre. Da nun gleichviel Kraft erfordert wird,

dem Waſſer dieſe Geſchwindigkeit, wenn es ſie ſchon hat, zu entziehen, oder die Entſtehung dieſer Geſchwindigkeit zu verhindern durch einen Gegendruck, ſo ſieht man, daß der Druck, den eine mit beſtimmter Geſchwindigkeit fließende Waſſermaſſe auf eine ihr entgegenſtehende Fläche ausübt, gleich iſt dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche dieſe Fläche zur Grundfläche hat, und deren Höhe gleich iſt derjenigen Fallhöhe, die der Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers zugehörig iſt. Was den Zuſammenhang einer Fallhöhe und der bei dem Falle durch dieſe Höhe erlangten Endgeſchwindigkeit betrifft, ſo iſt bekanntlich, wenn man die Fallhöhe h in Fußen ausdrückt, die Endgeſchwindigkeit ſo groß, daß vermöge derſelben in jeder Secunde $\sqrt{60h}$ Fuß zurückgelegt werden. Drücken wir die der Fallhöhe h zugehörige Geſchwindigkeit durch c aus, ſo folgt aus der Gleichung $c = \sqrt{60h}$, daß $h = \frac{c^2}{60}$. Es wird alſo, wenn eine Flüſſigkeit mit der Geſchwindigkeit c auf eine ſenkrecht entgegenſtehende Fläche F trifft, der dadurch auf dieſe Fläche hervorgebrachte Druck dem Obigen zu Folge gleich ſein dem Gewichte, welches ein Volum $F.\frac{c^2}{60}$ dieſer Flüſſigkeit hat. Durch die conſtante Zahl 60 iſt, was bei dieſem Ausdrucke des Volums nicht zu vergeſſen, vorgeſchrieben, daß c in Fußen und folglich F in Quadratfußen ausgedrückt iſt, und alſo $F.\frac{c^2}{60}$ Kubikfuße vorſtellt. Aus dieſem für die Kraft des Widerſtandes eines flüſſigen Mediums aufgefundenen Maße ergibt ſich zugleich, daß der Widerſtand im quadratiſchen Verhältniſſe der Geſchwindigkeit des bewegten Körpers wächſt, was wir ſchon im Eingange dieſes Paragraphen auf naheliegende einfache Betrachtungen geſtützt behauptet hatten.

Um ein Paar Beiſpiele der Berechnung des Widerſtandes zu geben, ſo bewege ſich das Waſſer eines Fluſſes mit einer Geſchwindigkeit von vier Fußen in der Secunde,

und es werde demſelben eine Fläche von drei Quadratfußen entgegengeſtellt, ſo daß die Richtung des Stromes ſenkrecht zur Fläche iſt. Alsdann iſt der Druck, welchen das Waſſer auf die ruhende entgegenſtehende Fläche ausübt, gleich dem Gewicht von $3 . \frac{4^2}{60}$ oder $\frac{4}{5}$ Kubikfuß Waſſer. Nehmen wir das Gewicht des Kubikfußes Waſſer zu 70 Pfunden an, ſo übt das fließende Waſſer einen Druck von 56 Pfunden auf die Fläche aus. Sollte dieſe Fläche von drei Quadratfußen in einem ſtehenden Waſſer mit einer Geſchwindigkeit von vier Fußen in der Secunde fortbewegt werden in einer Richtung, die ſenkrecht auf die Fläche iſt, ſo müßte natürlich die Fläche ebenfalls einen Druck von 56 Pfunden erfahren. Trifft die Luft mit einer Geſchwindigkeit von 20 Fußen in der Secunde ſenkrecht auf eine Wand von 48 Quadratfußen, ſo iſt der Druck auf die Wand gleich dem Gewicht von $48 . \frac{20^2}{60}$ oder 320 Kubikfuß Luft. Da bei mittlerer Temperatur die Luft ungefähr achthundertmal leichter iſt als Waſſer, ein Kubikfuß Luft alſo $\frac{7}{80}$ Pfund wiegt, ſo beträgt der Druck auf die Wand $\frac{7}{80} . 320$ oder 28 Pfund. Wenn ein Körper, z. B. ein Wagen, welcher der zu durchſchneidenden Luft eine Fläche von 48 Quadratfußen darbietet, ſich in ruhender Luft mit einer Geſchwindigkeit von 20 Fuß in der Secunde bewegt, ſo beträgt der Widerſtand in der Luft ebenfalls 28 Pfund.

§. 146.

Abhängigkeit des Widerſtandes von der Form des bewegten Körpers.

In dem Vorhergehenden iſt immer angenommen worden, daß die Richtung der Bewegung ſenkrecht auf die widerſtehende Ebene ſei. Um aber für beliebige bewegte Körper und bei beliebiger Lage derſelben die Kraft des Widerſtandes berechnen zu können, iſt es nöthig, zuerſt den Wi-

derſtandsdruck auf eine ebene Fläche, die gegen die Richtung der Bewegung geneigt iſt, zu beſtimmen, und dieſe Beſtimmung dann auf gebogene Flächen, deren einzelne Flächenelemente verſchieden geneigt ſind gegen die Richtung der Bewegung, zu übertragen.

Die Linie ab Fig. 86 ſei der Durchſchnitt einer Ebene und cd die Richtung, in welcher eine Flüſſigkeit ſich bewegt, oder die Ebene in der ruhenden Flüſſigkeit fortgeſchoben wird. Der Winkel, den dieſe Richtung mit der Ebene bildet, der Winkel dca, heiße α. Der Druck, den die Flüſſigkeit bei einer gewiſſen Geſchwindigkeit c auf einen Quadratfuß der ſenkrecht entgegenſtehenden Ebene ausübt, heiße in Pfunden ausgedrückt A. Zerlegen wir nach dem Parallelogramm der Kräfte den ſchiefen Druck in zwei ſeitliche Druckgrößen, von denen die eine ck mit der Ebene parallel, und die andere ce auf derſelben ſenkrecht iſt, ſo iſt die nach ck gerichtete Druckgröße unwirkſam auf die Ebene und die nach der Richtung ce auf einen Quadratfuß der Ebene wirkende Druckgröße verhält ſich zu A, wie ce : c. Mithin iſt die auf einen Quadratfuß der geneigten Ebene ab in ſenkrechter Richtung wirkende Druckgröße gleich $A.\sin\alpha$. Aber dieſe Druckgröße wirkt nicht ganz als Widerſtand gegen die nach cd gerichtete Bewegung der Ebene, ſondern bewirkt zum Theil eine Verſchiebung der Ebene in der Richtung, welche auf cd ſenkrecht iſt. Um die der Bewegung nach cd entgegenwirkende Kraft des Widerſtandes allein zu haben, zerlegen wir die nach ce gerichtete Kraft abermals nach dem Parallelogramm der Kräfte in die Seitenkräfte ci und ch. Um ſo viel mal ci kleiner iſt als ce, um ſo viel mal iſt die auf einen Quadratfuß der Ebene ab nach der Richtung ci wirkende Kraft des Widerſtandes kleiner als die nach der Richtung ce auf einen Quadratfuß wirkende Druckſtärke, d. h. als $A.\sin\alpha$. Da nun ci : ce $= \sin\alpha : 1$, ſo iſt die in der Richtung cd auf einen Quadratfuß wirkende Kraft des Widerſtandes gleich $A.\sin^2\alpha$. Enthält die geneigte Fläche F Quadratfuß, ſo iſt der Ge-

ſammtwiderſtand auf dieſelbe gleich $F.A.\sin^2\alpha$. Der Widerſtand, den dieſelbe Fläche findet, wenn ſie ſenkrecht auf der Richtung der Bewegung ſteht, iſt F.A. Alſo braucht man dieſen letzteren Widerſtand überall nur mit dem Quadrate des Sinus desjenigen Winkels, den die Ebene mit der Richtung der Bewegung bildet, zu multipliciren, um den Widerſtand auf die geneigte Ebene zu erhalten.

Dieſer Satz gibt uns die Mittel an die Hand, den Widerſtand bei allen Körperformen und bei allen Lagen derſelben zu berechnen. Nehmen wir an, der keilförmige Körper fcd Fig. 87 bewege ſich in einem flüſſigen Medium ſo, daß die Schärfe fa die Flüſſigkeit durchſchneidet. Die Grundfläche acd des Prismas ſei ein gleichſchenkliges Dreieck, und die Richtung der Bewegung falle zuſammen mit der auf der Baſis cd ſenkrecht ſtehenden Linie ab. Der Winkel cab iſt das α unſerer obigen Formel. Enthält die Seitenfläche feca des Prismas F Quadratfuß, ſo iſt der Geſammtwiderſtand auf die beiden Seitenwände des Keiles gleich $2F.A.\sin^2\alpha$. Die Fläche ecbh hat offenbar $F.\sin\alpha$, und die ganze Seitenfläche ecdg $2F.\sin\alpha$ Quadratfuß. Wenn man alſo den Keil umdrehte, und der Widerſtand ſenkrecht auf die Fläche eedg wirkte, ſo wäre derſelbe gleich $2F.A.\sin\alpha$. Alſo iſt der Widerſtand auf den mit ſeiner Schärfe die Flüſſigkeit durchſchneidenden Keil $\sin\alpha$ mal ſo klein als auf den mit ſeiner Baſis dieſelbe durchſchneidenden. Es möge ferner der ſenkrechte Kegel adb Fig. 88 mit ſeiner Spitze eine Flüſſigkeit ſo durchſchneiden, daß die Richtung der Bewegung mit der Achſe ac parallel iſt. Der Radius eb der Grundfläche enthalte r Fuß, die Seitenlinie ab ſei gleich S Fuß, und der Winkel cab heiße α. Alle Elemente der krummen Oberfläche des Kegels ſind um den Winkel α gegen die Richtung der Bewegung geneigt. Denken wir die krumme Oberfläche des Kegels aus einer beliebigen Anzahl ſchmaler Dreiecke zuſammengeſetzt, ſo iſt, wenn die Fläche eines ſolchen Dreiecks aeg gleich f Fuß geſetzt wird, der Widerſtand auf daſſelbe gleich $f.A.\sin^2\alpha$.

Der Widerstand auf die gesammte krumme Oberfläche des Kegels ist also diese Oberfläche multiplicirt mit A.sin$^2\alpha$. Die Oberfläche des Kegels ist gleich $r.\pi.S$ Quadratfuß. Folglich der Gesammtwiderstand gleich $r.\pi.S.A.\sin^2\alpha$. Da $\sin\alpha$ gleich $\frac{r}{S}$ ist, so kann dieser Widerstand auch durch $r^2\pi.A.\sin\alpha$ ausgedrückt werden. Der Widerstand auf die Grundfläche des Kegels, wenn dieselbe senkrecht auf die Richtung der Bewegung wäre, würde gleich $r^2.\pi.A$ sein. Auf die krumme Oberfläche ist derselbe also sinmal so klein. Durch Verkleinerung des Winkels α kann der Widerstand bei einem mit seiner Spitze durchschneidenden Kegel beliebig klein gemacht werden.

Um in einem bestimmten Falle den Widerstand aus diesen Formeln zu berechnen, muß das in denselben vorkommende A, d. h. der Widerstand auf einen zur Richtung der Bewegung senkrechten Quadratfuß, auf die im vorhergehenden Paragraphen angegebene Weise durch die Natur der Flüssigkeit und die Geschwindigkeit der Bewegung bestimmt werden. Geschieht z. B. die Bewegung in der Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit mit einer Geschwindigkeit von 600 Fuß in der Secunde, so ist A gleich dem Gewichte von $\frac{600^2}{60}$ oder 6000 Kubikfuß Luft, gleich $\frac{7}{80}$.6000 oder 525 Pfund. Nehmen wir an, daß eine Spitze, welche mit einer Kegelspitze die Luft durchschneidet, eine Geschwindigkeit von 600 Fuß in der Secunde habe. Der Radius r der Grundfläche des Kegels sei gleich $\frac{1}{60}$ und die Seitenlinie S gleich $\frac{1}{20}$ Fuß. Alsdann ist $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, und folglich nach der obigen Formel der Widerstand auf diesen Kegel gleich $\left(\frac{1}{60}\right)^2.\pi.525.\frac{1}{3}$ Pfund oder gleich 0,146.. Pfund.

Betrachten wir noch den Widerstand auf die gekrümmte Oberfläche des abgekürzten Kegels dbe Fig. 89, welche

ſich in der Richtung ſeiner Achſe ac fortbewegt. Der Radius cd ſei gleich r, der Radius ab gleich r_1, und die Seitenlinie bd gleich S Fuß. Der Winkel, den die Seitenlinie db mit der Achſe ac macht, heiße α. Alle Flächentheile der gekrümmten Oberfläche ſind um den Winkel α gegen die Richtung der Bewegung geneigt. Und da die gekrümmte Oberfläche $(r+r_1)\pi.S$ Quadratfuß enthält, ſo iſt der Widerſtand auf dieſelbe gleich $(r+r_1)\pi.S.A.\sin^2\alpha$.

Dieſen Ausdruck für den Widerſtand auf die krumme Oberfläche eines abgekürzten Kegels können wir gebrauchen, um den Widerſtand bei vielen krummen Oberflächen zu beſtimmen, deren einzelne Flächentheile nicht gleich geneigt ſind gegen die Richtung der Bewegung. Die bei weitem wichtigſte Körperform der Art iſt die Kugel, und wir wollen daher dieſelbe als Beiſpiel wählen. Die Kugel ahi Fig. 90 bewege ſich in der Richtung hi. Durch Schnitte, welche ſenkrecht auf hi ſind, theilen wir die Kugeloberfläche in eine beliebige Anzahl Kugelzonen. Je kleiner die Zunahme dg des Durchmeſſers genommen wird, deſto mehr fällt die Kugelzone mit der Oberfläche eines abgekürzten Kegels aemn zuſammen. Da man den Geſammtwiderſtand auf einen beliebigen Kugelabſchnitt ahm betrachten kann als die Summe der Widerſtände auf unendlich viele abgekürzte Kegel, deren Höhe dg verſchwindend klein iſt, ſo iſt der Ausdruck für den Widerſtand auf einen ſolchen Kegel des Differential des Geſammtwiderſtandes. Sei hi die Abſciſſe des Kreiſes ahi, und in h der Nullpunkt derſelben, und der Radius heiße r. Die Ordinatengleichung des Kreiſes iſt alſo $y=(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Die Linie ae, welche hier die Seitenlinie eines abgekürzten Kegels vorſtellt, iſt bekanntlich bei jeder Curve $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ mal ſo groß als dg, und alſo bei dieſem Kreis, wo $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{r}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

ist, $\frac{r}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ mal so groß als dg. Bezeichnen wir die Zunahme dg der Abscisse durch dx, so ist die Seitenlinie ae des abgekürzten Kegels, oder das S der obigen Formel, gleich $\frac{r}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}.dx$. Der Winkel, welchen die Flächentheile des abgekürzten Kegels mit der Richtung der Bewegung bilden, oder der Winkel α unserer Formel, ist der Winkel abd. Der Sinus dieses Winkels ist $\frac{ad}{ba}$, oder $\frac{ef}{ae}$, also allgemein $\frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$. Für unsern Kreis ist demnach $\sin\alpha=\frac{r-x}{r}$. Die Ordinaten da und ge der Tangente ba sind die Radien der Grundflächen des abgekürzten Kegels, oder das r und r_1 unserer obigen Formel. Da dieselben bei Verkleinerung von dg sich unbegrenzt der Gleichheit nähern, so haben wir, um zu der Grenze des Ausdruckes für die Kegeloberfläche und für den Widerstand auf dieselbe überzugehen, 2ad statt ad+eg, oder statt des $r+r_1$ der Formel zu setzen, oder $r+r_1=2y=2(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu nehmen. Setzen wir nun in der obigen Formel statt S, $\sin\alpha$, und $r+r_1$ die eben gefundenen Werthe, so haben wir in dem Ausdrucke

$$2(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}.\pi.\frac{r.dx}{(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}}.A.\frac{(r-x)^2}{r^2}$$

oder $\frac{2\pi A}{r}.(r-x)^2dx$

die Grenze, welcher sich der Werth des Widerstandes auf eine einzelne Kugelzone um so mehr nähert, je kleiner dx

genommen wird. Folglich ist $\frac{2\pi A}{r}.(r-x)^2 dx$ das Differential des Widerstandes, welcher auf einen Kugelabschnitt ausgeübt wird. Nennen wir diesen Widerstand W, so erhalten wir aus der Gleichung

$$dW = \frac{2\pi A}{r}.(r-x)^2 dx$$

$$W = -\frac{2\pi A}{3r}.(r-x)^3 + C.$$

Wollen wir nicht den auf eine Kugelzone, sondern den auf einen von h aus genommenen Kugelabschnitt stattfindenden Widerstand berechnen, so haben wir für $x=0$ auch den Nullwerth von W anzunehmen. Wenn wir demgemäß die Constante C bestimmen, so erhalten wir

$$W = -\frac{2\pi A}{3r}.(r-x)^3 + \frac{2\pi A r^3}{3}.$$

Den Widerstand auf die Halbkugel oder überhaupt auf die sich bewegende Kugel erhalten wir, wenn wir in dieser Gleichung $x=r$ setzen, und derselbe ist also gleich $\frac{2}{3}.\pi.Ar^2$. Da die Fläche eines größten Kreises der Kugel gleich $\pi.r^2$, und der senkrechte Widerstand auf dieselbe also gleich $\pi.r^2.A$ ist, so sehen wir, daß derselbe durch die Krümmung der Kugel um $\frac{1}{3}$ vermindert wird.

Eine Kanonenkugel, deren Radius $\frac{1}{4}$ Fuß beträgt, bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 900 Fuß in der Secunde in Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit. Der Factor A ist bei dieser Geschwindigkeit in der Luft gleich dem Gewichte von $\frac{900^2}{60}$ oder 13500 Kubikfuß Luft, gleich $\frac{7}{80}.13500$ oder 1181 Pfund. Folglich beträgt der Druck des Widerstandes auf die Kanonenkugel $\frac{2}{3}.\pi.1181.\frac{1}{16}$ oder 154,6... Pfund.

Nehmen wir an, daß die oben erwähnte Holzkugel mit dem Durchmesser 1 und dem specifischen Gewicht $\frac{9}{10}$ mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in der Secunde sich zu bewegen angefangen habe, und fragen wir, nach wie viel Secunden ist die Geschwindigkeit 50 Fuß, so ist, da $a=207$, $c=50$ und $c_1=100$, die Anzahl der Secunden

$$t=\frac{207^2}{30.50}-\frac{207^2}{30.100}=14{,}2\ldots.$$

Um die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit zu finden, haben wir die obige Gleichung umzukehren, und in Bezug auf c aufzulösen. Es ergibt sich

$$c=\frac{c_1 . a^2}{g c_1 t+a^2}.$$

Man sieht aus dieser Formel, daß die Geschwindigkeit nach langer Zeit zwar beliebig klein aber durch den Widerstand des Mediums allein niemals gleich Null werden kann.

Um ferner die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit zu erhalten, setzen wir in die §. 144 abgeleitete Gleichung $s=\int\frac{c.dc}{f(c)}$ statt $f(c)$ die Function $-\frac{gc^2}{a^2}$, und haben

$$s=\int-\frac{a^2c.dc}{gc^2}=-\frac{a^2}{g}\int c^{-1}.dc$$

$$s=-\frac{a^2}{g}.\lg\text{nat}\,c+C.$$

Nehmen wir an, daß in irgend einem Raumpunkte die Geschwindigkeit des Körpers bekannt, und gleich c_1 ist, und nehmen wir diesen Raumpunkt als denjenigen, von welchem aus wir die Werthe von s rechnen, so daß $c=c_1$ ist für $s=0$, so bestimmt sich daraus die Constante, und wir haben

$$s=-\frac{a^2}{g}.\lg\text{nat}\,c+\frac{a^2}{g}\lg\text{nat}\,c_1$$

$$s=\frac{a^2}{g}[\lg c_1-\lg c]$$

geringere Retardation der Bewegung hervorbringt als in einem Körper mit kleinerer Masse. Eine Kugel z. B., deren Durchmesser 1 Fuß beträgt, und die sich mit einer Geschwindigkeit von 120 Fuß in der Secunde in der Luft bewegt, erleidet einen Widerstand, der gleich 11 Pfund ist. Ist nun diese Kugel von Eisen, so ist ihr Gewicht ungefähr 287 Pfund. Da ein Druck von 287 Pfund in dieser Kugel eine Beschleunigung oder überhaupt eine Veränderung der vorhandenen Geschwindigkeit hervorbringt, welche gleich ist der Beschleunigung der Schwerkraft, so wird ein Druck von 11 Pfund, der fast 26 mal so klein ist, eine 26 mal so kleine Veränderung der Geschwindigkeit hervorbringen, oder der Werth von $\frac{d^2s}{dt^2}$ wird $\frac{1}{26}$ der Beschleunigung der Schwerkraft sein. Da die Letztere für die Secunde gleich 30 Fuß ist, so wird bei der eisernen Kugel, insofern dieselbe Zeit- und Raumeinheit zu Grunde gelegt wird, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{30}{26}$ zu setzen sein. Ist dieselbe Kugel von Holz mit einem specifischen Gewichte von $\frac{9}{10}$, so ist das Gewicht derselben 33 Pfund. Ein Druck von 11 Pfund bringt in einer Masse von 33 Pfund eine Geschwindigkeitsveränderung hervor, welche gleich $\frac{1}{3}$ der Beschleunigung der Schwerkraft ist, und folglich wird bei der hölzernen Kugel in dem Moment, wo sie die angenommene Geschwindigkeit von 120 Fuß in der Secunde hat, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{30}{3}$ zu setzen sein.

Da nun die Kraft des Widerstandes bei veränderlicher Geschwindigkeit im Allgemeinen durch die Form $a.c^2$ ausgedrückt wird, so wird die durch den Widerstand hervorgebrachte Retardation der Bewegung im Allgemeinen durch einen Ausdruck von derselben Form gegeben sein, nur daß der mit c^2 verbundene Factor nicht blos in Bezug auf die

Gestalt und Größe des bewegten Körpers und die L
des widerstehenden Mediums, sondern auch in Bezu
die Masse des bewegten Körpers bestimmt werden m
Zur Bestimmung dieses constanten Factors könn
leicht auf folgende Weise gelangen. Bei jedem Körper
bei jedem widerstehenden Medium ist eine solche Gesch
keit der Bewegung denkbar, daß der Widerstand gle
Gewichte des Körpers ist. So z. B. müßte die blo
Kugel, deren Durchmesser ein Fuß und deren spec
Gewicht $\frac{9}{10}$ ist, und die, wie vorher bemerkt, 33 P
wiegt, in der Luft eine Geschwindigkeit von 207 F
der Secunde haben, damit die Kraft des Widerstand
Pfund beträgt. Denn der Widerstand auf eine Ku
allgemein $\frac{2}{3}.\pi.r^2.A$. Da nun bei der Bewegung
Luft und bei einer beliebigen Geschwindigkeit c, $A=\frac{1}{8}$
Pfund ist, und $r=\frac{1}{2}$ angenommen ist, so betrag
Widerstand auf diese Kugel $\frac{2}{3}.\pi.\left(\frac{1}{4}\right).\frac{7}{80}.\frac{c^2}{60}$ Pfu
den Werth von c zu finden, bei welchem der Wi
gleich dem Gewichte der Kugel, gleich 33 Pfund i
den wir die Gleichung

$$\frac{2}{3}\pi.\frac{1}{4}.\frac{7}{80}.\frac{c^2}{60}=33$$

und erhalten $c=207$. Auf ähnliche Weise ist be
Körper zu verfahren. Die bestimmte Geschwindig
welcher der Widerstand gleich ist dem Gewichte des
ten Körpers, heiße in dem Folgenden immer a. D
schleunigung der Schwerkraft soll durch g vorgest
den, und dieselbe ist der Geschwindigkeit a zugehörig
nen wir nun die einer beliebigen veränderlichen Ge
digkeit c zugehörige Beschleunigung oder vielmehr
dation v, so haben wir, da die Beschleunigungen b

beiden Fälle zu unterſuchen, in welchen die conſtante Kraft entweder der Widerſtandskraft entgegenwirkt oder mit derſelben vereinigt einer vorhandenen Geſchwindigkeit entgegenwirkt. Iſt ein Körper ſpecifiſch ſchwerer als die Flüſſigkeit, in welcher er ſich bewegt, ſo werden die Widerſtandskraft und die conſtante Kraft bei der fallenden Bewegung in entgegengeſetzter Richtung und bei der ſteigenden Bewegung in derſelben Richtung wirken. Iſt aber ein Körper ſpecifiſch leichter als die Flüſſigkeit, in welcher er fällt oder ſteigt, ſo wird die conſtante Kraft, die jetzt eine hebende iſt, bei der fallenden Bewegung dieſelbe Richtung haben als die Widerſtandskraft, und bei der ſteigenden Bewegung die entgegengeſetzte. Auf dieſen Unterſchied, ob die beiden Kräfte in derſelben oder in entgegengeſetzter Richtung wirken, kommt es bei den jetzt aufzuſtellenden Geſetzen allein an. In ſofern die Gewichtsverminderung, welche ein Körper durch Eintauchen in eine Flüſſigkeit erleidet, unbedeutend iſt und gegen das Gewicht des Körpers als wegfallend betrachtet werden kann, wie es bei den meiſten in der Luft eingetauchten Körpern der Fall iſt, ſo kann die für den leeren Raum geltende Beſchleunigung der Schwere als die conſtante Beſchleunigung betrachtet werden, welche mit der Beſchleunigung des Widerſtandes verknüpft erſcheint. Iſt aber der Gewichtsverluſt des Körpers in der Flüſſigkeit nicht unbedeutend gegen das Gewicht deſſelben, oder iſt er gar größer als das Gewicht, ſo hat man als conſtante Beſchleunigung nur einen Theil der Beſchleunigung der Schwere im leeren Raume zu ſetzen. Drückt man in dieſen Unterſuchungen die conſtante Beſchleunigung überall durch daſſelbe Zeichen G aus, ſo muß man wiſſen, daß in einem concreten Falle der Anwendung ſtatt G entweder 30 Fuß oder ein durch das ſpecifiſche Gewicht des Körpers und der Flüſſigkeit beſtimmter Theil von 30 zu ſetzen iſt. Wäre z. B. der Gewichtsverluſt eines Körpers in einer Flüſſigkeit $\frac{1}{3}$ von dem Gewichte des Körpers,

ſo zieht die Schwere nur mit einer Kraft, welche $\frac{2}{3}$ von dem Gewichte des Körpers iſt, und die fortzubewegende Maſſe iſt gleich dem ganzen Gewichte des Körpers. Die ſtattfindende Beſchleunigung wird alſo in dieſem Falle $\frac{2}{3}$ von der Beſchleunigung der Schwere, und gleich 20 Fuß zu ſetzen ſein. Wir wollen übrigens, da es uns nicht auf eine vollſtändige phyſikaliſche Abhandlung, ſondern auf die Erläuterung des Gebrauchs der Differential- und Integralrechnung in der Mechanik ankommt, bei den folgenden Unterſuchungen die Beſchränkung eintreten laſſen, daß der Gewichtsverluſt außer Acht gelaſſen wird, und drücken die conſtante Beſchleunigung überall durch 30 Fuß oder g aus.

Wir betrachten zuerſt den Fall, in welchem die conſtante Beſchleunigung und die Beſchleunigung oder vielmehr die Retardation des Widerſtandes in entgegengeſetzten Richtungen wirken, und in welchem alſo die conſtante Beſchleunigung die vorhandene oder durch ſie ſelbſt erzeugte Geſchwindigkeit vergrößert, während der Widerſtand dieſelbe immer vermindert. Wir haben demnach, ſo wie wir die Beſchleunigung des Widerſtandes negativ und gleich $-\frac{gc^2}{a^2}$ ſetzten, die conſtante Beſchleunigung g poſitiv zu nehmen. Und da die reſultirende Beſchleunigung v nichts Anderes ſein kann als die algebraiſche Summe beider Beſchleunigungen, ſo erhalten wir für die fallende Bewegung

$$v = g - \frac{gc^2}{a^2}.$$

Der Gang der Auflöſung der vorgelegten Aufgabe iſt natürlich ganz derſelbe als der in dem vorhergehenden Paragraphen befolgte, weil wieder die Beſchleunigung als Function der Geſchwindigkeit gegeben iſt. Setzen wir ſtatt des im §. 144 Nr. 6 vorkommenden unbeſtimmten $f(c)$ jetzt $g - \frac{gc^2}{a^2}$, ſo erhalten wir aus der gebildeten Gleichung zunächſt

$$t = \int \frac{dc}{g - \frac{gc^2}{a^2}} = \frac{1}{g} \int \frac{1}{1 - \frac{c^2}{a^2}} . dc.$$

Da $\frac{1}{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ zerlegt werden kann in die Summe der beiden Brüche $\frac{1}{2} . \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} + \frac{1}{2} . \frac{1}{1 - \frac{c}{a}}$ (siehe §. 87), so können wir die vorstehende Gleichung auch schreiben

$$t = \frac{1}{2g} \int \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} . dc + \frac{1}{2g} \int \frac{1}{1 - \frac{c}{a}} . dc$$

und weil $\int \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} . dc = a . \lg nat \left(1 + \frac{c}{a}\right)$ und $\int \frac{1}{1 - \frac{c}{a}} . dc$

$= - a . \lg nat \left(1 - \frac{c}{a}\right)$, so haben wir

$$t = \frac{a}{2g} \left[\lg nat \left(1 + \frac{c}{a}\right) - \lg nat \left(1 - \frac{c}{a}\right) \right] + C$$

$$t = \frac{a}{2g} . \lg nat \left(\frac{a + c}{a - c}\right) + C.$$

Nehmen wir an, daß der Körper in dem Moment, wo er anfängt zu fallen, die Geschwindigkeit 0 hat, so daß für $t = 0$ auch $c = 0$, so wird C selbst gleich Null, und die Gleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit ist dann ohne Weiteres

$$t = \frac{a}{2g} . \lg nat \left(\frac{a + c}{a - c}\right).$$

Wollen wir die Geschwindigkeit aus der Zeit finden, so setzen wir

$$\lg nat \left(\frac{a + c}{a - c}\right) = \frac{2gt}{a}$$

$$\frac{a + c}{a - c} = e^{\left(\frac{2gt}{a}\right)}$$

$$c = \frac{a\left(e^{\frac{2gt}{a}} - 1\right)}{e^{\frac{2gt}{a}} + 1}.$$

Die Geschwindigkeit nimmt zwar, wie man aus dieser Gleichung sieht, mit wachsender Zeit fortwährend zu, doch wird ihre Vergrößerung immer geringer, und sie nähert sich ohne Ende der constanten Geschwindigkeit a, weil je größer t wird, desto mehr die Zahl 1 gegen $e^{\frac{2gt}{a}}$ wegfällt, und die Ausdrücke $e^{\frac{2gt}{a}} - 1$ und $e^{\frac{2gt}{a}} + 1$, und folglich nicht minder die Werthe von c und a, sich der Gleichheit nähern.

Wenn wir bei der oben als Beispiel gebrauchten hölzernen Kugel mit dem Durchmesser 1 und dem specifischen Gewicht $\frac{9}{10}$, für welche bei der Bewegung in der Luft $a = 207$ war, fragen wie groß ihre Geschwindigkeit nach 10 Secunden ist, so erhalten wir

$$c = \frac{207\left(e^{\frac{600}{207}} - 1\right)}{e^{\frac{600}{207}} + 1} = 185{,}3\ldots \text{ Fuß}.$$

Setzen wir, um die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit zu erhalten, in die §. 144 Nr. 6. abgeleitete Gleichung $s = \int \frac{c.dc}{f(c)}$ die Function $g - \frac{gc^2}{a^2}$ statt f(c), so haben wir

$$s = \int \frac{c.dc}{g - \frac{gc^2}{a^2}} = \frac{1}{g}\int \frac{c.dc}{1 - \frac{c^2}{a^2}}.$$

Da der Differentialquotient von $-\frac{1}{2}a^2 \lg\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$ gleich ist $\frac{c}{1 - \frac{c^2}{a^2}}$, wie man sich durch Differentiation leicht über-

beiden Fälle zu unterſuchen, in welchen die conſtante Kraft entweder der Widerſtandskraft entgegenwirkt oder mit derſelben vereinigt einer vorhandenen Geſchwindigkeit entgegenwirkt. Iſt ein Körper ſpecifiſch ſchwerer als die Flüſſigkeit, in welcher er ſich bewegt, ſo werden die Widerſtandskraft und die conſtante Kraft bei der fallenden Bewegung in entgegengeſetzter Richtung und bei der ſteigenden Bewegung in derſelben Richtung wirken. Iſt aber ein Körper ſpecifiſch leichter als die Flüſſigkeit, in welcher er fällt oder ſteigt, ſo wird die conſtante Kraft, die jetzt eine hebende iſt, bei der fallenden Bewegung dieſelbe Richtung haben als die Widerſtandskraft, und bei der ſteigenden Bewegung die entgegengeſetzte. Auf dieſen Unterſchied, ob die beiden Kräfte in derſelben oder in entgegengeſetzter Richtung wirken, kommt es bei den jetzt aufzuſtellenden Geſetzen allein an. In ſofern die Gewichtsverminderung, welche ein Körper durch Eintauchen in eine Flüſſigkeit erleidet, unbedeutend iſt und gegen das Gewicht des Körpers als wegfallend betrachtet werden kann, wie es bei den meiſten in der Luft eingetauchten Körpern der Fall iſt, ſo kann die für den leeren Raum geltende Beſchleunigung der Schwere als die conſtante Beſchleunigung betrachtet werden, welche mit der Beſchleunigung des Widerſtandes verknüpft erſcheint. Iſt aber der Gewichtsverluſt des Körpers in der Flüſſigkeit nicht unbedeutend gegen das Gewicht deſſelben, oder iſt er gar größer als das Gewicht, ſo hat man als conſtante Beſchleunigung nur einen Theil der Beſchleunigung der Schwere im leeren Raume zu ſetzen. Drückt man in dieſen Unterſuchungen die conſtante Beſchleunigung überall durch daſſelbe Zeichen G aus, ſo muß man wiſſen, daß in einem concreten Falle der Anwendung ſtatt G entweder 30 Fuß oder ein durch das ſpecifiſche Gewicht des Körpers und der Flüſſigkeit beſtimmter Theil von 30 zu ſetzen iſt. Wäre z. B. der Gewichtsverluſt eines Körpers in einer Flüſſigkeit $\frac{1}{3}$ von dem Gewichte des Körpers,

$$s = -\frac{a^2}{2g} \cdot \lg\left[1 - \frac{\left(e^{\frac{2gt}{a}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{2gt}{a}} + 1\right)^2}\right].$$

Setzen wir in der Gleichung, durch welche t als Function von c gegeben ist, statt c den durch s ausgedrückten Werth desselben, so erhalten wir

$$t = \frac{a}{2g} \cdot \lg\left[\frac{a + a\left(1 - e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a - a\left(1 - e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

In den gefundenen Gleichungen sind die Gesetze der Fallbewegung in leichten widerstehenden Medien, bei denen der Gewichtsverlust eines Körpers gegen sein Gewicht selbst nicht in Betracht kommt, vollständig enthalten. Sie gestatten zunächst eine Anwendung auf das Fallen der festen und flüssigen Körper in der Luft. Die Dichtigkeit der Luft wird innerhalb der Grenzen der Fallbewegung unveränderlich angenommen. Einer jeden Anwendung dieser Gesetze auf die Bewegung eines Körpers von bestimmter Größe, Gestalt und Dichtigkeit muß die Bestimmung der in allen diesen Formeln vorkommenden Zahl a vorausgehen. Wollen wir z. B. die Bewegung eines Regentropfens berechnen, so haben wir a bezüglich auf eine Wasserkugel vom Radius r zu bestimmen. Der Widerstand auf eine Wasserkugel, deren Radius gleich r Fuß ist, und die sich mit einer Geschwindigkeit von c Fuß in der Secunde in der Luft bewegt, beträgt dem Obigen (§. 146) zu Folge $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{7}{80} \cdot \frac{c^2}{60}$ Pfund. Das Volum dieser Wasserkugel ist $\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$ Kubikfuß. Das Gewicht derselben also $\frac{4}{3} \cdot r^3 \pi \cdot 70$ Pfund. Da die Zahl a diejenige Geschwindigkeit vorstellt, bei welcher der Widerstand gleich ist dem Gewicht des Körpers, so ist der aus der Gleichung

$$\frac{2}{3}.\pi r^3.\frac{70}{800}.\frac{c^2}{60}=\frac{4}{3}r^3\pi.70$$

sich ergebende Werth von c gleich a. Die Gleichung gibt $c=\sqrt{96000}r=309{,}6..\sqrt{r}$. Wir sehen, daß durch Verkleinerung von r die Zahl a jeden beliebigen Grad von Kleinheit erhalten kann. Die Geschwindigkeit a ist natürlich die größte, welche ein fallender Körper annehmen kann. Denn hat er die Geschwindigkeit a, so wird er durch sein Gewicht heruntergezogen, und ein diesem Gewichte gleicher Druck des Widerstandes wirkt entgegen, und der Körper kann nun weder Beschleunigung noch Retardation seiner Bewegung haben. Aus den obigen Gleichungen, in welchen die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers als Function von t oder s dargestellt ist, ist auch ersichtlich, daß a die Grenze bildet, welcher sich der Werth von c bei wachsendem t oder s ohne Ende nähert.

Denken wir, um ein bestimmtes Beispiel zu geben, einen Regentropfen, dessen Durchmesser eine halbe Linie beträgt, so ist, da $r=\frac{1}{400}$ Fuß, $a=309{,}6.\frac{1}{20}=15{,}48$ Fuß. Fragen wir, welche Geschwindigkeit derselbe angenommen hat, wenn er von einer Höhe von tausend Fuß heruntergefallen ist, so haben wir in der Gleichung

$$c=a\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1000 statt s zu setzen. Die Zahl $e^{-\frac{2gs}{a^2}}$ ist in diesem Falle so klein, daß man durch unsere Logarithmentafeln nur die Decimalstelle angeben kann, in welcher zuerst eine von Null verschiedene Ziffer eintritt. Ueberhaupt ist aus den Formeln zu ersehen, daß Wasserkugeln innerhalb derjenigen Grenzen ihrer Größe, welche sich bei Regentropfen finden, nach dem Durchlaufen eines kleinen Fallraumes oder nach einigen Secunden ihrer Fallzeit schon fast vollkommen die ihrer Größe zukommende Geschwindigkeit a erlangt haben, so daß man die Geschwindigkeit aller aus der Atmosphäre

herunterfallender Waſſerkugeln ohne Fehler dem Maximum a gleich ſetzen kann. Sind die Waſſerkugeln unmeßbar klein, wie beim Nebel oder den Wolken, ſo kann die Zahl a ſo klein werden, daß die auch bei völlig ruhender Luft eintretende Fallbewegung ſelbſt nach längerer Zeit kaum merklich iſt, und die Körper in der Luft zu ſchwimmen ſcheinen wie in einem flüſſigen Medium, deſſen ſpecifiſches Gewicht dem der ſchwimmenden Körper gleich iſt, während doch das ſpecifiſche Gewicht dieſer ſchwimmenden Körper mehrere hundertmal größer iſt als das der Flüſſigkeit. Hat die Luft eine Bewegung aufwärts, welche der Geſchwindigkeit a gleich iſt, ſo iſt die Fallbewegung völlig aufgehoben. Da nun auch ein ſchwacher etwas ſchief gerichteter Luftzug eine vertikale Componente ſeiner Bewegung haben kann, welche der bei ſehr kleinen Körpern ſtatthabenden Geſchwindigkeit a gleich oder noch größer iſt, ſo folgt, daß ſolche Körper, wie Nebel, feiner Staub und dergleichen bei ihrer auf- und abſteigenden Bewegung ſchlechtweg nur dem jedesmaligen Luftzug zu folgen ſcheinen, und erſt bei völliger Ruhe der Luft ſich allmälig ſenken können.

Betrachten wir noch die ſenkrecht aufſteigende Bewegung in der Luft. Der Unterſchied dieſer Aufgabe von der vorhergehenden beſteht blos darin, daß die Beſchleunigung der Schwere jetzt ſo gut als die Beſchleunigung des Widerſtandes der vorhandenen Geſchwindigkeit entgegenwirken, daß beide vielmehr eine Retardation der Bewegung oder des Wachſens von Raum und Zeit ausdrücken, und alſo beide negativ zu nehmen ſind. Da übrigens die Ausdrücke dieſer Kräfte dieſelben ſind wie vorher, ſo erhalten wir für die ſteigende Bewegung die Fundamentalgleichung

$$v = -\left(g + \frac{g c^2}{a^2}\right).$$

Auch hier haben wir, da v als Function von c gegeben iſt, bei Aufſuchung der zwiſchen t, s, c und v geltenden Gleichungen den in §. 144 Nr. 6 vorgeſchriebenen Gang zu befolgen, und erhalten zuerſt

zeugen kann, ſo iſt $\int \frac{c.dc}{1-\frac{c^2}{a^2}} = -\frac{1}{2}a^2 \lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$

und folglich

$$s = -\frac{a^2}{2g}.\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+C.$$

Soll da, wo der Körper anfängt zu fallen, und $s=0$ iſt, auch $c=0$ ſein, ſo wird auch die Conſtante Null, und die Gleichung

$$s = -\frac{a^2}{2g}.\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$$

gibt den der Geſchwindigkeit c zugehörigen Raum an. Weil $1-\frac{c^2}{a^2}$ nothwendig ein ächter Bruch und folglich $\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$ negativ iſt, ſo wird der Werth von s, wie es auch in dieſem Falle nicht anders ſein darf, poſitiv erhalten.

Um die Geſchwindigkeit aus dem durchlaufenen Fallraume, wenn er gegeben wäre, zu berechnen, müſſen wir die letzte Gleichung in Bezug auf c auflöſen. Man erhält aus

$$\lg\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) = -\frac{2gs}{a^2}$$

$$1-\frac{c^2}{a^2} = e^{-\frac{2gs}{a^2}}$$

$$c^2 = a^2\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]$$

$$c = a\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Was endlich die Gleichung zwiſchen Raum und Zeit angt, ſo wird dieſelbe dadurch erhalten, daß wir die beiden für c gefundenen Ausdrücke untereinander gleich ſetzen, oder daß wir, wenn s unmittelbar als Function von t dargeſtellt werden ſoll, in dem vorher für s gefundenen Werthe ſtatt c den durch t ausgedrückten Werth von c ſetzen. Demnach iſt

$$s = -\frac{a^2}{2g} \cdot \lg\left[1 - \frac{\left(e^{\frac{2gt}{a}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{2gt}{a}} + 1\right)^2}\right].$$

Setzen wir in der Gleichung, durch welche t als Funct
von c gegeben ist, statt c den durch s ausgedrückten We
desselben, so erhalten wir

$$t = \frac{a}{2g} \cdot \lg\left[\frac{a + a\left(1 - e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a - a\left(1 - e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

In den gefundenen Gleichungen sind die Gesetze der F
bewegung in leichten widerstehenden Medien, bei de
der Gewichtsverlust eines Körpers gegen sein Gew
selbst nicht in Betracht kommt, vollständig enth
Sie gestatten zunächst eine Anwendung auf das F
der festen und flüssigen Körper in der Luft. Die D
tigkeit der Luft wird innerhalb der Grenzen der F
wegung unveränderlich angenommen. Einer jeden A
wendung dieser Gesetze auf die Bewegung eines K
pers von bestimmter Größe, Gestalt und Dichtigkeit m
die Bestimmung der in allen diesen Formeln vorko
menden Zahl a vorausgehen. Wollen wir z. B. die F
wegung eines Regentropfens berechnen, so haben wir a
züglich auf eine Wasserkugel vom Radius r zu bestimm
Der Widerstand auf eine Wasserkugel, deren Radius
r Fuß ist, und die sich mit einer Geschwindigkeit v
Fuß in der Secunde in der Luft bewegt, beträgt dem
gen (§. 146) zu Folge $\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{7}{80} \cdot \frac{c^2}{60}$ Pfund. Das
lum dieser Wasserkugel ist $\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$ Kubikfuß. Das Ge
derselben also $\frac{4}{3} \cdot r^3 \pi \cdot 70$ Pfund. Da die Zahl a die
Geschwindigkeit vorstellt, bei welcher der Widerstand
ist dem Gewicht des Körpers, so ist der aus der Gleic

$$\frac{2}{3}\cdot\pi r^3\cdot\frac{70}{800}\cdot\frac{c^2}{60}=\frac{4}{3}r^3\pi.70$$

ſich ergebende Werth von c gleich a. Die Gleichung gibt $c=\sqrt{96000}r=309{,}6..\sqrt{r}$. Wir ſehen, daß durch Verkleinerung von r die Zahl a jeden beliebigen Grad von Kleinheit erhalten kann. Die Geſchwindigkeit a iſt natürlich die größte, welche ein fallender Körper annehmen kann. Denn hat er die Geſchwindigkeit a, ſo wird er durch ſein Gewicht heruntergezogen, und ein dieſem Gewichte gleicher Druck des Widerſtandes wirkt entgegen, und der Körper kann nun weder Beſchleunigung noch Retardation ſeiner Bewegung haben. Aus den obigen Gleichungen, in welchen die Geſchwindigkeit eines fallenden Körpers als Function von t oder s dargeſtellt iſt, iſt auch erſichtlich, daß a die Grenze bildet, welcher ſich der Werth von c bei wachſendem t oder s ohne Ende nähert.

Denken wir, um ein beſtimmtes Beiſpiel zu geben, einen Regentropfen, deſſen Durchmeſſer eine halbe Linie beträgt, ſo iſt, da $r=\frac{1}{400}$ Fuß, $a=309{,}6.\frac{1}{20}=15{,}48$ Fuß. Fragen wir, welche Geſchwindigkeit derſelbe angenommen hat, wenn er von einer Höhe von tauſend Fuß heruntergefallen iſt, ſo haben wir in der Gleichung

$$c=a\left[1-e^{-\frac{2gs}{a^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1000 ſtatt s zu ſetzen. Die Zahl $e^{-\frac{2gs}{a^2}}$ iſt in dieſem Falle ſo klein, daß man durch unſere Logarithmentafeln nur die Decimalſtelle angeben kann, in welcher zuerſt eine von Null verſchiedene Ziffer eintritt. Ueberhaupt iſt aus den Formeln zu erſehen, daß Waſſerkugeln innerhalb derjenigen Grenzen ihrer Größe, welche ſich bei Regentropfen finden, nach dem Durchlaufen eines kleinen Fallraumes oder nach einigen Secunden ihrer Fallzeit ſchon faſt vollkommen die ihrer Größe zukommende Geſchwindigkeit a erlangt haben, ſo daß man die Geſchwindigkeit aller aus der Atmoſphäre

herunterfallender Waſſerkugeln ohne Fehler dem Maximum a gleich ſetzen kann. Sind die Waſſerkugeln unmeßbar klein, wie beim Nebel oder den Wolken, ſo kann die Zahl a ſo klein werden, daß die auch bei völlig ruhender Luft eintretende Fallbewegung ſelbſt nach längerer Zeit kaum merklich iſt, und die Körper in der Luft zu ſchwimmen ſcheinen wie in einem flüſſigen Medium, deſſen ſpecifiſches Gewicht dem der ſchwimmenden Körper gleich iſt, während doch das ſpecifiſche Gewicht dieſer ſchwimmenden Körper mehrere hundertmal größer iſt als das der Flüſſigkeit. Gebe die Luft eine Bewegung aufwärts, welche der Geſchwindigkeit a gleich iſt, ſo iſt die Fallbewegung völlig aufgehoben. Da nun auch ein ſchwacher etwas ſchief gerichteter Luftzug eine vertikale Componente ſeiner Bewegung haben kann, welche der bei ſehr kleinen Körpern ſtatthabenden Geſchwindigkeit a gleich oder noch größer iſt, ſo folgt, daß ſolche Körper, wie Nebel, feiner Staub und dergleichen in ihrer auf- und abſteigenden Bewegung ſchlechtweg nur der jedesmaligen Luftzug zu folgen ſcheinen, und erſt bei völliger Ruhe der Luft ſich allmälig ſenken können.

Betrachten wir noch die ſenkrecht aufſteigende Bewegung in der Luft. Der Unterſchied dieſer Aufgabe von der vorhergehenden beſteht blos darin, daß die Beſchleunigung der Schwere jetzt ſo gut als die Beſchleunigung des Widerſtandes der vorhandenen Geſchwindigkeit entgegenwirkt, daß beide vielmehr eine Retardation der Bewegung in Bezug des Wachſens von Raum und Zeit ausdrücken, und ſo beide negativ zu nehmen ſind. Da übrigens die Ausdrücke dieſer Kräfte dieſelben ſind wie vorher, ſo erhalten wir für die ſteigende Bewegung die Fundamentalgleichung

$$v = -\left(g + \frac{g c^2}{a^2}\right).$$

Auch hier haben wir, da v als Function von c gegeben iſt, bei Aufſuchung der zwiſchen t, s, c und v geltenden Gleichungen den in §. 144 Nr. 6 vorgeſchriebenen Gang zu befolgen, und erhalten zuerſt

$$t = -\int \frac{dc}{g + \frac{gc^2}{a^2}} = -\frac{a}{g}\int \frac{\frac{1}{a}dc}{1 + \frac{c^2}{a^2}}.$$

Die aus der Lehre von der Differentiation der Kreisfunctionen bekannte Gleichung $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}(tg = x)$ läßt sich leicht auf die Formel $\int \frac{\frac{1}{a}.dc}{1+\frac{c^2}{a^2}}$ ausdehnen. Denn setzt man $\frac{x}{a}$ statt x, so hat man $\frac{d\,\text{Arc}\left(tg = \frac{x}{a}\right)}{dx} = \frac{\frac{1}{a}.dx}{1+\frac{x^2}{a^2}}$, also $\int \frac{\frac{1}{a}.dx}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \text{Arc}\left(tg = \frac{x}{a}\right)$, und ebenso $\int \frac{\frac{1}{a}.dc}{1+\frac{c^2}{a^2}} = \text{Arc}\left(tg = \frac{c}{a}\right)$. Demnach ist unsere Gleichung

$$t = -\frac{a}{g}.\text{Arc}\left(tg = \frac{c}{a}\right) + C.$$

Für den Anfangszeitpunkt der Bewegung oder für $t = 0$ muß schon eine gewisse Geschwindigkeit vorhanden sein, wenn überhaupt eine steigende Bewegung stattfinden soll. Nennen wir diese Geschwindigkeit c_1, so ist

$$t = -\frac{a}{g}\text{Arc}\left(tg = \frac{c}{a}\right) + \frac{a}{g}\text{Arc}\left(tg = \frac{c_1}{a}\right)$$

$$t = \frac{a}{g}\left[\text{Arc}\left(tg = \frac{c_1}{a}\right) - \text{Arc}\left(tg = \frac{c}{a}\right)\right].$$

Die hier vorkommende Differenz zweier Bogen kann durch einen Bogen ausgedrückt werden. Denn gemäß der bekannten Gleichung

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha . tg\beta}$$

erhält man

fortwährend wachsenden Vielecke sich ihrem Flächeninhalte nach ebenfalls wie die Quadrate ihrer Radien verhalten. War man auf diese Weise zur Festsetzung des Verhältnisses von Raumgestalten gelangt, so zeigte man noch, daß jede Annahme eines andern Verhältnisses auf einen Widerspruch mit den gemachten Annahmen entweder oder mit sonst bekannten Sätzen führte; und diese Nachweisung, die man die Rückführung aufs Absurde nennt, hielt man erst für den vollgültigen Beweis der Behauptung. Es kann nicht geleugnet werden, daß die Alten durch die bei allen auch den einfachsten Untersuchungen dieser Art feststehende Forderung einer Rückführung auf das Absurde häufig in eine überflüssige pedantische Breite verfallen sind. Erinnert man sich der Art, wie die Alten beweisen, daß der Kubikinhalt eines Kegels der dritte Theil ist von dem Kubikinhalt eines Cylinders, welcher mit dem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat, oder daß die Fläche einer Ellipse sich zur Fläche eines mit der großen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises verhält wie die kleine Axe zur großen, oder wie der Flächeninhalt eines Kreises durch ein- und umgeschriebene Vielecke annähernd berechnet wurde, so wird man in diesen Verfahrungsweisen keine Analogie mit derjenigen entdecken, durch welche die heutige Analysis des Unendlichen den Flächeninhalt des Kreises, der Ellipse und den Kubikinhalt des Kegels bestimmt. Methoden, welche dieser Letzteren nahe kommen, findet man fast nur bei Archimedes, und auch bei diesem nur in seltneren Fällen. Als Beispiel diene uns die von Archimedes gegebene Berechnung des Kubikinhaltes eines paraboliſchen Kegels.

Die Linie cad Fig. 91 sei eine gemeine Parabel und cd sei senkrecht auf der Axe ab. Wird die paraboliſche Fläche um die Axe ab herumgedreht, so beschreibt sie den paraboliſchen Kegel. Der Kubikinhalt desselben soll verglichen werden mit dem Cylinder, welcher zur Grundfläche den Kreis mit dem Durchmesser cd und zur Höhe die Axe ab hat. Man theile die Axe ab in eine beliebige Anzahl

gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallele mit cd. Durch die Durchschnittspunkte dieſer Parallelen und der Parabel ziehe man Linien wie lo, mn, ik und gh parallel mit der Axe ab. Bei der Umdrehung beſchreiben die Rechtecke pqlo und pqmn Cylinder und ein paraboliſches Flächenſegment pqmo beſchreibt ein paraboliſches Kegelſegment. Der Unterſchied eines äußern und innern Rechtecks, wie das Rechteck lmno, beſchreibt einen Ring bei der Umdrehung. Der Cylinder trsu und die Summe aller Ringe ſind zuſammen offenbar dem Cylinder efcd gleich, und geben zugleich den Unterſchied an, der ſtattfindet zwiſchen der Summe aller äußern und der Summe aller innern Cylinder. Dieſer Unterſchied, oder der Cylinder fedc kann durch Vermehrung der gleichen Theile der Axe ab beliebig klein gemacht werden. Da nun bei der Parabel die Quadrate der Linien pm und qo ſich verhalten wie die Linien ap und aq, und folglich die von den Linien pm und qo als Radien bei der Umdrehung beſchriebenen Kreisflächen ſich verhalten wie die Linien ap und aq, ſo werden auch der innere Cylinder mikn und der nächſtfolgende innere ſich verhalten wie ap zu aq, und ebenſo wird der äußere Cylinder lgho zu dem vorhergehenden äußeren Cylinder ſich verhalten, wie aq zu ap. Es ergibt ſich daraus, daß ſowol die äußeren Cylinder für ſich vom erſten an gerechnet eine Reihe bilden, deren Glieder ſich wie die der natürlichen Zahlenreihe verhalten, als auch die innern Cylinder für ſich, ſobald man die Axe ab in lauter gleiche Theile theilt. Beide Reihen enthalten dieſelben Glieder, nur daß die Reihe der äußeren Cylinder ein Glied mehr hat, nämlich das Letzte. Nun bedient ſich Archimedes eines Satzes der allgemeinen Arithmetik, nämlich des Satzes, daß die Summe einer arithmetiſchen Reihe mehr beträgt als die Hälfte derjenigen Zahl, welche man erhält, wenn man das letzte Glied der Reihe ſo viel mal nimmt, als die Reihe Glieder hat, und daß die Summe der mit Ausſchluß des letzten Gliedes genommenen Reihe we-

fortwährend wachsenden Vielecke sich ihrem Flächeninhalte nach ebenfalls wie die Quadrate ihrer Radien verhalten. War man auf diese Weise zur Festsetzung des Verhältnisses von Raumgestalten gelangt, so zeigte man noch, daß jede Annahme eines andern Verhältnisses auf einen Widerspruch mit den gemachten Annahmen entweder oder mit sonst bekannten Sätzen führte; und diese Nachweisung, die man die Rückführung aufs Absurde nennt, hielt man erst für den vollgültigen Beweis der Behauptung. Es kann nicht geleugnet werden, daß die Alten durch die bei allen auch den einfachsten Untersuchungen dieser Art feststehende Forderung einer Rückführung auf das Absurde häufig in eine überflüssige pedantische Breite verfallen sind. Erinnert man sich der Art, wie die Alten beweisen, daß der Kubikinhalt eines Kegels der dritte Theil ist von dem Kubikinhalt eines Cylinders, welcher mit dem Kegel gleiche Grundfläche und Höhe hat, oder daß die Fläche einer Ellipse sich zur Fläche eines mit der großen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises verhält wie die kleine Axe zur großen, oder wie der Flächeninhalt eines Kreises durch ein- und umgeschriebene Vielecke annähernd berechnet wurde, so wird man in diesen Verfahrungsweisen keine Analogie mit derjenigen entdecken, durch welche die heutige Analysis des Unendlichen den Flächeninhalt des Kreises, der Ellipse und den Kubikinhalt des Kegels bestimmt. Methoden, welche dieser letzteren nahe kommen, findet man fast nur bei Archimedes und auch bei diesem nur in seltneren Fällen. Als Beispiel diene uns die von Archimedes gegebene Berechnung des Kubikinhaltes eines paraboloischen Kegels.

Die Linie cad Fig. 91 sei eine gemeine Parabel und cd sei senkrecht auf der Axe ab. Wird die paraboloische Fläche um die Axe ab herumgedreht, so beschreibt sie den paraboloischen Kegel. Der Kubikinhalt desselben soll verglichen werden mit dem Cylinder, welcher zur Grundfläche den Kreis mit dem Durchmesser cd und zur Höhe die Linie ab hat. Man theile die Axe ab in eine beliebige Anzahl

ſo würden wir freilich die Summenformel ſelbſt gar nicht aufſtellen, ſondern ohne Weiteres integriren. Weil wie bekannt der Differentialquotient des Kubikinhaltes und der Axe hier mit der Grundfläche eines innern Cylinders zuſammenfällt, und dieſe Grundfläche mit einer Zunahme der Axe multiplicirt das Differential des Kubikinhaltes darſtellt, ſo haben wir in dem Differential des Kubikinhaltes noch die innern Cylinder des Archimedes, und in dem Integral die Summe von unzählig vielen verſchwindend kleinen innern Cylindern.

Archimedes hat zwar noch mehrere andere Aufgaben durch Summation von Reihen und alſo durch eine unſerer Integralrechnung ſehr verwandte Methode aufgelöſt. Aber daß er dieſer Methode keinen Vorzug vor andern gab, oder wenigſtens auf eine möglichſt allgemeine Anwendung derſelben keinen Werth legte, geht beſonders daraus hervor, daß er die Parabel auf zwei von dieſer Methode ganz abweichende Weiſen quadrirt hat, obgleich es ihm ein Leichtes geweſen wäre, dieſe Quadrirung auf Summirung einer Reihe zurückzubringen. Denn hätte er durch den Scheitel der Parabel eine auf die Axe Senkrechte gezogen, dieſe in gleiche Theile getheilt, und auf den Theilungspunkten Senkrechte bis zur Parabel gezogen, ſo konnte er den auf der converen Seite der Parabel liegenden Flächeninhalt näherungsweiſe durch eine Reihe von Rechtecken darſtellen, welche ſich wie die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe verhalten, und die Summe einer ſolchen Reihe war ihm ganz wohl bekannt.

§. 150.

Das Untheilbare des Cavalieri.

Nachdem man im Laufe des ſechszehnten Jahrhunderts ſich mit der Mathematik der Alten bekannt gemacht, und ohne die Methoden der alten Lehrmeiſter zu verlaſſen einzelnes Neue hinzugefügt hatte, ſchlug in der erſten Hälfte des ſiebzehnten Jahrhunderts, zu derſelben Zeit, als Car-

teſius durch die Entdeckung der analytiſchen Geometrie das Gebiet der Mathematik ſo unermeßlich erweiterte, Cavaleri in der Behandlung einiger geometriſchen Probleme einen Weg ein, welcher mit einem Theile unſerer Analyſis des Unendlichen noch mehr Aehnlichkeit hat als die Exhauſtionsmethode. Obgleich die analytiſche Geometrie, durch welche die Raumgeſtalten einer arithmetiſchen Behandlung zugänglich gemacht wurden, und alle bei den Functionen veränderlicher Größen hervortretenden Begriffe veranſchaulicht und ſinnlich faßbar gemacht werden konnten, indirect als die bei weitem wichtigſte Vorſtufe der Differential- und Integralrechnung zu betrachten iſt, ſo handelt es ſich hier doch nur um Methoden, welche eine directe Beziehung auf dieſe Rechnung haben.

Cavaleri, der ſeine ſogenannte Methode des Untheilbaren ebenſo wie die Alten ihre Exhauſtionsmethode nur auf die Geometrie anwandte, hat das Verdienſt, denjenigen Theil der Exhauſtionsmethode, welcher eine Summirung von Reihen erforderte, als den wichtigſten und als den einer allgemeinen Anwendung allein fähigen erkannt zu haben. Da er aber bemerkte, daß z. B. die innern Cylinder des paraboliſchen Kegels in der vorhergehenden Aufgabe, in ſofern ihre Summe dem Kegel wahrhaft gleich ſein ſoll, eine unendlich kleine Höhe haben müßten, und von bloßen Flächen nicht zu unterſcheiden wären, ſo betrachtete er die parallelen Schnittflächen eines Körpers als die letzten untheilbaren Elemente des Kubikinhaltes, und ſah, daß es nur darauf ankomme, das Geſetz der Vergrößerung oder Verkleinerung dieſer Flächen in einer Reihe darzuſtellen, und in der Summenformel dieſer Reihe zum Grenzwerthe überzugehen, um den Ausdruck für den Kubikinhalt eines Körpers zu haben. Und weil die ſchmalen Rechtecke, aus denen man näherungsweiſe den Flächeninhalt einer krummlinigten Figur zuſammenſetzt, offenbar unendlich ſchmal zu denken und von einer Linie nicht zu unterſcheiden ſind, in ſofern ihre Summe dem Flächeninhalte der krummlinigten

Figur vollkommen gleich sein soll, so betrachtete er Linien als die letzten untheilbaren Elemente der Flächen, und desgleichen Punkte als die untheilbaren Elemente der Linien, und so entstand die Benennung der Methode des Untheilbaren. Sieht man ab von dem Unstatthaften der Ausdrucksweise, so ist klar, daß Cavaleri unter dem Untheilbaren einer Raumgröße im Wesentlichen dasselbe verstand, was man auf dem Standpunkte der Infinitesimalrechnung unter dem Differential dieser Raumgröße versteht, in sofern das Differential als verschwindendes Glied einer unendlichen Incrementenreihe derselben genommen wird.

Wir wollen das Verfahren des Cavaleri durch einige Beispiele erläutern. Soll der Kubikinhalt einer Pyramide, gleichviel ob einer senkrechten oder schiefen, berechnet werden, so zieht man von der Spitze der Pyramide eine Senkrechte auf die Basis oder deren Verlängerung. Die Basis heiße B und diese Senkrechte H. In allen Punkten von H denkt man sich Schnittflächen durch die Pyramide gelegt, welche mit B parallel sind. Diese bilden die unzählig vielen untheilbaren Elemente des Kubikinhaltes der Pyramide. Eine beliebige solche Schnittfläche heiße b. Ihre senkrechte Entfernung von der Spitze der Pyramide heiße h. Alsdann ist

$$b : B = h^2 : H^2$$

$$b = \frac{B}{H^2} \cdot h^2.$$

Hiermit haben wir den allgemeinen Ausdruck eines beliebigen untheilbaren Elementes b des Kubikinhaltes. $\frac{B}{H^2}$ ist ein constanter Factor, und h ist als die Wachsende oder Veränderliche anzusehen. Die Summe aller Elemente b von der Spitze bis zur Basis B werden wir erhalten, wenn wir die Quadrate aller den einzelnen b zugehörigen Werthe von h addiren, und diese Summe mit $\frac{B}{H^2}$ multipliciren. Die einzelnen Werthe von h sind aber nichts als die natürliche Zahlenreihe von 1 bis H, wobei H als eine unend-

lich große Zahl zu betrachten ist. Die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe bilden eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. Werden die natürlichen Zahlen von 1 bis H genommen, so ist in der Reihe der Quadrate derselben das Anfangsglied der Reihe 1, das Anfangsglied der ersten Differenzenreihe 3, das constante Glied der zweiten Differenzenreihe 2, und die Anzahl der Glieder der Reihe H. Folglich ist die Summe dieser Reihe (siehe §. 117)

$$H.1+\frac{H(H-1)}{1.2}.3+\frac{H(H-1)(H-2)}{1.2.3}.2$$

oder nach Potenzen von H geordnet

$$\frac{H^3}{3}+\frac{H^2}{2}+\frac{H}{6}.$$

In sofern unter H eine unendlich große Zahl gedacht wird, sind die niedern Potenzen derselben gegen die dritte unvergleichbar, und als wegfallend gegen dieselbe zu betrachten. Man hat also $\frac{H^3}{3}$ als die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlenreihe bis zur Zahl H zu nehmen, und indem man dieselbe mit dem constanten Factor $\frac{B}{H^2}$ multiplicirt, erhält man als den Kubikinhalt der Pyramide $\frac{1}{3}$ B. H.

Da diese Methode sogleich erkennen ließ, daß die Elemente des Kubikinhaltes dieselben sind für Pyramiden von beliebiger Seitenzahl und für Kegel, und für senkrechte nicht minder als für schiefe, so unterschied sich diese Methode in Bezug auf Kürze sehr zu ihrem Vortheil von dem Verfahren der Alten, welches nur durch viele Zwischensätze und Vermittelungen zu einem so allgemeinen Resultate führen konnte.

Um auch ein Beispiel zu geben, wie Cavaleri vermittelst seiner Methode des Untheilbaren eine Vergleichung anstellte zwischen Raumgestalten, die einige Bestandtheile gemeinschaftlich haben, was die gewöhnliche Manier der Alten war, so wählen wir seine Berechnung des Kubik-

inhaltes der Kugel. Sei adb Fig. 92 ein Halbkreis, der Punkt c sein Mittelpunkt, afeb ein umschriebenes Rechteck, und die Linie cd senkrecht auf fe. Läßt man das Quadrat cafd, den Quadranten cad und das Dreieck cfd um die Linie cd als Axe eine ganze Umdrehung machen, so beschreibt das Quadrat einen Cylinder, der Quadrant eine Halbkugel, und das Dreieck einen Kegel. Zieht man eine beliebige mit ac parallele Linie mnop, so wird der von der Linie po bei der Umdrehung beschriebene Kreis ein Element des Kegels, der von pn beschriebene ein Element der Halbkugel, und der von pm beschriebene ein Element des Cylinders sein. Von welcher Stelle der Linie af man auch die Parallele mp zieht, so werden immer die drei durch das Quadrat, den Kreis und das Dreieck gebildeten Stücke mp, np und op derselben die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, weil in allen Lagen mp gleich dem Radius cn, und op gleich cp ist. Da nun also in allen Lagen $mp^2 = np^2 + op^2$, und die von den Linien mp, np und op bei der Umdrehung beschriebenen Kreise sich wie die Quadrate dieser Linien verhalten, so sieht man, daß an jeder beliebigen Stelle der Linie af das Element des Cylinders gleich ist der Summe der Elemente der Halbkugel und des Kegels, und daß folglich auch der Cylinder selbst gleich ist der Kugel und dem Kegel zusammengenommen. Da nun bekanntlich der Kegel den dritten Theil des Cylinders beträgt, so beträgt die Halbkugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder.

Die Methode des Cavaleri kam bald in großes Ansehen bei den Zeitgenossen desselben, und die großen Mathematiker jener Zeit, besonders Pascal und Roberval, haben mittelst derselben einen Theil der tiefsinnigen Resultate gewonnen, durch welche sie sich so weit über die Geometrie der Alten erhoben. An der Vorstellung des Untheilbaren nahmen sie keinen Anstoß, weil sie in der That das untheilbare Element einer Fläche nicht geradezu als Linie,

sondern in demselben Sinne als Fläche betrachteten, in welchem die Infinitesimalrechnung das Differential der Fläche als eine unendlich kleine Fläche betrachtet. Man sieht dies aus einem Ausspruch des Pascal, der in dieser Beziehung Folgendes sagt: „Die Methode des Untheilbaren und die der Alten unterscheiden sich nur in der Art des Ausdruckes, was vernünftigen Leuten nicht auffallen wird, wenn man ihnen bemerklich gemacht hat, was man darunter versteht. Deswegen werde ich in der Folge keine Schwierigkeit machen, mich der Sprache des Untheilbaren, „die Summe der Linien oder die Summe der Ebenen," zu bedienen. Ebenso werde ich unbedenklich den Ausdruck, die Summe der Ordinaten, gebrauchen, was denen nicht geometrisch zu sein scheint, welche die Lehre von dem Untheilbaren nicht verstehen, und welche sich einbilden, daß eine Ebene durch eine unbegrenzte Anzahl von Linien ausdrücken eine Sünde gegen die Geometrie sei. Dies kommt aber nur von ihrem Mangel an Einsicht, weil man nichts weiter darunter versteht, als die Summe einer unbegrenzten Anzahl von Rechtecken, gebildet von einer jeden Ordinate, und einem jeden der kleinen gleichen Theile des Durchmessers (Abscisse), deren Summe ohne Zweifel eine Fläche ist. Wenn man demnach spricht von der Summe einer unbegrenzten Menge von Linien, so hat man dabei immer eine gewisse Gerade im Auge, mit deren gleichen und unbegrenzten Theilen diese Linien multiplicirt sind."

Hieraus erklärt es sich, warum Leibnitz bei der Einführung der Differential- und Integralrechnung die Vorstellung des Unendlichkleinen und des in demselben Sinne genommenen Differentials so wenig ausführlich zu rechtfertigen für nöthig hielt. Er fand nämlich diese Vorstellung als eine gebräuchliche und zugestandene unter seinen Zeitgenossen vor, und dieselbe war gerade das am wenigsten Neue bei der ganzen Sache. Erst später, als der Begriff des Differentials und eines verschwindenden Gliedes einer unendlichen Incrementenreihe eine so unermeßliche Ausdehnung gewann, und nicht auf einige geometrische Probleme

beſchränkt blieb, als die Differential- und Integralrechnung die ganze höhere Mathematik in ſich zu abſorbiren anfing, und Alle, welche dieſelbe nicht gehörig zu handhaben verſtanden, ſich bei Seite geſchoben ſahen, da erſt erhoben ſich die Einwürfe und der Widerſpruch gegen das Unendlichkleine, und veranlaßten den Leibnitz zu mehreren Verſuchen einer genaueren Rechtfertigung dieſes Begriffs.

Man wird übrigens leicht bemerken, daß mit der Vorſtellung des Cavaleri von untheilbaren Raumelementen an ſich noch keineswegs ein deutlicher Begriff des Differentials einer Fläche oder eines Körperraumes gegeben war. Cavaleri wandte ſein Princip nur an auf ſolche Fälle, in welchen der Differentialquotient einer Fläche oder eines Körperraumes nur von der Größe einer Linie oder einer Ebene abhing. Hätte er aber z. B. den Flächeninhalt einer Kugelzone berechnen wollen, und die Peripherieen der unzählig vielen parallelen Schnitte, welche durch die Zone gelegt werden können, als die untheilbaren Elemente der Fläche der Kugelzone betrachtet, was nach ſeinen allgemeinen Principien eigentlich erlaubt geweſen wäre, ſo hätte er durch Summirung derſelben ein falſches Reſultat erhalten, weil das Differential dieſer Fläche nicht blos von der veränderlichen Größe der Peripherieen der Schnittflächen, ſondern auch von der veränderlichen Neigung der Tangente, gewiſſermaßen von einer veränderlichen Breite der Linien abhängt. Es iſt alſo damit, daß man Linien für die untheilbaren Elemente der Flächen ausgibt, und dabei blos eine veränderliche Länge der Linien im Auge hat, in der That Nichts geſagt. Erſt die genaue Aufmerkſamkeit auf die Stärke des Wachſens, und auf die dadurch beſtimmte Beſchaffenheit der unendlichkleinen Incremente der abhängig Veränderlichen kann mit Sicherheit zur directen Beſtimmung des Differentials einer ihrer Functionen nach unbekannten abhängig Veränderlichen führen. Die Principien des Cavaleri, ſowie er ſie gibt, machen große Vorſicht in der Anwendung nöthig, oder ſie entbehren genau genommen jeder

näheren Bestimmung ihres richtigen Gebrauchs, und können ebenso gut auf falsche als auf richtige Resultate führen.

Uebrigens ist die Methode des Cavaleri als eine auf einem kleinen und beschränkten geometrischen Gebiete ausgeführte wirkliche Integration zu betrachten, weil er in der Summenformel einer solchen Incrementenreihe, die sich bei Vermehrung ihrer Gliederanzahl der zu bestimmenden Größe unbegrenzt annähert, zum Grenzwerth dieser Summenformel überging. Nur konnte man mit dieser Methode auch auf dem geometrischen Gebiete nicht weit kommen, weil man aller analytischen Differentialgleichungen entbehrte, und die Summenformeln der gesetzmäßigen Reihen wirklich aufsuchen mußte, was bekanntlich nur in sehr wenigen Fällen gelingt. Der Forschungsgeist der Mathematiker wurde dadurch vorzugsweise auf die Summirung der Reihen gelenkt, und nachdem Wallis durch Induction die Regeln gefunden hatte, durch welche man die Summe einer Reihe, deren Glieder eine gebrochene Potenz der natürlichen Zahlenreihe enthalten, bestimmen kann, so war man in Stand gesetzt, alle diejenigen Aufgaben zu lösen, welche auf dem Standpunkte der Differential- und Integralrechnung durch Integration der einfachen Function $x^{\frac{m}{n}}$ gelöst werden.

§. 151.

Die Theorie des Maximums und Minimums von Fermat.

Die bisher erwähnten Methoden haben einige Aehnlichkeit mit der Integralrechnung, und sind als unvollkommene Vorläufer derselben zu betrachten. Aber es wurden auch vor der Einführung der Differential- und Integralrechnung einige Probleme auf eine Art behandelt, welche nähere Beziehung zur Differentialrechnung haben, indem man die durch eine Zunahme der willkürlich Veränderlichen einer Function entstehende Zunahme der Function ins Auge faßte, und durch Annullirung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zu dem Grenzwerthe des Quotienten der Zunahmen überging. Nur drückte man das Verfahren nicht gerade in dieser Form aus, stellte es

auch nicht als eine allgemeine und wesentliche von speciellen Aufgaben unabhängige Operation dar, sondern ließ es in die Lösung bestimmter Aufgaben verflochten auftreten. Hierher gehört vor allen Dingen die Methode des Fermat zur Auffindung der Maxima und Minima, deren allgemeinere über dieses bestimmte Problem hinausgreifende Bedeutung dem Erfinder nicht vollkommen unbekannt war, da er mehrere andere Aufgaben ebenfalls darauf zurückzuführen suchte.

Die Regel des Fermat zur Bestimmung derjenigen Werthe der willkürlich Veränderlichen einer Function, bei welchen ein größter oder kleinster Functionswerth stattfindet, ist folgende: Man setze in einer Function $f(x)$ den Werth $x+e$ statt x, und bilde eine Gleichung, indem man $f(x)=f(x+e)$ setzt. Diese Gleichung, weil sie an sich natürlich nicht richtig ist, und erst durch Annullirung von e richtig werden kann, nennt Fermat eine adaequalitas. In derselben werden die gleichen Glieder zu beiden Seiten ausgestrichen, dann wird die ganze Gleichung durch e dividirt, und zuletzt werden alle Glieder der Gleichung, welche den Factor e enthalten, getilgt. Wird die nun übrig bleibende Gleichung aufgelöst in Bezug auf x als Unbekannte, so erhält man denjenigen Werth von x, bei welchem ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Als Beispiel diene eine Aufgabe, welche Fermat selbst behandelt, nämlich den Werth von x zu suchen, bei welchem die Function $x^2(a-x)$ einen größten Werth hat. Es wird zunächst die Gleichung aufgestellt

$$x^2(a-x)=(x+e)^2[a-(x+e)].$$

Nach Ausführung der vorgeschriebenen Operationen, und Tilgung der gleichen Glieder auf beiden Seiten der Gleichung bleibt übrig

$$0=-3ex^2+2aex-3e^2x+ae^2-e^3.$$

Wird die ganze Gleichung durch e dividirt, und dann e annullirt, so erhält man $3x^2=2ax$

$$x=\frac{2}{3}a.$$

Dies Verfahren scheint von dem der Differentialrechnung sehr verschieden zu sein, ist es in der That aber eigentlich nicht. Der Unterschied besteht nur darin, daß die Differentialrechnung erst den Grenzwerth des Differenzquotienten der Function darstellt, und dann denselben gleich Null setzt, während Fermat in einer unvollkommenen Gleichung die Differenz, oder was hier einerlei ist, den Differenzquotienten gleich Null setzt, und dann durch Annullirung der Zunahme der willkürlich Veränderlichen zum Grenzwerthe oder zum Differentialquotienten übergeht. Denn indem Fermat $f(x)=f(x+e)$ setzt, thut er weiter nichts, als daß er $f(x+e)-f(x)=0$ oder $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}=0$ setzt. Nachdem er in der Gleichung $f(x)=f(x+e)$ auf beiden Seiten die gleichen Glieder getilgt hat, bleibt ihm, da $f(x)$ in der Entwickelung von $f(x+e)$ vorkommt, der Werth von $f(x+e)-f(x)$ übrig, und zwar ist derselbe gleich Null gesetzt; und indem er ferner die Gleichung $0=f(x+e)-f(x)$ durch e dividirt, erhält er den Differenzquotienten gleich Null, und endlich durch Annullirung der Zunahme e den Differentialquotienten gleich Null, und damit erst die richtige der Aufgabe entsprechende Gleichung, von welcher die Differentialrechnung gleich ausgeht.

Hätte Fermat sich die Mühe gegeben, die Richtigkeit seiner Theorie recht überzeugend und einleuchtend darzuthun, so wären die Vorstellungen des Differenzquotienten und des Differentialquotienten, welche seinen Schlüssen offenbar zu Grunde liegen, bestimmter hervorgetreten, und er hätte sie auch bei andern Untersuchungen bequemer gebrauchen können. Aber Fermat hatte bei außerordentlich großer Erfindungskraft wenig Lehrhaftes. Er begnügt sich in der Regel, die Resultate seiner tiefsinnigen Combinationen mitzutheilen, ohne recht deutlich in die Genesis seiner Gedanken blicken zu lassen. An vielen Stellen ist er sehr dunkel und fast unverständlich, und wie es scheint nicht blos zum Nachtheil seiner Leser, sondern auch zu seinem eigenen.

Fermat hat die Aufgabe, eine Tangente an einem gegebenen Curvenpunkte zu ziehen, auf eine ähnliche Art, nämlich durch Aufstellung einer unvollkommenen Gleichung, welche durch Annullirung der Zunahme einer Veränderlichen in eine richtige Gleichung übergeführt wird, aufgelöst. Wir wollen sein Verfahren an dem Beispiel einer bestimmten krummen Linie nachweisen. Die Linie adn Fig. 93 sei die gemeine Parabel, und gd eine Tangente. Die dem Berührungspunkte zugehörige Abscisse ab heiße x, und die Subtangente gb heiße s. Man sucht eine Gleichung zwischen x und s. Die Zunahme bo der Abscisse heiße e. Je kleiner e gesetzt wird, desto näher fällt die Ordinate cn der Curve mit der Ordinate cm der Tangente zusammen. Nun ist vermöge der Gleichung der Parabel $\frac{bd^2}{cn^2} = \frac{x}{x+e}$, und bei jeder Tangente $\frac{bd}{cm} = \frac{s}{s+e}$ oder $\frac{bd^2}{cm^2} = \frac{s^2}{(s+e)^2}$. Je kleiner e genommen wird, desto mehr nähern sich die Werthe $\frac{bd^2}{cn^2}$ und $\frac{bd^2}{cm^2}$ und folglich auch die Werthe $\frac{x}{x+e}$ und $\frac{s^2}{(s+e)^2}$ der Gleichheit. Bildet man also die Gleichung

$$\frac{x}{x+e} = \frac{s^2}{(s+e)^2}$$

oder $x(s+e)^2 = s^2(x+e)$,

welche durch Ausführung der Operationen und Tilgung der gleichen Glieder und Factoren übergeht in die Gleichung

$$2xs + xe = s^2$$

so nähert sich dieselbe der wahren zwischen x und s stattfindenden Gleichung um so mehr, je kleiner e genommen wird. Folglich ist $2x = s$ diese wahre Gleichung.

Man wird bemerken, daß Fermat hierbei nicht die der Zunahme e zugehörige Zunahme der Ordinate der Curve benutzt, sondern die wachsende Ordinate der Tangente in seine Rechnung aufnimmt. Da nun Fermat seine Theorie des Maximums und Minimums und seine Methode Tan-

genten zu ziehen als zusammengehörig und wesentlich als dasselbe Verfahren betrachtet, so sieht man, daß ihm nicht sowol die Bildung des Differenzquotienten der abhängig und willkürlich Veränderlichen einer gegebenen Function als die Aufstellung einer sogenannten adaequalitas, welche durch Annullirung einer veränderlichen Zunahme in eine wirkliche Gleichung übergeht, als das Wesentliche seines Verfahrens erschienen ist. Wenn nichts desto weniger einige große französische Mathematiker, deren Urtheil man sonst nicht gern entgegentritt, den Fermat gerade dieser eben erwähnten Methoden wegen für den ersten Erfinder der Differentialrechnung ausgeben, so muß man doch wol die Meinung fassen, daß die Vorliebe für die eigene Nation an diesem Urtheil mehr Antheil hat als die unbefangene Prüfung und Erwägung der wahren Sachlage. Der eigene Ruhmesglanz der französischen Nation ist auf dem Gebiete der Mathematik so groß, daß das Bestreben, denselben durch ein falsches und erborgtes Licht zu erhöhen, verwunderlich erscheinen muß.

Kurz vor der Bekanntmachung der Differentialrechnung hat Barrow ein Verfahren, eine Tangente zu ziehen, angegeben, welches auf die Berechnung des Differenzquotienten der Coordinaten der Curve, und des Grenzwerthes desselben basirt ist, und also im Wesentlichen mit dem Verfahren der Differentialrechnung zusammenfällt. Er sucht ebenfalls, wenn td Fig. 94 eine Tangente der beliebigen Curve ade ist, die Subtangente tb durch die Abscisse des Berührungspunktes auszudrücken. Er setzte eine Zunahme bf der Abscisse, und legte durch die Punkte d und e eine Secante. Die Linie sb ist die Subsecante. Vermittelst der die Ordinate ausdrückenden Function der Abscisse wurde die der Zunahme dg der Abscisse zugehörige Zunahme der Ordinate ge berechnet. Wenn nun y die Ordinate des Berührungspunktes darstellt, so ist $\frac{y}{subsc} = \frac{eg}{dg}$ und

$subsc = \frac{y}{\frac{eg}{dg}}$. Je kleiner die Zunahme dg der Abſciſſe genommen wird, deſto mehr nähert ſich die Subſecante sb der Subtangente tb. Da ſich aber zeigte, daß der Quotient $\frac{eg}{dg}$, in ſofern er für eine beſtimmte Function entwickelt iſt, bei Annullirung von dg nicht in den unbeſtimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, ſondern in eine beſtimmte Function als in ſeinen Grenzwerth überging, ſo ergab ſich, daß die Subtangente gleich ſei der Ordinate, dividirt durch den Grenzwerth des Differenzquotienten der Coordinaten, und man erhielt dieſelbe alſo ausgedrückt durch eine Function der Abſciſſe, und damit war für dieſes einzelne Problem der Tangenten der Differentialquotient eingeführt.

§. 152.

Die Differentialrechnung und die Fluxionsrechnung.

Alle mathematiſchen Errungenſchaften jener erfindungsreichen und geiſtig begabten Zeit drängten nach Einem Ziele, und die großartige Zuſammenfaſſung dieſer vereinzelten Kenntniſſe, in welcher allen ihre rechte Stellung und ihre wahre Bedeutung gegeben wurde, welche eine unermeßliche Erweiterung des Gebrauchs und der Anwendung derſelben möglich machte, und welche unter den Händen ihres Erfinders und ſeiner erſten Anhänger wahre Wunder hervorbrachte, war die Differential- und Integralrechnung. Die Unterſuchungen über den Zuſammenhang und die gegenſeitige Abhängigkeit der Größen, welche ein ſtetig wechſelndes Verhältniß ihrer Zunahmen haben, hatten die Nothwendigkeit herausgeſtellt, auf das Unendlichkleine zurückzugehen, und zwar bei einer endloſen Verkleinerung der Zunahmen theils ihr Verhältniß noch feſtzuhalten und zu beſtimmen, theils ſie als Glieder einer unendlichen Reihe zu einer endlichen Summe zuſammenzufaſſen, oder hatten all-

gemein die Aufgabe hervortreten laſſen, das Unendlichkleine, wie man ſagt, berechnungsfähig zu machen. Dies war nun allerdings gelungen, und zwar nicht blos in den bisher erwähnten Fällen, in welchen die Auflöſung eines umfaſſenden Problems angeſtrebt wurde, ſondern auch in unzählig vielen ganz vereinzelten Aufgaben. Die Schriften der Mathematiker jener Zeit ſind angefüllt mit Unterſuchungen der Art. Aber das berechnungsfähige Unendlichkleine war in zwei Arten hervorgetreten, die noch ohne alle gegenſeitige Beziehung auf einander erſchienen, einmal als die Grenze des Verhältniſſes der ins Unendliche verkleinerten Zunahmen zweier von einander abhängigen Veränderlichen, und zweitens als ein verſchwindendes Glied einer zu ſummirenden unendlichen Incrementenreihe. Und die Anwendung beider Principien war ſehr beſchränkt, weil man dabei auf große arithmetiſche Hinderniſſe ſtieß. Die Berechnung der Differenz oder des Differenzquotienten einer gegebenen Function zeigte ſich bei der Mehrzahl der Functionen mit ebenſo unüberſteiglichen Schwierigkeiten verbunden als die Summirung einer Reihe, deren Glieder ein gegebenes Geſetz des Fortſchrittes haben. Um dieſe Principien wahrhaft nützlich und anwendbar zu machen, dazu bedurfte es erſtens einfacher Regeln, die Grenze des Differenzquotienten einer gegebenen Function zu finden, zweitens ſicherer Mittel, den wahren Ausdruck eines verſchwindenden Incrementes einer ihrer Function nach unbekannten abhängig Veränderlichen zu finden (directe Differentialbeſtimmung) und einer beſtimmten Methode, aus derjenigen Function der willkürlich Veränderlichen, welche ein verſchwindendes Increment der abhängig Veränderlichen ausdrückt, die Function der abhängig Veränderlichen ſelbſt zu finden. Alles dies leiſtete die Differential- und Integralrechnung. Leibnitz gelangte dazu dadurch, daß er das allen den vereinzelten Problemen zu Grunde liegende Allgemeine mit philoſophiſchem Geiſte erkannte, dieſes in der Beſtimmung des Grenzwerthes des Differenzquotienten fand, und nun ſich über alle ſpeciellen

Probleme von Maximis und Minimis, von Tangenten, von Quadraturen und Kubirungen erhebend, die Unterſuchung auf das Gebiet des wahrhaft Allgemeinen, d. h. des Arithmetiſchen, hinüberführte mit alleiniger Beibehaltung des Begriffs eines allgemein und abſtract gedachten Continuums. Und indem er ſo die rein arithmetiſche Aufgabe der Differenzirung für ſich ins Auge faßte, erkannte er bald, daß die auf den erſten Blick unermeßlich erſcheinende Aufgabe der Differenzirung aller denkbaren Functionen durch eine planvolle Theilung der Arbeit ſehr einfach und leicht umfaßbar gemacht werden könne, weil außer den Differentiationsregeln einer ſehr geringen Anzahl von Fundamentalfunctionen nur die Differentiationsregeln der möglichen Arten der Zuſammenſetzung dieſer Functionen, wie z. B. eines Products oder Quotienten von Functionen, oder einer Function einer Function und dergl. mehr aufgefunden zu werden brauchen, um alle beliebige Functionen bequem differentiiren zu können. So entſtand die operative Differentialrechnung, und damit der uneingeſchränkte durch keine beſondere Natur der Functionen gehinderte Gebrauch des Grenzverhältniſſes der Zunahmen. Durch die operative Differentialrechnung erhielt man in den analytiſchen Differentialgleichungen den Zuſammenhang von urſprünglichen und durch Differentiation abgeleiteten Functionen. Und da man ſah, daß der Ausdruck eines verſchwindenden Incrementes einer abhängig Veränderlichen nichts Anderes ſein kann als das Differential derjenigen Function der willkürlich Veränderlichen, welche die abhängig Veränderliche ausdrückt, ſo brauchte man nur aus den analytiſchen Differentialgleichungen diejenige Function, welche einem gegebenen Differential zugehörig war, zu entnehmen, um auf dieſe Weiſe ohne Mühe die Grenzwerthe der Summenformeln unzählig vieler Reihen zu haben, deren wirkliche Summirung auch durch die größte, Jahrhunderte lange Anſtrengung nicht gelungen wäre.

Neun Jahre nach der Entdeckung der Differentialrechnung, im Jahre 1684, theilte Leibnitz in den zu Leipzig erſcheinenden

„Actis Eruditorum“ die Grundzüge der Differentialrechnung mit in der Abhandlung: „Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus“, und zwei Jahre später in der Abhandlung „De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum“, in welcher zuerst das Integralzeichen vorkommt, und eine Gleichung wie $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ eine aequatio summatrix genannt wird, führt er den Grundgedanken der Integralrechnung aus, und somit waren die beiden Grundsteine gelegt zu dem Gebäude, dessen Plan und Ausführung heute und in alle Zukunft des Menschengeschlechts mit Erstaunen und Bewunderung einen Jeden erfüllen muß, der mit hellem für des Geistes edle Form empfänglichem Auge zuerst in dasselbe eintritt.

Aber der Ruhm, sich zum Brennpunkte aller geistigen Strahlen jenes auf dem mathematischen Gebiete so erfindungsreichen Zeitalters gemacht zu haben, ist zu groß, als daß ihn ein Sterblicher unverkümmert besitzen dürfte. Leibnitz mußte diesen Ruhm mit einem andern ihm ebenbürtigen Geiste, mit Newton, theilen. Wir sind zwar keineswegs der Meinung, daß die von diesen beiden Männern gegebene Auffassung und Darstellung dieser Wissenschaft von durchaus gleichem Werthe und Range ist, oder daß auf dem von Newton eingeschlagenen Wege die Wissenschaft ebenso gedeihliche Fortschritte machen und eine ebenso schnelle Ausbreitung hätte gewinnen können, vielmehr sind wir überzeugt, daß, wenn Newton der alleinige Entdecker gewesen wäre, die Wissenschaft früher oder später dennoch gänzlich in die Leibnitzische Auffassung hätte übergehen müssen, und daß der Newton'schen Auffassung gegenüber die Leibnitzische als ein großer Fortschritt erschienen wäre, aber dennoch ist der große Grundgedanke, durch welchen alle die vereinzelten und zerstreuten Bestrebungen der Mathematiker jener Zeit in ein Ganzes zusammengefaßt wurden, und der

die reife Frucht jener Zeit war, in beiden Männern ursprünglich und ohne gegenseitigen Einfluß entstanden.

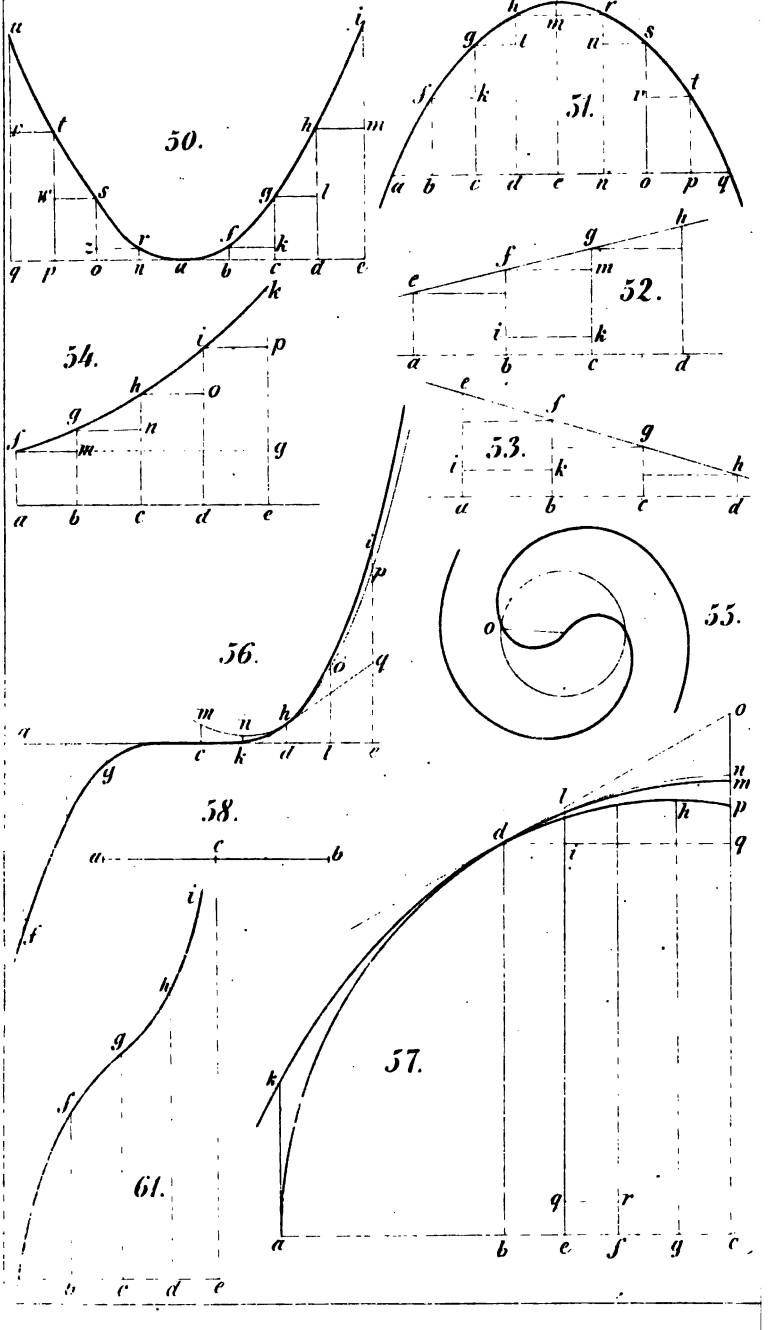
Wir wollen hier keine Erklärung der Newton'schen sogenannten Fluxionsrechnung geben, sondern nur ihren Grundcharakter mit der Leibnitzischen Differentialrechnung vergleichen. Bei Newton erscheint das, worauf es allein wesentlich ankommt, nämlich die Bestimmung der Stärke des Wachsens, sei es einer gegebenen Function oder einer ihrer Function nach unbekannten abhängig Veränderlichen, und die Herleitung der Function der abhängig Veränderlichen aus dem gegebenen Differentialquotienten, nicht für sich, sondern angekettet an eine andere eigentlich nicht zur Sache gehörige Vorstellung, nämlich an die Vorstellung der Bewegung. Newton beginnt die Erklärung seiner Grundbegriffe daher nicht mit allgemein gedachten veränderlichen Größen, sondern mit sehr speciellen Größen, nämlich mit Linien, welche durch die Bewegung von Punkten erzeugt werden. Diese Größen dienen nicht etwa nur als Beispiel, sondern als Fundament der Lehre. Man wird aber leicht ermessen, daß die unter dem Bilde von Linien und von Geschwindigkeiten der bewegten Punkte dargestellten Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung dieser bildlichen Umhüllung überall wieder entkleidet werden müssen, sobald von andern wachsenden Größen und nicht von Linien die Rede ist, oder daß diese Bilder im uneigentlichen Verstande genommen werden müssen, wodurch dann die Sache leicht verdunkelt wird. Wenn man schon im Besitz der Differential- und Integralrechnung ist, so ist es dann freilich leicht, bei Aufstellung der Grundlehren der reinen Bewegungslehre aus der Geschwindigkeit, mit welcher man einen die Abscisse einer Curve erzeugenden Punkt fortrückend denkt, die Geschwindigkeit herzuleiten, mit welcher ein Punkt fortrücken müßte, welcher gleichzeitig die zugehörige Ordinate oder die Curve selbst erzeugen sollte, sobald außer der Abscissengeschwindigkeit die Ordinatengleichung der Curve gegeben ist. Wenn man aber umgekehrt aus der Vorstellung

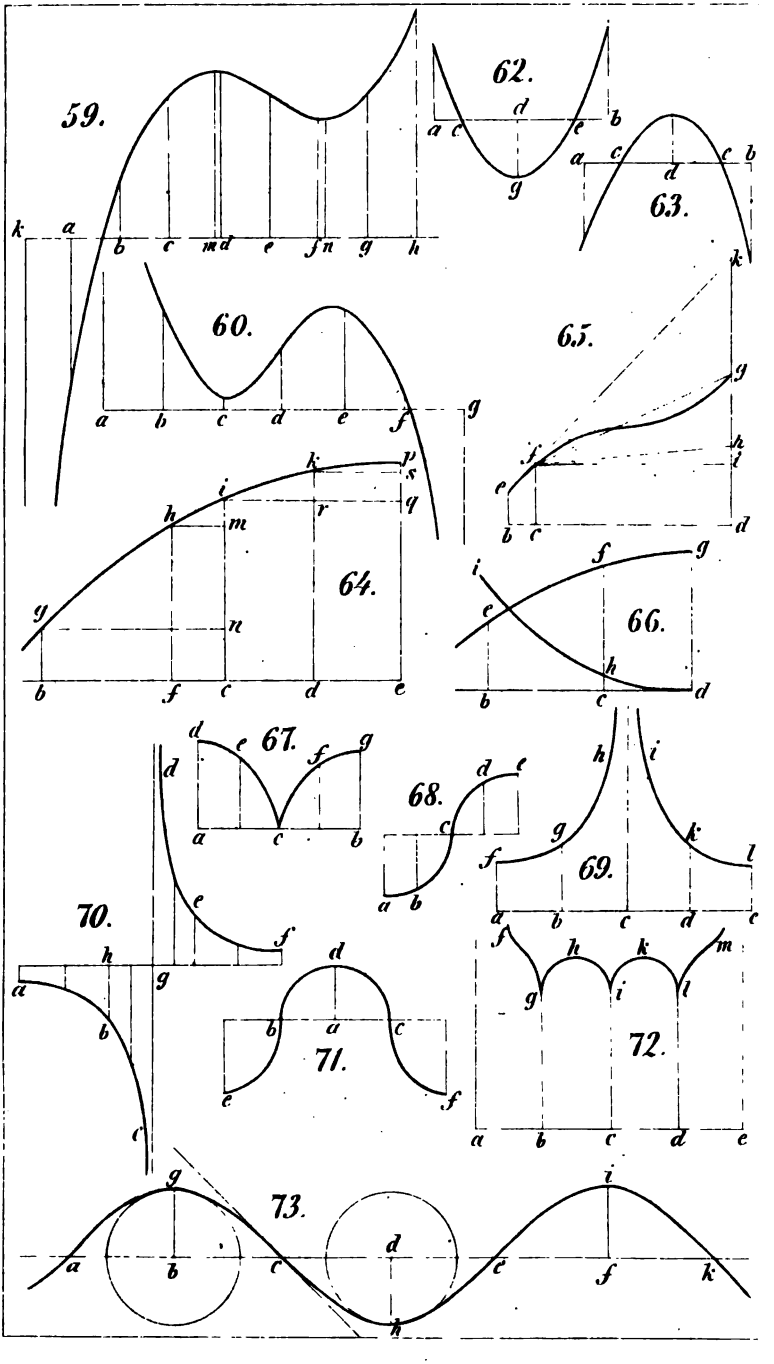
dieſer zuſammengehörigen Geſchwindigkeiten die Grundbegriffe der Differentialrechnung erſt entwickeln will, ſo wird die Sache ohne Noth dunkel und ſchwierig. Die Geſchwindigkeit, mit welcher ein Punkt auf einer Linie fortrückt, iſt es urſprünglich, was Newton Fluxion nennt, und dieſe fällt alſo mit dem Differentialquotienten von Raum und Zeit zuſammen. Indem man die Fluxion der Ordinate durch die der Abſciſſe dividirt, erhält man den Differentialquotienten der Ordinaten Wenn das Wort Fluxion auf eine andere Raumgröße, z. B. auf Flächen übertragen wird, ſo bedeutet Fluxion eigentlich keine Geſchwindigkeit mehr, wenigſtens nicht die Geſchwindigkeit der Fortbewegung der die Fläche erzeugenden Linie, ſondern die einer gewiſſen Zeit zugehörige Flächenzunahme, in ſofern beide Größen als gleichmäßig wachſend gedacht werden. Soll die Fluxion der Fläche wirklich eine Geſchwindigkeit darſtellen, ſo muß man die Flächenzunahmen durch correſpondirende Linien ausdrücken, was wieder nur ganz unnöthige Weitläufigkeiten hervorbringt. Newton, wol einſehend, daß bei der Uebertragung der der Bewegungslehre entnommenen Begriffe auf andere Größen die Vorſtellung der Zeit ungehörig und vielfach läſtig ſei, ſagt, daß die Zeit nicht im eigentlichen Verſtande, ſondern formaliter zu nehmen ſei. Abgeſehen davon, ob bei dieſem Unterſchiede ſich etwas Beſtimmtes denken läßt, ſo iſt damit doch ſo viel geſagt, daß man die veränderlichen Größen nur überhaupt als Functionen einer gleichförmig wachſenden willkürlich Veränderlichen, wie etwa die Zeit iſt, zu denken brauche, und den Differentialquotienten dieſer beiden Veränderlichen die Fluxion der abhängig Veränderlichen nennen ſolle. Damit iſt aber die Vorſtellung der Geſchwindigkeit im eigentlichen Sinne auch aufgegeben, und man ſieht nicht ein, was dieſe allen Veränderlichen zu Grunde gelegte gleichförmig Wachſende nun noch nützen ſoll, da ja die willkürlich Veränderliche einer jeden gegebenen oder unbekannten Function dieſe Rolle einer gleichförmig Wachſenden übernehmen kann. Durch dieſe

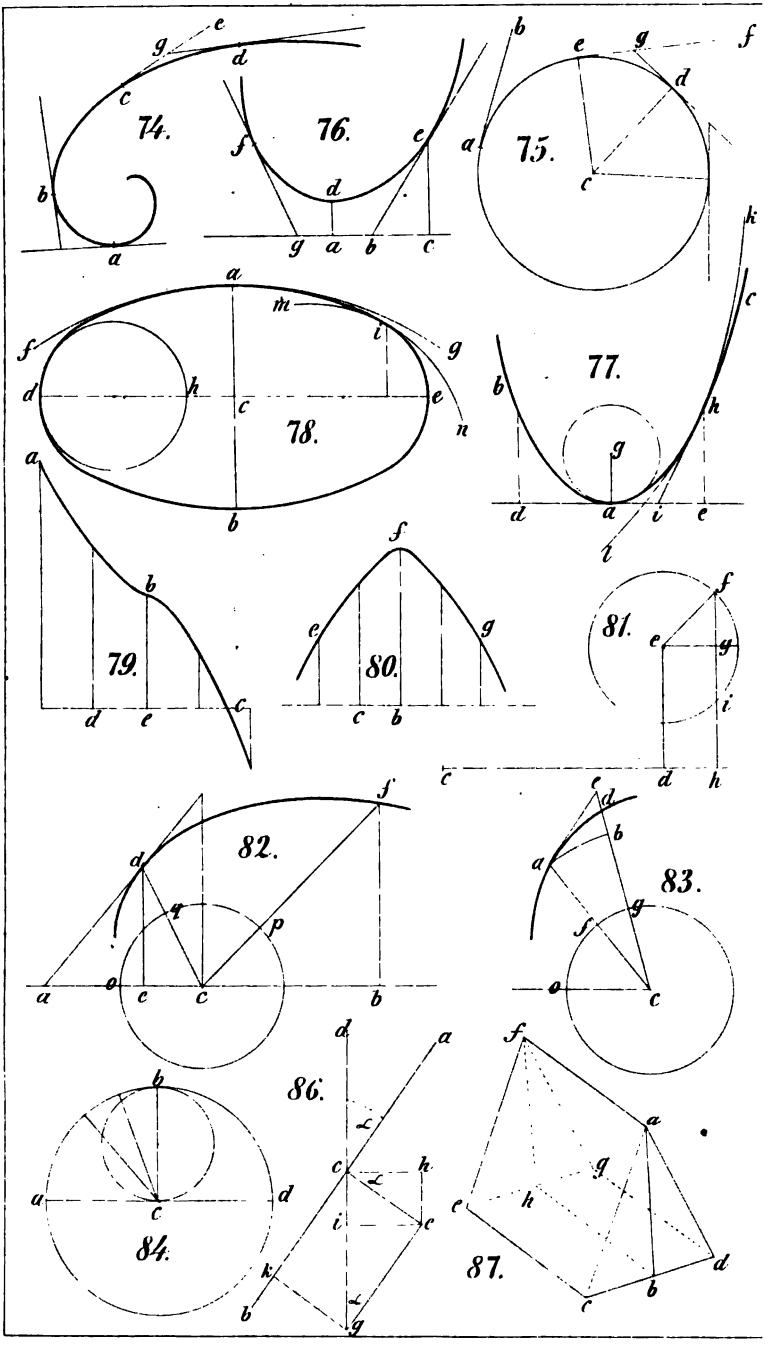
Wendung tritt man aber aus der Newton'schen Auffassung ganz heraus und in die Leibnitzische hinein.

Sicherlich war Newton ursprünglich von phoronomischen Untersuchungen ausgegangen, und hatte dann bemerkt, daß den dabei angewendeten Methoden eine allgemeine über phoronomische Probleme hinausreichende Bedeutung und Anwendung gegeben werden konnte. Da ihm selbst diese Uebertragung der phoronomischen Begriffe auf andere Gebiete geläufig war, und er seine Abhandlungen nicht für die Oeffentlichkeit bestimmt hatte, so unterließ er es, seine Resultate unabhängig von dem zufälligen Ausgangspunkte derselben darzustellen, sonst würde er wol den Weg, auf welchem er seine Resultate gefunden hatte, unterschieden haben von dem Wege, auf welchem sie Andern am besten mitzutheilen sind. Als aber der Prioritätsstreit zwischen ihm und Leibnitz zum Ausbruch gekommen war, wurde er, um die Eigenthümlichkeit seiner ersten Auffassung und das frühere Datum seiner Abhandlungen nachzuweisen, genöthigt, mit dem, was ursprünglich nur fürs Haus bestimmt war, gewissermaßen in dem Schlafrocke in die Oeffentlichkeit herauszutreten. Daß die Engländer einige Zeit lang in diesem Schlafrocke herumstolzirt sind, bis sie des Lächerlichen und Verkehrten und ihres eigenen Schadens inne wurden, gehört zu den bemerkenswerthen Erscheinungen der Nationaleifersucht. Beide Männer Leibnitz und Newton haben die gleiche Ehre einer selbständigen Entdeckung der Differential- und Integralrechnung, aber Leibnitz allein hat ihr eine brauchbare Gestalt gegeben, und diese gerade ist es, der man den Fortschritt der Wissenschaft wesentlich zu danken hat.

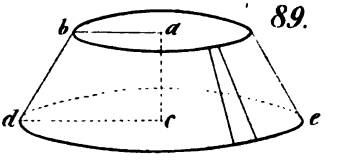
Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

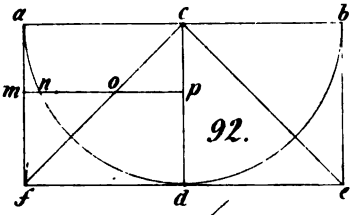

50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
61.

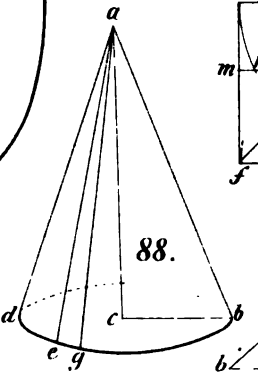

59.
60.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.

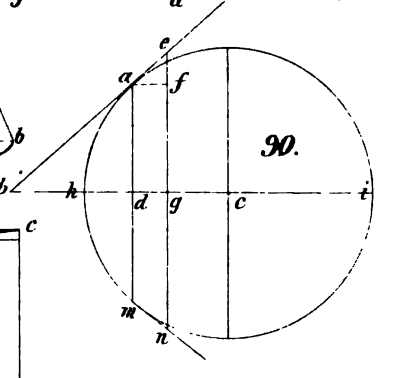

74.
76.
75.
78.
77.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
86.
87.

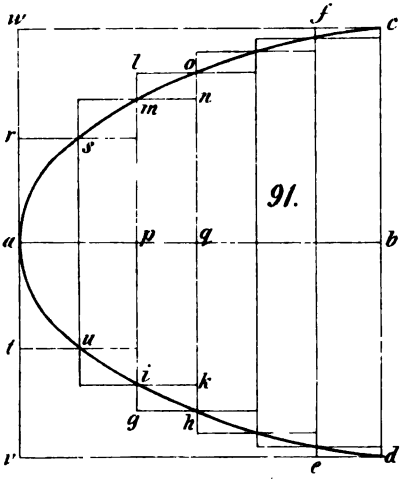
85.

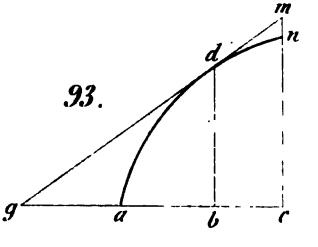

89.
b
a
d
c
e

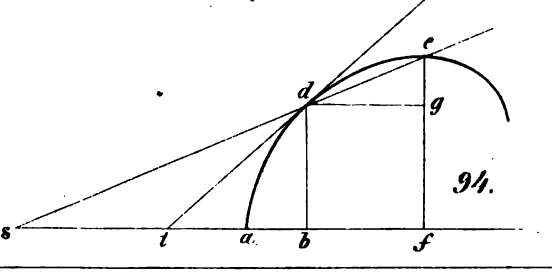

a
c
b
m
n
o
p
92.
f
d
e


a
88.
d
c
b
e
g


e
a
f
90.
b
h
d
g
c
i
m
n


w
f
c
l
o
m
n
r
s
91.
a
p
q
b
t
u
i
k
g
h
t'
d
e


m
n
d
93.
g
a
b
c


e
d
g
94.
s
t
a
b
f

23, 28
31, 38
90

CABOT SCIENCE LIBRARY
APR 1 0 1995
FEB 17 1995